Universitat Politècnica de Catalunya
Departament de Llenguatges i Sistemes Informàtics
Programa de Doctorat en Intel.ligencia Artificial

Tesis Doctoral

Aspectos Formales en el Razonamiento Basado en Relaciones de Similitud Borrosas

Ricardo Oscar Rodriguez**

Memoria presentada para optar al título de Doctor en Informática

Directores: **Dr. Pere Garcia Calvés*** **y Dr. Lluís Godo Lacasa***

(*) del Institut d'Investigació en Intel.ligència Artificial (IIIA - CSIC)
Campus UAB s/n.
08193 Bellaterra, España.

(**) del Departamento de Computación de la F.C.E. y N.
de la Universidad de Buenos Aires (Argentina).

Noviembre del 2001

A mis padres
que me dieron la oportunidad de ser.

A Liliana, mi gran compañera,
sin cuyo amor, sacrificio y paciencia,
me resultaría imposible disfrutar lo que soy.

A mis hijos, Ana y Pablo,
sin cuya existencia mi vida perdería sentido.

Agradecimientos

"Los acontecimientos más importantes son determinados por el azar", diría un querido amigo y este documento lo corrobora. Pues fue el azar quien me presentó, allá por julio del '92, a Ruspini quien me regalara una separata del artículo que es piedra basal de este trabajo. Fue totalmente fortuito que ese mismo año me cruzara en Rosario con Ramón Lopéz de Mántaras y me hablara del IIIA. Fue casual que después de perder la primera batalla por reincidir en la paternidad, decidiéramos con Liliana, venir a Barcelona. Más azarosa aún fue la elección de la UPC, del LSI y del curso de Raonament Aproximat, que me condujeron a dos amigos como Pere y Lluis. Pero el acto confirmatorio del paradójico determinismo del azar, lo ofrece el encuentro entre Roberto Cignoli y Francesc Esteva que hoy me brinda el marco adecuado para terminar y continuar mi trabajo.

Todo fue tan imprevisto como maravilloso. Esencialmente porque la gente que me he encontrado en la ciudad Condal a lo largo de estos largos ocho años me llenó de amistad. Por eso quiero dedicarles estas pocas líneas para dejar testimonio de mi gratitud y reciprocidad a todo ese cariño que hoy hace que sienta a Barcelona entrañable. Es posible que olvide u omita nombrar a algunas de las personas que me ayudaron desinteresadamente a llevar adelante este proyecto de tesis y de vida. Si es así pido disculpas por adelantado.

Pero el inicio de este derrotero hubiera sido imposible sin el aporte de muchos amigos de la ribera platense. Permítanme expresar primero mi agradecimiento hacia ellos. A Adolfo Kvitca, Raúl Carnota y José Alvarez por iniciarme en las artes y el disfrute de la ciencia y la I.A.. A Pablo Jacovkis por inducirme a comenzar el doctorado. A Irene Loiseau por tener siempre a mano un buen consejo y darme un respaldo casi incondicional. A mi compañera de despacho, Verónica Becher que siempre tiene un gesto cálido que me alienta y anima a seguir. A Eduardo Ferme con quien compartí los primeros sufrimientos de ser doctorando. A Dan Hirsch, Igor Zwir y Aida Interlandi que aportaron desde lo cotidiano mucho para que me sienta a gusto trabajando. A todos ellos gracias por la amistad que me brindan.

Por su parte, la ribera catalana, que ya a mi llegada me concedió una primera cuota de su amor, me llenó de buenos amigos, compañeros y profesores. El primero fue Ton Sales quien contuvo mi pavor de recién llegado y me colmó de buenos consejos. Luego llego el encuentro con Horacio Rodriguez y su grupo de investigación que con una cotidiana invitación a almorzar diluyeron la soledad que me invadía durante mis primeros días. Luego me integré a la hermandad latino americana en el LSI y me honraron con su amistad: Matías, Adriana, Luis Carlos y Pili, María Amelia, Rodolfo, Miguel, Laura y Lourdes. Una mención especial merece Mercè y el resto de las secretarias que siempre supieron allanar con humor y paciencia mi fobia a la burocracia. Debo decir que mi paso por el LSI fue muy enriquecedor no sólo desde el punto de vista académico sino también institucional. Un lugar muy destacado tuvieron Silvia Clerici que con idiosincracia argentina supo introducirme en la dinámica catalana y Javier Larrosa con quien comparto el placer por las largas conversaciones. El conocer a ambos justificó plenamente mi venida a Barcelona.

Después me trasladé al IIIA donde seguí encontrando amigos a muchos de los cuales ya había conocido en las aulas del LSI. Allí con cada café matinal, cada almuerzo y cada fiesta en la masía, me fui embebiendo de la cultura catalana y conocí un ambiente de trabajo en camaradería que fue fundamental para el desarrollo de mi trabajo. Los lazos de amistad que establecí fueron tan fuertes que cada regreso fue una fiesta que comenzaba en la recepción con Sonia, Imma, Ana y Tony, seguía por la administración con Joan Ricard y Eva, y terminaba en una recorrida despacho por despacho para ponernos al día con las novedades en mi ausencia. Así, entre mesas de cafés, partidos de football y fiestas, creció esa mezcla de amistad y solidaridad con mis compañeros de doctorado: María Eva, Josep Lluis, Marcos, Jordi, Francisco, Adriana, JAR, Maite entre muchos otros. También durante los debates de sobremesa fui descubriendo el respeto y el aprecio por gran parte del staff de investigadores. Gracias Carles, Ramón, Enric, Josep, Pedro y Jaume,

porque me hicieron sentir integrado al instituto. Todos ellos desde el afecto supieron dar el marco imprescindible para el disfrute de mi trabajo. Me he dejado para el final un agradecimiento muy especial para Francesc Esteva con quien a lo largo de estos años hemos forjado una amistad que espero perdure.

Casi para terminar, quiero agradecerles a Lluis Godo y Pere Garcia, mis directores, porque me trataron como un par y compartieron sin mezquindad su saber, y porque sus enseñazas fueron mucho más allá de lo concerniente a la lógica. De verdad muchas gracias por vuestra amistad sin cuyo amparo hubiera sido imposible esta dirección de tesis a distancia.

Finalmente un recuerdo para dos personas que ya no están entre nosotros pero a los que también les debo reconocimiento. Gracias Carlos Alchourrón y Nuria Piera.

Sólo resta desear que el futuro me ofrezca más excusas para seguir abonando tanta amistad catalana. Ésta se ha concluído.

Ricardo Oscar Rodriguez
Bueno Aires, Argentina
19 de noviembre del 2001

Esta investigación ha sido parcialmente financiada por la Agencia Española del Instituto de Cooperación Ibero-americano, la Universidad de Buenos Aires a través de una beca de Iniciación a la Investigación y el Proyecto de investigación UBA-CyT 105, el Programa de Reforma de la Educación Superior del Ministerio de Educación Argentino a través de Fondo para el Mejoramiento de la Calidad Universitaria (FOMEC) y la Fundación Antorchas.

Resumen

Las limitaciones de la lógica clásica para dar cuenta del razonamiento humano han motivado el estudio de formalismos alternativos, los cuales se han convertido en una de las principales áreas de investigación en Inteligencia Artificial.

Razonamiento aproximado es uno de esos formalismos alternativos que ha generado una importante cantidad de publicaciones tanto en el área de filosofía como en la inteligencia artificial. Los modelos de razonamiento aproximado tienen como propósito ofrecer herramientas más flexibles que las que proporciona la lógica clásica cubriendo esencialmente tres de los tipos de "imperfecciones": vaguedad, incertidumbre y verosimilitud. Informalmente, podemos decir que el razonamiento aproximado trata con proposiciones y etiquetas asociadas a ella, las cuales son usualmente interpretadas como grados de verdad, creencia y proximidad a la verdad. Cada una de esas unidades de medida están respectivamente asociadas con la noción de vaguedad, incertidumbre y verosimilitud.

En nuestro trabajo, haremos una clara distinción de estas tres nociones y nos ocuparemos del estudio de la tercera, donde interpretaremos la verosimilitud como una magnitud que expresa la idea de cuán cercana a la verdad está una proposición dada. La medida de cercanía será formulada a través de una relación de similitud borrosa. Eso dará lugar, a su vez, a la formulación de diferentes modelos de razonamiento basado en similitud. El principal propósito de esta memoria es estudiar una formalización completa (sintáctica y semántica) de esos modelos de razonamiento basados en similitud, de manera que esta noción acepte interpretaciones más generales que la usual. Para tal objetivo nos inspiraremos en las ideas que Ruspini presentó en [Rus91] y las plasmaremos en una estructura de modelo similar a la de Kripke, i.e. un modelo será una terna $\langle W, S, \models \rangle$, en la cuál W es un conjunto no vacío de mundos posibles, $\models$ representa una aplicación que a cada mundo posible le asigna una valoración de las variables proposicionales, y S es una relación borrosa sobre $W \times W$. Dicha relación representará a nivel semántico la noción de verosimilitud, para la cual argumentaremos que la interpretación más débil puede ser dada a través de lo que llamaremos *aplicaciones de aproximación superior*, i.e, relaciones borrosas reflexivas sobre el dominio de los mundos posibles. Además, caracterizaremos los conjuntos borrosos normales en términos de esas aproximaciones superiores. Luego usando ese vínculo, flexibilizaremos la definición clásica de consecuencia lógica, con el propósito de obtener diferentes familias de relaciones de consecuencia basadas en similitud, algunas de las cuales resultarán ser bien conocidas en la literatura. En particular nos concentraremos en *las relaciones de consecuencia aproximadas y de proximidad*, describiendo sus propiedades y completando su caracterización.

La etapa siguiente de nuestro estudio consistirá en el desarrollo de diversos sistemas lógicos à la Hilbert, que capturen deductivamente aquellos modelos de razonamiento. Para lo cual utilizaremos dos enfoques, uno condicional y otro modal. Dentro de cada uno de ellos consideraremos dos estrategias: una bivaluda pero con operadores múltiples y otra multivaluada pero con sólo dos operadores. Para la mayoría de los casos daremos resultados de adecuación.

Acto seguido, con el objetivo de conseguir un marco donde fuera posible representar y combinar en un mismo formalismo lógico las nociones de verosimilitud, incertidumbre y vaguedad, extenderemos la caracterización semántica ya mencionada, permitiendo asociar interpretaciones multivaluadas a los mundos. Esta nueva semántica tendrá un correlato sintáctico que serán las lógicas bimodales multivaluadas. Estudiaremos algunos de estos sistemas.

Por otra parte analizaremos desde una perspectiva más abstracta como es la tarkiana, las características de estas nociones de consecuencia aproximada. Ésto nos llevará a proponer nuevas nociones de operadores de clausura borrosos, relaciones de consecuencia borrosas y sistemas de clausura borrosos. Con estas herramientas podremos comparar diferentes tipos de operadores.

Finalmente, combinaremos los modelos de razonamiento basados en similitud con otros, tales

como los contrafácticos y los nomonótonos. Completaremos nuestro trabajo formulando aplicaciones al Cambio y a la Actualización de Teorías de las medidas de similitud.

Contenidos

1 Introducción **13**

1.1 Modelos de Razonamiento Aproximado: una taxonomía 13
1.2 Objetivos de la Tesis 21
1.3 Trabajos Relacionados 22
1.4 Estructura de la tesis 27
1.5 Semántica utilizada 29

2 Aproximaciones Superiores y Consecuencias Graduadas. **31**

2.1 Un Ejemplo motivador: 31
2.2 Similitud y Conjuntos Borrosos 34
2.3 Conjuntos borrosos, Consistencia y Consecuencia Graduadas 36
2.4 Aproximaciones topológicas 40
2.5 Consecuencia graduada y aproximaciones superiores 42
2.5.1 Consecuencia aproximada 42
2.5.2 Consecuencia de proximidad 46
2.6 Otros ejemplos 50
2.6.1 Razonamiento basado en Casos 50
2.6.2 Interpolación 52

3 Lógica Condicional basada en similitud **55**

3.1 Lógicas Multicondicionales 56
3.1.1 Lógicas multicondicionales aproximadas 57
3.1.2 Lógicas multicondicionales de proximidad 67
3.2 Lógicas condicionales multivaluadas 71
3.2.1 Lógica Condicional multivaluada aproximada 72
3.2.2 Lógica Condicional multivaluada de proximidad 77
3.3 Relación con los operadores de consecuencia 80
3.4 Demostraciones 81

4 Lógicas multimodales bivaluadas **87**

4.1 Introducción 87
4.2 Lenguaje y Sistemas Lógicos 89
4.3 Completitud para G finito 96
4.4 Completitud cuando G es denso y $\otimes = \min$ 100
4.5 Consecuencia Aproximada y de Proximidad 106
4.6 Relación con la Lógica Posibilística 107

5 Lógicas modales multivaluadas **113**
5.1 Introducción . . . 113
5.2 Las lógicas $S5(\mathcal{C})$ . . . 115
5.3 Las lógicas $\mathbf{FM}(\mathcal{C})$ y su semántica . . . 118
5.4 Completitud parcial . . . 123

6 Consecuencias Borrosas **129**
6.1 Introducción . . . 129
6.1.1 Tarski . . . 130
6.2 Operadores de Clausura Borrosos . . . 132
6.3 Operadores de Clausura Implicativos . . . 136
6.4 Operadores Extensionales definidos por relaciones borrosas . . . 146
6.5 Relaciones con otros trabajos . . . 151
6.5.1 Inferencia Natural . . . 151
6.5.2 Inferencia como Extensión Canónica . . . 154
6.6 Descripción de operadores de clausura . . . 156

7 Razonamiento No Monótono y Contrafáctico basado en Similitud **157**
7.1 Introducción . . . 157
7.2 Lógicas no monótonas . . . 159
7.3 Lógicas de contrafácticos . . . 164
7.4 Revisión de Creencias . . . 169
7.5 Inferencia no-monotónica inducida por medidas de consistencia . . . 175
7.6 Consecuencia no monótona inducida por medidas de implicación . . . 178
7.7 Órdenes y Sistemas de Esferas . . . 182
7.8 Similitudes y Contrafácticos . . . 185
7.9 Similitudes y Operadores de Revisión y Actualización . . . 188

8 Conclusiones y Futuros Trabajos **195**
8.1 Contribuciones . . . 195
8.2 Lista de Publicaciones . . . 199
8.3 Trabajos futuros . . . 200

9 Anexo 1: Conocimientos Previos **203**
9.1 Medidas de Implicación y Consistencia: Definiciones y Propiedades . . . 203
9.2 El Cálculo Proposicional . . . 204
9.3 BL-álgebras y BL-lógicas . . . 205
9.4 Lógica Modal . . . 210

Capítulo 1

Introducción

1.1 Modelos de Razonamiento Aproximado: una taxonomía

Por muchos años, la lógica clásica ha provisto la base formal para el estudio de razonamiento humano. Sin embargo, durante la última década, se ha vuelto evidente que el razonamiento humano requiere de mas elementos de los que puede proveerle la lógica deductiva tradicional. Por ejemplo, clásicamente, la verdad de una sentencia φ con respecto a una base de conocimiento KB es determinada si todo modelo de KB también es modelo de φ. Pero nada puede decirse acerca de su valor de verdad si sólo la mayoría de los modelos de KB son también modelos de φ o cuando los modelos de φ son muy " cercanos" a los modelos de nuestra base de conocimientos KB. Más aún, una sentencia puede sólo ser interpretada como verdadera o falsa, pero algunos enunciados tales como "Juan es calvo" difícilmente puede ser caracterizados con precisión "bivaluada".

Minsky ([Min85]) y McDermott ([McD87]) han sugerido que la lógica clásica es inapropiada para la modelización del razonamiento humano debido a su naturaleza "perfecta" y "rígida". Ellos señalan que mientras que el razonamiento sustentado por la lógica clásica es correcto (todos los hechos deducibles son verdaderos) y completo (todas las verdades son deducibles), el razonamiento humano en general no posee ninguna de esas cualidades. Por el contrario, la modelización de razonamiento humano usualmente necesita ser flexible y con capacidad para tratar con cierto tipo de conocimiento "imperfecto". Imperfecciones que vienen dadas por el hecho de que a veces la información es incierta, vaga, inverosímil, incompleta o parcialmente contradictoria. Estas limitaciones de la lógica clásica para dar cuenta del razonamiento humano han motivado el estudio de formalismos alternativos, los cuales se han convertido en una de las principales áreas de investigación en Inteligencia Artificial.

Razonamiento aproximado es uno de esos formalismos alternativos que ha generado una importante cantidad de publicaciones tanto en el área de filosofía como en la inteligencia artificial. Los modelos de razonamiento aproximado tienen como propósito ofrecer herramientas más flexibles que las que ofrece la lógica clásica cubriendo esencialmente tres de los tipos de imperfecciones mencionados arriba, a saber: vaguedad, incertidumbre y verosimilitud. Informalmente, podemos decir que el razonamiento aproximado trata con proposiciones y etiquetas asociadas a ella, las cuales son usualmente interpretadas como grados de: verdad, creencia y proximidad a la verdad. Cada una de esas unidades de medida están respectivamente asociadas con la noción de vaguedad, incertidumbre y verosimilitud. Desafortunadamente, esa visión simplificada no permite remarcar el hecho de que cada una de esas "imperfecciones" responde a una semántica diferente. A continuación, trataremos de dar una descripción ortogonal de cada una de esas tres "imperfecciones" con el fin de clarificar su distinción para luego indicar como pueden ser combinadas. Los tres ejes de análisis corresponden a interpretaciones bivaluadas versus multivaluadas, información completa versus incompleta, e información segura versus errónea.

El Problema de la Interpretación:

Siempre que tenemos (o fijamos) un lenguaje de representación para describir la información que

disponemos acerca del mundo, es necesario estar en condiciones de proveer una forma de interpretar las sentencias, i.e. de establecer una correspondencia entre significado y verdad (o como Carnap dice en [Car37]: entre conceptos formales y observación). Sin embargo no hay consenso acerca de cuál es la mejor (o más apropiada) teoría para definir (o establecer) la verdad, si la pragmática, la coherentista, la de correspondencia, la de redundancia o la semántica. En nuestra opinión, la teoría de correspondencia de Tarski es la más adecuada forma de establecer esa relación. Él afirma que la verdad de sentencias, afirmaciones, juicios, proposiciones, creencias o ideas viene dada por su "correspondencia" con la realidad, el mundo, o los hechos fácticos. En la visión de Tarski, el valor de verdad de una sentencia es determinada por una función de interpretación e desde el lenguaje $\mathcal{L}$ a los modelos Ω, donde él entiende que una interpretación consiste en establecer una correspondencia entre entidades lingüísticas en nuestro lenguaje de representación y entidades no lingüísticas del mundo real. En el trabajo original de Tarski [Tar56a], una sentencia '$F(a)$' es verdadera en relación a una interpretación e si y sólo si la denotación $e(a)$ de a pertenece a la extensión $e(F)$ de F. En ese contexto, las sentencias pueden sólo ser interpretadas en forma bivaluada (serán verdaderas o falsas). Una de las más coincidente objeciones a la teoría de correspondencia de Tarski consiste en señalar que la misma es aplicable a lenguajes formales, pero no al lenguaje natural. Es bien conocido que la mayoría de las afirmaciones, juicios, proposiciones, creencias o ideas expresables en el lenguaje natural no tienen una caracterización precisa (en términos de verdad o falsedad) de su significado. Ellos no están semánticamente determinados (en el último sentido) porque suelen contener (entre otras cosas) diferentes clases de *expresiones vagas*, al incluir predicaciones tales como 'grande', 'corto', 'largo', etc., modificadores como 'muy', 'más o menos', algo, etc., y cuantificadores como 'la mayoría', 'algunos', 'muchos', 'poco', etc.

En algunos casos, el uso de expresiones vagas está esencialmente basado en razones pragmáticas. Esa es la situación, cuando nuestro lenguaje L es semánticamente indeterminado pero existe una extensión L' que está semánticamente determinada. Así, aún cuando L' da una ajustada interpretación del uso de las expresiones de L, este último puede todavía ser más interesante y atractivo debido a razones prácticas tales como la dificultad o el alto costo para determinar o caracterizar los conceptos en L' (como por ejemplo el grado de detalles o granularidad, la previsión de las excepciones en una regla, etc.). La relación entre lenguaje ordinario y lenguaje científico es a menudo de este tipo: términos cualitativos y vagos como 'masa puntual' o 'pequeñas oscilaciones' (en el contexto de un movimiento oscilatorio armónico) pueden ser reemplazados por conceptos científicos de mayor precisión, pero el uso de estos últimos haría más complicadas y opacas las explicaciones. Carnap denomina *explicaciones*, a ese método de procesar expresiones vagas para obtener su contraparte precisa. Así, la vaguedad de origen pragmático no es un problema para una teoría de la verdad puesto que toda sentencia vaga del lenguaje L puede ser traducida a otra sentencia del lenguaje L' para el cual existe una interpretación precisa para cada uno de sus elementos a través de una definición tarskiana de verdad.

Sin embargo, algunas veces la aplicación del método de explicación para precisar un concepto tiene efectos arbitrarios y antinaturales. Por ejemplo si en lugar de describir la altura de una montaña en términos de una magnitud de entre 1.000m y 10,000m, sólo nos referimos a ella como 'alta' ('mediana' o 'baja'). Esta última descripción es a menudo mucho más útil (y sintética) aún cuando es vaga y menos específica. Pero, ¿Cuál es el significado de 'alta'? Intuitivamente hablando, si bien no podemos usar ese término para significar que la montaña tiene una altura precisa de 5.000m, tampoco diríamos que la magnitud 'alta' es totalmente arbitraria. En general, aceptaríamos que 'alta' lleva implícito cierta noción de altura, como por ejemplo que toda montaña con mas de 6.500m es 'alta' y que toda montaña con menos de 4,000m no puede ser considerada 'alta'. Pero, ¿Qué podemos decir acerca de los valores "intermedios"? o, en otros términos, ¿Cuál es el valor límite a través del cual una montaña deja de ser 'alta'? En este caso, es imposible (al menos difícil) determinar cuál es el valor de altitud a partir del cual el término alta es aplicable o no. Para resolver este problema de "límites" para el concepto 'alta' se ha propuesto "calificar" los

valores de transición que van desde los valores de altura que son aplicables al concepto (en nuestro caso mayores a 6.500m) y aquellos que no lo son (menores a 4.000m) con un grado de aplicabilidad.

En términos más generales, diremos que la vaguedad de un concepto se manifiesta en el hecho que este no puede ser claramente definido en tanto y cuanto no es posible precisar cuando es aplicable y cuando no.

En resumen, algunas expresiones por ser inherentemente o semánticamente vagas, se resisten a ser "desambigüadas" con el método de las explicaciones. En tales casos, no es posible dar una caracterización de su significado en términos de interpretaciones de verdad-falsedad. Por lo tanto si buscamos representar conocimiento del tipo "la montaña es alta", necesitaremos incrementar nuestra capacidad de interpretación abandonando principios tales como: el del tercero excluído ($p \vee \neg p$ es siempre verdadero) y de no contradicción ($p \wedge \neg p$ es siempre falso). En respuesta a esa necesidad Lotfi Zadeh introdujo en 1965 ([Zad65]) la *teoría de conjuntos borrosos* (en inglés: fuzzy set theory). Su idea fundacional consistió en considerar aplicaciones entre un dominio y un retículo como una generalización de la función característica de un conjunto, dando lugar a una nueva clase de conjunto (que incluye a los clásicos) que denominó *conjuntos borrosos* (fuzzy sets). La definición original de Zadeh fue:

> Un conjunto borroso A en un dado universo X es caracterizado por una función de pertenencia o característica $\mu_A(x)$ la cual asocia a cada elemento $x \in X$ un número real en el intervalo $[0, 1]$ (o en un conjunto parcialmente ordenado conjunto L), donde el valor $\mu_A(x)$ representa el "grado de pertenencia" de x a A.

En el contexto de la teoría de conjuntos borrosos, la lógica borrosa (FL) tuvo su nacimiento como un sistema lógico que sirviera como herramienta a la formalización del razonamiento con proposiciones vagas. A partir de allí, el término de lógica borrosa ha sido usado en dos diferentes sentidos: uno estricto y otro amplio.

En el sentido estricto la lógica borrosa, FL_e, es una extensión de la lógica multivaluada, donde la noción de "grado de pertenencia" de un elemento x de un universo X con respecto a un conjunto borroso A sobre X es asumido como el grado de verdad de la sentencia "$A(x)$" (usualmente leida como "x es A). Sin embargo, como los señala Zadeh en [Zad94], las motivaciones y los alcances de FL_e es completamente diferente de los que promovieron los sistemas de lógicas multivaluadas tradicionales, como por ejemplo las lógicas de Łukasiewicz. Él remarca que conceptos tales como variables lingüisticas, formas canónicas, reglas Si-entonces borrosas, cuantificadores borrosos, y modos de razonamiento como interpolativo, disposicional y silogismos aproximados, no son parte de los intereses cubiertos por los sistemas de lógicas multivaluadas tradicionales.

En el sentido amplio la lógica borrosa, FL_a, es casi sinónimo de teoría de conjuntos borrosos vista ésta como una teoría general para representar y razonar sobre "clases" o relaciones cuyos "límites definicionales" no son precisos. En este sentido la lógica borrosa incluye a la aritmética borrosa, la programación lineal borrosa, la topología borrosa, la teoría de grafos, y el análisis de grafos borrosos.

A lo largo del presente trabajo, consideraremos, en coincidencia con Hajek ([Háj98]), que el núcleo o base de una lógica borrosa en el sentido estricto es definible a través de un cálculo formal de lógica multivaluada . En ese sentido, en los últimos años, se han dedicado muchos esfuerzos para explicar, representar e incluir dentro de ese núcleo esas cosas que Zadeh llamaba aspectos "no-tradicionales". Así, por ejemplo, Pavelka propone extender una lógica multivaluada clásica por la inclusión de constantes de verdad $\bar{r}$ por cada elemento del retículo que sirve a nivel semántico para interpretar las fórmulas (ver [Pav79] o para un resumen [Pan95; Háj98]). Este enfoque permite representar sintáctica y explícitamente la verdad parcial de una fórmula y derivar consecuencias

desde premisas que sólo son parcialmente verdaderas. Varios autores tales como Hajek, Novak, Godo and Esteva (entre otros) han extendido el enfoque de Pavelka con el propósito de cubrir diferentes aspectos de la lógica borrosa tomada en el sentido amplio. Hajek y Godo in [HG97]) han mostrado la posibilidad de expresar o reducir reglas de inferencias borrosas (como modus ponens generalizado, proyección, max-min, etc.) como una noción de prueba en una lógica multivaluada y multiórdenes "clásica". Esteva y Godo han propuesto nuevas lógicas donde en una conviven y se combinan diferentes operadores lógicos tales como las conjunciones de Łukasiewcz, Gödel, Product y sus respectiva implicaciones definidas por residuación, y en otra las conjunciones de Gödel y Product coexisten con una negación involutiva (see [EG98] y [EGHN98]). También, es interesante mencionar los trabajos de Novak hechos en esa misma dirección (ver [Nov90]) entre los que podemos resaltar el que corresponde a tratar la inferencia interpolativa en una extensión de la lógica de Pavelka ([KN96]).

En síntesis, en nuestro trabajo, consideraremos a la vaguedad como un problema de interpretación y será formalmente superado por medio del uso de alguna clase de lógica multivaluada. Más aún, asumiremos que toda sentencia del lenguaje de representación le corresponde, al menos potencialmente, un valor de verdad. Como haremos notar a continuación, no siempre es posible determinar ese valor porque en general no tenemos (y/o no es posible tener) un conocimiento total (o una descripción completa) del mundo real.

Finalmente, es importante remarcar que, aunque la teoría de conjuntos borrosos puede ser usada para la formalización de un inferencia con incertidumbre como es la posibilística y para tratar de conciliar lógica e interpolación (como Dubois, Prade y Bezdek positivamente señalan en [DPB99] sobre la lógica borrosa en el sentido amplio), la lógica borrosa en el sentido estricto no se corresponde ni con lo uno ni con lo otro, i.e. ni con incertidumbre ni con interpolación.

El Problema de la Información Incompleta:

En la lógica clásica, hay una clara distinción entre la definición de verdad (tal como fue mencionado con anterioridad) y el criterio para reconocer esa verdad. En ese último sentido, la verdad de una conclusión C es a menudo definida en términos de una lista de argumentos Γ llamados premisas (también suele referirse a Γ con el nombre de base o teoría de conocimiento). Así, si toda interpretación que satisface a Γ (i.e. modelos de Γ) también satisface C solemos decir que en el contexto del conjunto de premisas la conclusión es verdadera. Por otra parte, la falsedad de C se establece si ninguno de sus modelos lo es además de Γ. En este último caso, decimos que C es falso en el contexto de Γ. Cualquier otra alternativa (como por ejemplo que sólo algunos, pero no todos, modelos de Γ son también modelos C) nos enfrenta con la incertidumbre sobre la verdad o falsedad de la conclusión. Por lo tanto, excepto en el caso que la teoría que describe nuestro conocimiento acerca del estado del mundo sea completo (o equivalentemente, un conjunto maximal consistente de fórmulas), es imposible determinar la verdad o falsedad de una fórmula cualquiera en el contexto de una teoría incompleta. Esa indeterminación será lo que denominaremos *el problema de la información incompleta.*

En la práctica, cualquiera que se haya enfrentado con la tarea tomar una decisión o hacer una predicción, sabe que usualmente no se cuenta con la suficiente información acerca del presente estado de situación como para llevar a cabo la tarea sin ningún margen de duda. Así, por una parte, eso lo pone frente al problema de aceptar que su capacidad predictiva está limitada. Por otra, lo obliga a abandonar la lógica clásica como formalismo de representación del conocimiento porque la misma lo condena a la "inacción".

Afortunadamente, no necesitamos tener un conocimiento omnisciente del mundo sino que algunas veces la información disponible es suficiente. Por ejemplo, el conocimiento respecto de las leyes de evolución de un sistema físico pueden ser útiles para afirmar que dado un gas ideal si conocemos de éste su presión y su temperatura entonces su volumen estará determinado por la ecuación $Vol = k\frac{Temp}{P}$. Por supuesto, si el gas es real el resultado de esa ecuación no es exacto. Por lo tanto, en el sentido estricto, no es posible conocer el volumen de un gas real al menos de

esa forma. O dicho en otros términos, esa clase de leyes precisas no son aplicables en un dominio práctico. Así, en el caso real debemos cambiar de paradigma. La mecánica estadística da una respuesta a este problema utilizando la teoría de probabilidades, entendida ésta como una teoría que tiene el propósito de capturar la incertidumbre. Como resultado de la aplicación de la teoría de la mecánica estadística para la predicción del comportamiento de los gases reales, una distribución de probabilidades sobre los valores que puede tomar el parámetro volumen es obtenida, tomada ésta como una medida (objetiva o subjetiva) de la confianza sobre la exactitud de un determinado valor de la propiedad física en cuestión (en nuestro ejemplo: el volumen). Otras teorías usadas para formalizar y cuantificar la incertidumbre son la teoría de posibilidad y la teoría de la evidencia.

En general, un modelo de incertidumbre asocia un número a una fórmula, el cual no indica un grado de verdad (como erróneamente algunos autores interpretan) sino un grado de confianza o creencia en el valor de verdad de la fórmula en cuestión. En ese sentido, la medida de incertidumbre compensa la falta de conocimiento a nivel proposicional con información de un mayor grado de abstracción. Sobre este punto es importante señalar la diferencia entre la vaguedad a nivel proposicional (como fue mencionado en el apartado anterior) y la vaguedad a nivel de modelos (como es el caso de la teoría posibilística). En el segundo caso, un grado de vaguedad es asociado a cada interpretación estimando la posibilidad que dicha interpretación pueda representar al estado del mundo real. En ese sentido, los grados de posibilidad y de necesidad en la lógica posibilística pueden ser entendidas como medidas de la incertidumbre producida como consecuencia de que sólo conocemos vagamente cuál es el mundo real. Sin embargo, a pesar de este vínculo que manifiesta que la vaguedad sobre las interpretaciones genera incertidumbre a nivel del lenguaje interpretado, la idea de que una fórmula vaga es completamente diferente a la idea de que una fórmula es incierta. Por ejemplo, tal como es mencionado en [DP88], si sólo se sabe que "Juan es alto" (i.e. tenemos un conocimiento vago sobre la altura de Juan) entonces sobre la verdad de la afirmación de que "la altura de Juan es 1.80 m" sólo se puede decir que es más o menos posible. Mas formalmente, Dubois y Prade en [DP91a] proponen entender a cada afirmación vaga del tipo "X is *Alto*" (donde *Alto* es un conjunto borroso de un universo de discurso U y X es una variable tomando valores en U) como una restricción sobre el desconocido o parcialmente conocida distribución de posibilidad de la afirmación precisa $X = x$ con $x \in U$ (en símbolos $\Pi(X = x) \leq \mu_F(x)$). Ese ejemplo sirve para destacar el hecho que información vaga e incompleta produce incertidumbre en las conclusiones. Ese mismo análisis pueden ser extendido a los valores de verdad borrosos de una sentencia borrosa, "X es aproximadamente $1.80m$" dado que "X is $Tall$ " es asumido como premisa y considerarlos como una distribución de posibilidad del grado de verdad de la primer sentencia con respecto a la segunda. Generalmente, una medida de compatibilidad π_τ definida vía el principio de extensión es usada para estimar esa medida de posibilidad:

$$\pi_\tau(t) = \begin{cases} \sup_u \{\mu_{Tall}(u) \mid \mu_{approx.1,8}(u) = t\}, & \text{si } \mu^{-1}_{approx.1,8}(t) \neq \emptyset \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Usando el principio de mínima especificidad, el cual dice que dado un conjunto de restricciones al valor de posibilidad de una variable o sentencia X, la distribución de posibilidad generada sobre los modelos π_X debería ser definida como el máximo grado de posibilidad alcanzable en cada model w de acuerdo con las restricciones, entonces es posible redefinir el valor de verdad borroso τ como:

$$\pi_\tau(t) = \begin{cases} \sup_{w \in W} \{\pi_X(w) \mid \mu_{approx.1,8}(u) = t \quad \text{y} \quad w \models (X = u)\}, & \text{si } \mu^{-1}_{approx.1,8}(t) \neq \emptyset \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Una primera aproximación a una formalización semántica de una lógica de valores de verdad borrosos fue dada en [EGG94b]. Los autores consideran modelos $\langle W^*, \pi \rangle$ dónde W^* es el conjunto de las interpretaciones multivaluadas sobre un leguaje proposicional $\mathcal{L}$ y π es una distribución de posibilidad sobre el conjunto W^* de mundos posibles, esto es, $\pi : W^* \mapsto [0, 1]$. En tal modelo, el grado de posibilidad de que el grado de verdad de una proposición p sea t, es estimado como:

$$\tau_{p/\pi}(t) = sup_{w \in W^*}\{\pi(w) \mid w(p) = t\}$$

el cual es muy similar al anterior.

Más recientemente, Hajek propuso [Háj00] una axiomatización para el caso particular en que el significado del valor de verdad borroso es "very true".

Para finalizar creemos importante rescatar los argumentos dados por Resconi, Klir y St. Clair [RKC92], afirmando que la incertidumbre es intrínsecamente una noción intensional o metateórica. Bajo ese argumento, ellos afirman que las lógicas modales proveen un marco de trabajo unificado para representar las diferentes teorías de incertidumbre (ver [RKCH93]). Más aún, la mayoría de ellas son naturalmente relacionadas con extensiones del sistema modal S4.3. Los ejemplos mas conocidos son las lógicas: probabilística de Carnap ([Car50]), posibilística ([FH91; KH94; LL96]) y de Dempster-Shafer ([Rus87]).

A modo de síntesis podemos decir que en el presente análisis asociaremos el término *incertidumbre* con un grado de creencia acerca de la verdad de una proposición. Formalmente, la incertidumbre será modelizada a través de un operador modal en una lógica intensional el cual no será veritativo funcional (ver Dubois y Prade en [DP88]).

El Problema de la Información Errónea:

En lógica clásica, si el conocimiento es falso entonces de él se derivará cualquier sentencia. Pero, en muchas ocasiones, se busca usar premisas "falsas", por ejemplo, cuando la Teoría Gravitacional de Newton es aplicada. Puesto que aunque esa teoría no es estrictamente verdadera, es una buena aproximación a la verdad. Remarquemos que no nos estamos refiriendo a teorías en si mismas contradictorias, sino empíricamente o factualmente falsas, i.e. teorías que explican adecuadamente la mayoría de las observaciones pero tienen contraejemplos. A primera vista, podemos tratar de medir la cercanía de una teoría a la verdad de acuerdo a la cantidad de contraejemplos. Respecto de esa mesura, es posible afirmar que hay buenas razones para conjeturar que la Teoría Gravitacional de Einstein (la cual tampoco es estrictamente cierta) es una mejor aproximación a la verdad que la respectiva Teoría de Newton.

En un sentido mas general, nos referiremos a la noción de que una sentencia sea o esté "próximo a la verdad" (aún cuando no sea verdadera o probable) como *verosimilitud*.

Popper hizo una observación que hecha luz sobre la distinción entre incertidumbre y verosimilitud, y creemos que vale la pena reproducirla aquí. Él señala que por usar la inferencia bayesiana para establecer el grado de creencia en una hipótesis h a partir de un conocimiento previo K mas cierta evidencia observada e, resulta que "... si la evidencia e contradice la hipótesis h entonces la probabilidad $P(h \mid e, K)$ de h dada e (en el contexto de K) es cero; aún cuando, h pueda ser altamente verosímil, puesto que una teoría aunque falsa puede ser 'cercana' a la verdad". Este argumento resalta la diferencia entre incompletitud y "falsedad" de una teoría. El primer concepto representa el fracaso de una teoría para expresar la omnisciencia (la verdad como un todo) y el segundo indica la aceptación de proposiciones que no sean verdaderas. Por ejemplo, un testigo en una corte que no miente pero tampoco revela algún hecho "relevante"[1], daría una información imcompleta. Por el contrario, si su testimonio es parcialmente verdadero, presentaría información falsa.

En un sentido mas pragmático, el concepto de verosimilitud aparece, por ejemplo, cuando se busca dar respuesta a una consulta hecha sobre una base de datos. Si ésta fuera comparada exactamente contra cada elemento de la base, seguramente que dispensaremos mucho tiempo en este chequeo. Pero, si permitimos que la comparación sea aproximada entonces es posible que

[1]Relevancia es una importante noción la cual no consideraremos aquí en profundidad, pero que debería ser tomada en cuenta en un análisis más detallado de la verosimilitud

ahorremos mucho tiempo. Obviamente, en el segundo caso, deberemos decir que la respuesta es próxima a la verdad. En este último sentido la noción de "aproximación" a la verdad puede ser directamente equiparada a la de error en un método de cálculo numérico.

Si aceptamos esa idea, estaremos en condiciones de afirmar que una sentencia es *casi verdadera*, *cercanamente verdadera* o *aproximadamente verdadera*, indicando por ello que es falsa o improbable pero cercana a la verdad. Así, continuando con nuestro ejemplo acerca de la altura de una montaña podemos asegurar que la afirmación "la altura del monte Everest es de 8.800 m" es cercana a ser verdadera [2]. Este concepto de "cercanía" a la verdad presupone la existencia de alguna métrica que nos permita expresar el grado de proximidad a la verdad.

Note que este último concepto es diferente de los dos anteriores: imprecisión e incertidumbre. El valor de verdad de nuestro ejemplo "la altura del monte Everest es de 8,800 m" es ciertamente falso y precisamente formulado, por lo tanto no es ni incierto ni vago.

La definición moderna de verosimilitud está basada en la noción de similitud y fue propuesta independientemente por Risto Hilpinen dentro de una semántica de mundos posibles (ver [Hil76]) y por Pavel Tichý en el contexto de una lógica proposicional (ver [Tic74]). La idea básica del enfoque basado en similitud, en ambos casos, es que el grado de verosimilitud de una sentencia φ depende de la similitud entre las situaciones o estados que son compatibles con φ y la situación o estado que describe al mundo real (ver [Nii87] p. 198). Así, la noción de verosimilitud puede ser vista como un concepto derivado del concepto mas primitivo de similitud. Por otra parte este último a menudo también es asociado con el razonamiento por analogía que es otra importante forma de inferencia no deductiva.

Este moderno enfoque de la verosimilitud da sustento a un tipo de razonamiento aproximado usualmente denominado razonamiento basado en similitud (un buen resumen de este modelo es presentado por Dubois y Prade en [DP94a]). A partir de modelar la noción de verosimilitud a través del concepto de similitud, podemos estudiar cuáles clases de relaciones de consecuencia lógica tienen sentido en esa asociación. Obviamente un primer operador de inferencia basado en similitud debería cubrir patrones tales como: "si φ es verdadero entonces ψ esta *cercano* a la verdad", en el sentido que, aunque ψ puede ser falso (o no probable), conociendo que φ es cierto podemos concluir que ψ está semánticamente cercana o similar a alguna otra proposición la cual si es verdadera. Nuevamente el hecho de que de ψ sólo podamos determinar que está cercana (o próxima) a la verdad, no tiene nada que ver con el problema del indeterminismo producto de la incertidumbre, i.e. con el problema de que por falta de información no es posible conocer si ψ es verdadera o falsa [DP95].

Por otro lado, el razonamiento basado en similitud ha alcanzado una importante relevancia en el contexto del razonamiento borroso en la última década. Originariamente, Zadeh propuso usar una medida de similitud (como una relación borrosa) en técnicas de categorización y clasificación ([Zad71]. Pero más recientemente, ha sido establecida la dualidad entre conjuntos borrosos y relaciones de similitud borrosas la cual a su vez genera otra dualidad entre razonamiento borroso y razonamiento basada en similitud. Esta dualidad es intrínseca, tal como señalan Klawonn y Castro [KC95], puesto que aún cuando la noción de similitud no sea la herramienta por la cual se interpreta a los conjuntos borrosos, uno no puede evitar los efectos de la similitud inherente a los conjuntos borrosos en el proceso del razonamiento borroso. Específicamente, ellos logran determinar para cada conjunto borroso cuál es la medida de indistinguibilidad asociada y prueban, por ejemplo, que en la regla de modus ponens generalizado no se obtienen conclusiones menos erróneas si buscamos satisfacer las premisas con información mas precisa que la que su grado de indistinguibilidad le permite discriminar.

[2] La altura del monte Everest certificada en una enciclopedia es de 8,835m

Desde un punto de vista lógico-formal, tres diferentes líneas de investigación son sostenidas por esta dualidad, de acuerdo a considerar que la similitud es definida entre mundos (modelos), proposiciones, o elementos de un universo del discurso.

A continuación mencionaremos brevemente y a modo de ejemplo, trabajos que se encuentran subscritos a cada uno de estos enfoques:

- El primero ha sido iniciado por Ruspini en [Rus91], donde presenta una caracterización semántica de los conceptos y operaciones de la lógica borrosa en términos de la noción de similitud, cercanía o proximidad entre estados posibles (**mundos**). Siguiendo las ideas de Ruspini, una familia de relaciones de consecuencia graduadas han sido propuestas y aplicadas al razonamiento basado en casos y al razonamiento interpolativo ([DEG+95; DEG+97; DEG+98]). En esos trabajos, la caracterización es estrictamente semántica. Justamente en esta tesis trataremos de ofrecer una representación sintáctica de dichos operadores.

- Ming-Sheng Ying presentó en [Yin94], un cálculo proposicional en el cual los valores de verdad de una sentencia son sólo verdadero o falso, pero que aún así el razonamiento puede ser aproximado debido que permite que el antecedente de una regla sea satisfecho en forma aproximada. Así, él busca dar una noción de prueba aproximada parecida a la que existe en el cálculo numérico donde, por ejemplo, podemos resolver un sistema de ecuaciones con mayor precisión con sólo continuar la búsqueda. En esa línea, Barcino y Gerla en [BG98] proponen generalizar las ideas de Ying, reduciendolas a una lógica borrosa en el estilo de Hilbert usando el esquema dado por Pavelka in [Pav79].

- Klawonn et al. han desarrollado métodos de interpolación para control borroso los cuales son modelados a través de relaciones de similitud entre elementos del dominio (ver [KK93; Kla94; Kla95; KC95; KGK95; KN96]). En esos casos, la noción de *extensionalidad* aparece como fundamental en sus estudios.

  Por otra parte y en forma independiente, Boixader y Jacas han propuesto modelos de razonamiento aproximado a través de ese mismo concepto de extensionalidad con respecto a un operador natural de $\otimes$-indistinguibilidad. Ellos consideran el grado de indistinguibilidad entre conjuntos borrosos como su grado de similitud ([BJ98]).

La mayoría de los trabajos mencionados arriba representan la noción de similitud como una relación de equivalencia borrosa, i.e. satisface reflexividad, simetría y una versión relajada de transitividad (de ella hablaremos con más detalle a lo largo de toda esta presentación). Sin embargo, una representación mas débil puede ser tomada en cuenta sin abandonar la noción de verosimilitud.

De ahora en más, y en concordancia con la propuesta de Niiniluoto ([Nii87]), consideraremos el valor de *verosimilitud* de una sentencia como su grado de "proximidad a la verdad", aún cuando ella no sea verdadera o probable. Ese grado vendrá dado por la "distancia" que separa los modelos de esa sentencia y los modelos de la "realidad". Desde un punto de vista de la lógica formal, los sistemas correspondientes a la verosimilitud son modelos de Kripke donde la relación de accesibilidad es una relación binaria borrosa que representa la medida de similitud entre modelos. Tal vez ese aspecto es la principal diferencia entre esos modelos de verosimilitud y aquellos modelos de incertidumbre que tienen una medida sobre los mundos en lugar de una relación binaria entre ellos.

En resumen, podemos decir que vaguedad, incertidumbre y verosimilitud, hasta hace pocos años, fueron nociones no claramente diferenciadas unas de las otras, posiblemente porque todas ellas fueron usualmente codificadas a través de números reales en el intervalo $[0, 1]$. Sin embargo, en los últimos años, un gran esfuerzo ha sido dedicado a clarificar sus diferencias conceptuales. Por ejemplo la distinción entre vaguedad e incertidumbre es exitosamente establecida en [BDG+99]. No obstante, la discriminación entre esas dos nociones y la de verosimilitud no ha sido claramente planteada en la literatura. Por ejemplo, Dubois y Prade en [DP91b] bajo el título "Approximate

truth y alternative views de graded truth", introducen varios ejemplos donde, en nuestra opinión, la implícita noción de verosimilitud es alternativamente confundida con vaguedad e incertidumbre. En [DPB99], Dubois, Prade y Bezdek identifican la lógica de similitud con una lógica no veritativa funcional que trabaja con sentencias vagas. Creemos que es útil remarcar sus discordancias, con el objetivo de establecer sus respectivas condiciones de uso y aplicabilidad al momento de representar el conocimiento y de razonar sobre el.

Destacamos la importancia de dejar claro los contextos de uso de cada una de esas tres nociones, vaguedad, incertidumbre y verosimilitud, porque pensamos que ellas constituyen los ejes básicos e independientes que permiten dar cuenta de cualquier otro modelo de razonamiento aproximado. Por otra parte, creemos que pueden ser formalizadas y combinadas bajo un mismo marco homogéneo y que en nuestra opinión este marco lógico-formal corresponde a extensiones modales de una lógica borrosa (tomada ésta en su sentido estricto). Varias propuestas han sido hechas en esa dirección. Por ejemplo,

- Zadeh en [Zad86] combina vaguedad y probabilidad sugiriendo la utilización de una distribución de probabilidades sobre las proposiciones borrosas.
- En [DP93], los autores reseñan y analizan extensamente las relaciones entre conjuntos borrosos y teorías de probabilidades que aparecen en la literatura. En ese trabajo, además de señalar las diferencias entre ellos, los autores establecen un puente entre ambas teorías, resaltando en ese contexto la importancia de la teoría de la posibilidad.
- En el trabajo de Hajek et.al. ([HGE95]) hay un intento de contribución a la construcción de esa conección. En este caso los autores proponen tres diferentes extensiones de la lógica de Łukasiewicz-Pavelka para tratar con funciones de probabilidad, necesidad y creencias, para dar cuenta de una lógica de probabilidades, de posibilidad y de Dempter-Shafer, respectivamente. La principal idea detrás de ese enfoque consiste en asumir que el grado de incertidumbre de una proposición puede ser reinterpretado como el valor de verdad de una proposición borrosa asociada a la proposición original (es importante señalar que si bien el artículo mencionado sólo trabaja con variables proposicionales que tienen una interpretación bivaluada, no hay ninguna hipótesis del mismo que impida extenderlo al caso de interpretaciones multivaluadas).

Siguiendo este último enfoque, la hipótesis de trabajo en lo que sigue de esta disertación será que todos los bien conocidos métodos de razonamiento aproximado pueden ser modelados dentro de una lógica borrosa extendida.

1.2 Objetivos de la Tesis

El principal propósito de esta memoria es presentar una formalización completa (sintáctica y semántica) del razonamiento basado en similitud de manera que la noción de similitud acepte interpretaciones más generales que la usual. En el contexto de nuestro trabajo entenderemos al razonamiento basado en similitud como un modelo de razonamiento aproximado que trabaja sobre la noción de verosimilitud, de la misma manera que otros modelos tratan con incertidumbre o con vaguedad. Nuestra primera tarea será justamente, clarificar la distinción entre el concepto de verosimilitud y aquellos de incertidumbre y vaguedad, para entonces proponer una caracterización semántica de la verosimilitud en términos de una relación de similitud borrosa. Para tal propuesta nos inspiraremos en las ideas que Ruspini presentó en [Rus91] y las plasmaremos en una estructura de modelo similar a la de Kripke, i.e. un modelo será una terna $\langle W, S, \models \rangle$, en la cuál W es un conjunto no vacío de mundos posibles, $\models$ representa una aplicación que a cada mundo posible le asigna una valoración de las variables proposicionales, y S es una relación borrosa sobre $W \times W$.

Paralelamente, mostraremos como la noción de verosimilitud puede ser interpretada a través de lo que daremos en llamar *aplicaciones de aproximación superior*, i.e, relaciones borrosa reflexivas

sobre el dominio de los mundos posibles. Además, atendiendo a la preponderancia que tienen los conjuntos borrosos normales en la modelización del razonamiento borroso, trataremos de caracterizarlos en términos de esas aproximaciones superiores. Luego usando ese vínculo, flexibilizaremos la definición clásica de consecuencia lógica, con el propósito de obtener diferentes familias de relaciones de consecuencia basadas en similitud, algunas de las cuales resultarán ser bien conocidas en la literatura. En particular nos concentraremos en *las relaciones de consecuencia aproximadas y de proximidad*, describiendo sus propiedades y completando su caracterización.

Paso seguido, nos impondremos el objetivo de capturar axiomáticamente esas dos relaciones de consecuencia. Para lo cuál utilizaremos dos enfoques, uno condicional y otro modal. Dentro de cada uno de ellos consideraremos dos estrategias una bivaluda pero con operadores múltiples y otra multivaluada pero con sólo dos operadores.

Luego, con el objetivo de conseguir un marco donde fuera posible representar y combinar en un mismo formalismo las nociones de verosimilitud, incertidumbre y vaguedad, extenderemos la caracterización semántica ya mencionada, permitiendo asociar interpretaciones multivaluada a los mundos. Esta nueva semántica será capturada con una lógica bimodal multivaluada.

Con el objetivo de poder presentar las relaciones de consecuencia lógica basadas en similitud en un contexto más abstracto que permita compararlas y ubicarlas en relación a otros modelos es que propondremos varias definiciones abstractas al estilo tarkiano de las consecuencias lógicas borrosas.

Finalmente, combinaremos los modelos de razonamiento basados en similitud con otros, tales como los contrafácticos y los nomonótonos. Completaremos nuestro trabajo formulando aplicaciones al Cambio y a la Actualización de Teorías de las medidas de similitud.

Resumiendo, los objetivos de esta memoria serán:

1. Recuperar la propuesta semántica de Ruspini y plasmarla de una estructura concreta como es la Kripke. Generalizar dicha semántica, en el sentido de no solo considerar el caso de una relación de equivalencia borrosa.

2. Marcar la diferencia, dentro del contexto de esta semántica, entre el razonamiento posibilístico y el basado en similitud.

3. Analizar dentro de la semántica propuesta diferentes relaciones de consecuencia graduada presentes en la literatura dando una interpretación que es extension natural de la clásica en términos de conjuntos difusos.

4. Establecer varias lógicas que capturen dicha semántica y describir las diferentes relaciones de consecuencias graduadas dentro de ellas.

5. Establecer un vínculo entre los nociones formales (sintácticas y semánticas) propuestas y otros enfoques de razonamiento basado en similitud como son los de Klawonn y Castro, y de Boixader y Jacas.

6. Establecer la relación entre las nociones de consecuencia graduada que surgen en el contexto semántico indicados en esta memoria y las nociones generalizadas de la consecuencia lógica en el contexto difuso.

7. Proponer modelos de razonamiento no-monótono y cotrafácticos, como así también de Cambio y de Actualización de Teorías, basados en similitud.

1.3 Trabajos Relacionados

Las relaciones borrosas reflexivas o, según nuestra denominación, *aproximaciones superiores* son una generalización de las bien conocidas relaciones de similitud borrosa definidas por Zadeh a fines de la década del sesenta ([Zad71]) como generalizaciones de las relaciones de equivalencia.

La mayor parte de los trabajos iniciales trataban de la aplicación de estas relaciones al análisis de agrupamientos (clusters). En la década de los ochenta, Trillas y Valverde vincularon las relaciones de similitud borrosa con las conectivas de equivalencia en lógica borrosa ([TV84]). En la década de los noventa este tipo de relaciones borrosas comenzó a ser utilizado con el fin de obtener una semántica de la lógica borrosa y para construir un marco lógico que permitiese tratar con sentencias como "cerca de φ", "no lejos de φ" o "similar a φ" siendo φ una proposición. En 1991 Ruspini publicó su semántica para la lógica borrosa basada en relaciones borrosas([Rus91]).

Sobre la base de este enfoque, Esteva, García y Godo definen en [EGG95] implicaciones graduadas que corresponden a diferentes clases de aproximación. En nuestro trabajo, estas clases de implicaciones graduadas son generalizadas mediante aproximaciones superiores en lugar de relaciones de similitud. Además, veremos que las aproximaciones superiores permiten interpretar las implicaciones graduadas como una extensión natural de las implicaciones clásicas. Todos estos elementos semánticos constituyen el núcleo de nuestro enfoque acerca del razonamiento por similitud que deseamos formalizar sintácticamente.

Para realizar esta formalización, propondremos dos enfoques diferentes: Condicional e Intencional. El propósito original de las lógicas condicionales era proveer una herramienta formal para el análisis del condicional subjuntivo en el lenguaje natural(véase [Nut80]). Más recientemente, se establecieron algunas conexiones entre las lógicas condicionales por un lado y el razonamiento no monotónico y la revisión de creencias por el otro (véanse [FHL94], [NC00]). Los sistemas condicionales propuestos por Lewis ([Lew73]) son los que más estrechamente relacionados están con nuestras ideas sobre el razonamiento basado en similitud. Exploraremos esta conexión en el último capítulo, donde estudiaremos una reformulación de la semántica de sistemas de esferas definidos por una medida de Consistencia e Implicación.

Las lógicas intensionales nuclean a los formalismos que incorporan operadores que reflejen "intensión", usualmente monáicos y casi siempre no veritativos funcionales. Por ejemplo, Aristóteles propuso una noción intensional para representar los futuros contingentes y Leibniz la propuso para caracterizar la noción moderna de necesidad. En general las lógicas intensionales se asocian a las modales y aquí las hemos distinguido para hacer más clara la presentación. Las lógica intensionales han recibido siempre mucha atención por parte de los filósofos y lógicos, y, desde la publicación de la semántica de Kripke ([Kri59a; Kri59b]), la noción de mundos posibles está inseparablemente asociada a esta lógica. En particular, en [EGG95] se presenta una teoría tipo modelo de Kripke de los operadores lógicos graduados de necesidad y posibilidad para modelizar el razonamiento basado en creencias.

A continuación, sintetizamos algunos de los antecedentes de cada una de nuestras formalizaciones sintácticas:

Enfoque Multimodal Condicional En [Lia98], Liau define lo que denomina *operadores de implicación residuada* $\overset{\alpha}{\Longrightarrow}$ and $\overset{\alpha^+}{\Longrightarrow}$ correspondientes a nuestro $\gg_\alpha$ y su contraparte estricta, respectivamente. Muestra cómo capturar la implicación aproximada y de proximidad propuestas en [DEG+95] mediante estos operadores de implicación. Sin embargo, sus consideraciones son puramente semánticas. Además, su motivación es diferente, porque él desea formular un sistema lógico en el que puedan ser combinados la incertidumbre cuantitativa y cualitativa. Según este autor, las teorías probabilística, de Dempster-Shafer y posibilística pertenecen a la primera clase de incertidumbre, mientras que los "rough sets" y las teorías no monotónicas pertenecen a la segunda clase. De hecho, sus operadores de implicación residuada pueden ser considerados generalizaciones graduadas de las relaciones posibilísticas cualitativas [Dub86].

En [LL96], se propone una lógica de la posibilidad condicional (CPL, sigla en inglés) basada en la regla condicional de Dempster, pero como no considera ninguna t-norma, la CPL solo es capaz de modelizar la implicación basada en similitud cuando la relación de similitud es min-transitiva. Además, aunque los autores exhiben en el apéndice un sistema axiomático para la CPL, no establecen el resultado de completitud. Mencionan que su principal dificul-

tad para poder obtener un resultado de completitud radica en la infinitud del lenguaje. Este problema es diferente del nuestro porque nosotros debemos considerar un lenguaje finito para axiomatizar las propiedades de simetría y disyunción a derecha.

Enfoque Condicional Multivaluado Este enfoque se inspira en el trabajo de Hájek et al. ([HGE00]), donde las medidas de incertidumbre de las proposiciones clásicas se interpretan como valores veritativos de algunas proposiciones borrosas asociadas a las clásicas. En particular, introducen el operador binario $P(|)$ cuya interpretación intencionada es en términos de probabilidad condicional, y formalizan la noción de probabilidad condicional usando la lógica ŁΠ. Consideran una estructura probabilística de Kripke $K = (W, \mu, \models)$ dónde W y $\models$ son como en nuestros modelos, y μ es una medida de probabilidad finitamente aditiva sobre el conjunto potencia de W. En su caso, no es necesario fijar $W = \Omega$, es decir, hacer que W sea igual al conjunto de todas las interpretaciones booleanas, porque demuestran que para cada estructura probabilística general de Kripke $K = (W, \mu, \models)$, existe una estructura particular $(\Omega_W, \mu^*, \models)$ que satisface las mismas fórmulas modales que K. En nuestro caso, un resultado similar es imposible porque podemos tener, en el caso general , dos mundos que satisfacen las mismas fórmulas proposicionales pero que poseen diferente similitud con el resto de los mundos y, por lo tanto, no pueden ser reducidos a uno solo que satisfaga las mismas fórmulas.

Enfoque Intencional Multimodal Las *Modalidades Graduadas* son una herramienta bien conocida en Filosofía y Computación. Varios autores, por ejemplo Goble [Glo70], Fine [Fin72], Fattorosi-Barnaba y De Caro [FD85], formulan operadores modales graduados $\Box_n$ (con $n \in N$) interpretados como "*hay más de (o por lo menos) n mundos accesibles tal que...*". Los lenguajes graduados con esta interpretación fueron aplicados a las áreas de lógica epistémica [HM92] y cuantificadores generalizados [HR91]. Pero aquí, adoptaremos un marco conceptual y características técnicas completamente diferentes de aquellos. Nuestro enfoque multimodal es más coherente con los trabajos realizados en el marco del razonamiento aproximado. En esta área, se propusieron varios sistemas de lógica modal para formalizar diversos tipos de modelos de razonamiento(véanse [HHE+94; FH91; HK94],etc.). A continuación, daremos una breve descripción de los trabajos más próximos al nuestro:

- En [LL92; LL95], Liau y Lin definen un sistema multimodal como el que presentamos aquí. Uno de los objetivo de ese trabajo es definir la relación de su sistema modal con la *lógica posibilística* y, por lo tanto, consideran modelos dónde la relación R sólo satisface la denominada propiedad *serial*, es decir, para todo $\omega \in W$, $\sup_{\omega' \in W} R(\omega, \omega') = 1$. Obviamente esta propiedad es más débil que la reflexividad, pero para modelizar la verosimilitud no parece significativo considerar relaciones que no sean reflexivas, ya que en ese caso la aplicación correspondiente podría ser tal que la aproximación p^* de una proposición p no contendría al conjunto $[p]$ de interpretaciones de p. En sus artículos, Liau y Lin proponen una Lógica Modal Cuantitativa (QML, sigla en inglés) con $G = [0, 1]$ y demuestran los siguientes resultados de completitud [3]:
  - El sistema axiomático **SK** consistente de PL, K^c, K^o, CO, OC, EX^c, EX^o, junto con las reglas de inferencia MP y RN^o es completo respecto de la clase de modelos Σ_0.
  - El sistema axiomático **SKD** = SK + D es completo respecto de la clase de modelos Σ_1.
  - El sistema axiomático **SKT** = SK + T^c es completo respecto de la clase de modelos Σ_2.
- En [Suz97], se introduce un trabajo muy interesante. Allí, Suzuki propone una semántica más general que la nuestra al considerar una función de accesibilidad borrosa parcial en

[3] Ver la sección 1.5 para caracterización de las clases de modelos

lugar de una función borrosa total, como en nuestro caso. También describe casi todas las familias de sistemas modales que proponemos aquí. Pero sólo formula una lógica de relaciones de similitud cuando éstas son min-transitivas. Además, únicamente establece resultados de completitud para los casos en que el rango de la función borrosa parcial es un subconjunto finito arbitrario de $[0,1]$. Más aún, la completitud fuerte no está disponible para el caso general. Sin embargo, pensamos que este trabajo es importante porque allí se presentan algunos resultados generales que son extensiones naturales de otros bien conocidos en la lógica modal clásica, como por ejemplo, la definición de F-filtración, el teorema de interpolación de Craig, etc.

- Finalmente, en [CF92] se propone otra lógica similar a la nuestra. Esta es denominada lógica graduada basada en retículos y contiene operadores modales $\Box_\alpha$ formados para todo α de una estructura reticular finita en lugar de nuestro conjunto enumerable G (i.e. $\{0,1\} \subseteq G \subseteq [0,1]$). Los autores adoptan una semántica que involucra a una familia de relaciones de accesibilidad R_α para cada α en el retículo(también llamado modelo multirrelacional en [FH91]). En el caso finito, mostraremos que, cuando las R_α son relaciones de equivalencia anidadas, su semántica es equivalente a la nuestra que utiliza relaciones de similitud.

Enfoque Intencional Multivaluado Han existido muchos intentos de mezclar la lógica multivaluada y la lógica modal, que obedecían a motivaciones muy diferentes. Desde el punto de vista semántico, estas lógicas aceptan valuaciones borrosas (multivaluadas) y/o relaciones de accesibilidad borrosas en un modelo de Kripke. En [Thi93] se proporciona un análisis de todas las semánticas alternativas. Como Thiele informa, existen diferentes modos de encarar el problema de cómo los valores de verdad de una fórmula p en dos mundos ω y ω' pueden combinarse con el "grado de accesibilidad" de ω' desde ω expresado en la forma $R(\omega,\omega')$. Por ejemplo, en [DPT88], los autores introducen e investigan las modalidades graduadas en busca de una lógica para la teoría posibilística. Sus ideas pueden introducirse del siguiente modo, para todo número real $\alpha \in [0,1]$ se proporcionan operadores modales $\Diamond_\alpha$ y $\Box_\alpha$ con la siguiente interpretación:

$$\begin{array}{lcl} \models_M (\omega, \Diamond_\alpha p) & = & \sup\{\models_M (\omega', p) \mid R(\omega,\omega') \geq \alpha\} \\ \models_M (\omega, \Box_\alpha p) & = & \inf\{\models_M (\omega', p) \mid R(\omega,\omega') \geq \alpha\} \end{array}$$

con $M = (W, R, \models_M)$, dónde $\models_M$ es una interpretación multivaluada, y $\omega \in W$. Nótese que si $\models_M$ es una interpretación booleana entonces las últimas definiciones se reducirían a aquellas dadas en nuestro enfoque multimodal. Más aún, es fácil verificar que ambos operadores son interdefinibles, es decir, $\Box_\alpha p = \neg\Diamond_\alpha\neg p$. En [Mor99], el autor desea formular una lógica modal S5 multivaluada modelando "rough sets" borrosos ([DP90; DP92b]) y asociar los operadores $\Diamond_\alpha$ y $\Box_\alpha$ con el α-corte de aproximaciones superiores e inferiores, respectivamente. Morikawa obtiene resultados de completitud para el caso en que el conjunto de valores de verdad es finito.

Otras alternativas surgieron de una generalización mas directa de las definiciones clásicas de necesidad y posibilidad. Es fácil ver que las definiciones clásicas son equivalentes a las siguientes:

$$\begin{array}{lcl} \models_M (\omega, \Diamond p) & = & \sup_{\omega' \in W}(R(\omega,\omega') \wedge \models_M (\omega', p)) \\ \models_M (\omega, \Box p) & = & \inf_{\omega' \in W}(R(\omega,\omega') \rightarrow \models_M (\omega', p)) \end{array}$$

donde los cuantificadores existencial y universal son interpretados por operadores supremo e ínfimo, respectivamente. Por lo general, la conjunción está asociada a una t-norma (p. ej. Gödel, Łukasiewicz o Producto), y la conectiva de "implicación" tiene dos posibles interpretaciones principales, ya sea como s-implicación o como implicación residuada.

Ying, en [Yin88], adopta la primer alternativa para representar un modelo de lógica modal

borrosa que utiliza el mínimo como t-norma y el máximo como t-conorma. Formula la siguiente condición de satisfacibilidad:

$$\begin{array}{lcl} \models_M (\omega, \Diamond p) & = & \sup \min(R(\omega,\omega'), \models_M (\omega', p)) \\ \models_M (\omega, \Box p) & = & \inf \max(1 - R(\omega,\omega'), \models_M (\omega', p)) \end{array}$$

También en este caso, la lógica es normal, y los operadores de necesidad y posibilidad son interdefinibles. Bajo esa semántica, en [Lia01], Liau propone una lógica modal borrosa híbrida la cual es presenta mediante reglas deductiva de Tableaux que demuestra correcta. Como en nuestro caso, un resultado de completitud queda pendiente.

La segunda alternativa es adoptada por Fitting (véanse [Fit91; Fit92; Fit95]). El autor desea modelizar el caso en que varios expertos, cada uno con su propia opinión sobre si una sentencia p es verdadera o falsa, y donde algunos dominan a otros, cooperan e interactúan para producir una solución común a un problema. La idea es representar el grado de acuerdo como un grado de verdad. Ningún acuerdo es falsedad, acuerdo total es verdad. La dominancia entre unos y otros se representa mediante la relación de accesibilidad, tal que, 0 indica independencia y 1 representa sumisión. Su lógica incluye constantes de verdad que son la contraparte sintáctica de los valores de verdad, pero se limita al caso en que el conjunto de valores de verdad es finito y la t-norma es min. Por lo tanto, su enfoque corresponde al caso finito de nuestra lógica $\mathbf{FM}(\min)$ (ver capítulo 5 para una definición).

Finalmente, debemos mencionar el trabajo de Hájek and Harmancová ([HH96]) como el enfoque más cercano de nuestra lógica $\mathbf{FM}(\mathbf{G}, Ł)$ (ver capítulo 5). Allí, los autores estudian una lógica modal sobre una extensión tipo Pavelka de la lógica de infinitos valores de Łukasiewicz (véanse [Háj95; Pan95]). Su lógica es la contraparte multivaluada del sistema clásico bien conocido **S5**. Proponen un sistema axiomático simple y elegante de su lógica y demuestran su completitud. Pero su semántica es menos general que la nuestra, porque toman modelos de Kripke de la forma $M = \langle W, \models_M \rangle$ e interpretan el operador de necesidad como:

$$\models_M (\omega, \Box p) \quad = \quad \inf_{\omega' \in W} (\models_M (\omega', p))$$

Nótese que esto es equivalente a adoptar una relación universal en nuestra semántica (i.e. $\forall \omega, \omega' : R(\omega, \omega') = 1$). A diferencia de nuestra semántica, ésta, que es mucho más simple, siempre resulta normal (es decir, el axioma **K** es válido).

Como comentario final señalamos que nuestro enfoque es diferente del propuesto por Gabbay en [Gab96] y [Gab97]. Allí, este autor propone un método de fibrado para construir lógicas borrosas modales. Se trata esencialmente de un método general para combinar dos lógicas, como por ejemplo la lógica de infinitos valores de Łukasiewicz Ł y la lógica modal normal K. El resultado de aplicar este método de fibrado es una semántica apropiada para la nueva lógica, aunque esta técnica no proporciona un modo (al menos no directamente) de obtener una axiomatización de la lógica combinada. Así, por ejemplo, los artículos mencionados de Gabbay no hacen comentarios acerca del hecho de que la lógica resultante $Ł_\infty(K(Ł_\infty))$ (una lógica que vuelve borrosas la asignación y la relación de accesibilidad) no es normal.

En los últimos años, se realizaron muchos trabajos dedicados a extender las nociones de operadores de clausura, sistemas de clausura y relaciones de consecuencia desde la lógica bivaluada a la lógica multivaluada. La definición más conocido de operadores de clausura multivaluados se debe a Pavelka [Pav79]. El autor define estos operadores (en el sentido estándar de Tarski [Tar56a]) como aplicaciones de conjuntos borrosos de fórmulas en conjuntos borrosos de fórmulas.

Por otro lado, Chakraborty extiende en [Cha88] el concepto de relación de consecuencia definiendo Relaciones de Consecuencia Graduada como relaciones borrosas entre conjuntos clásicos de fórmulas y fórmulas que satisfacen propiedades tales como reflexividad, monotonía y corte. En [Ger96] Gerla examina los vínculos entre los Operadores de Clausura Borrosa y las Relaciones de Consecuencia Graduada. Castro et al. señalan en [CTC94] que diversos métodos de razonamiento aproximado

en Inteligencia Artificial no se encuentran cubiertos por las Relaciones de Consecuencia Graduada e introducen un concepto más general de Relación de Consecuencia Borrosa.

La noción de sistemas de clausura en un retículo fue estudiada por primera vez por Ward [War42]. Murali en [Mur91] retorna a este concepto y establece algunos resultados acerca de los sistemas de clausura algebraicos e inductivos.

Más recientemente, Biacino y Gerla en [BG99] proponen un estudio de operadores de clausura en la teoría de conjuntos borrosos. En su trabajo, mencionan algunos conceptos como los operadores de clausura en un retículo, la noción de continuidad y lógicamente compacto para un operador de clausura y la relación entre compacticidad lógica y ultraproducto. Más aún, proporcionan un modo canónico de aplicar el principio de extensión de Zadeh a un operador de clausura clásico con el fin de obtener uno borroso. Así, dado un operador de clausura clásico C, su definición de *extensión canónica* C^* de C es:

$$C^*(A)(p) = \sup\{\alpha \in [0,1] \mid p \in C(A_\alpha)\}$$

para todo $A \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$ (dónde A_α es el α-corte de A). En el mismo sentido, proponen extender un sistema de clausura y una relación de consecuencia y analizan la correspondencia entre las tres extensiones canónicas. En este contexto, caracterizan la relación de consecuencia graduada de Chakroborty como asociada a un operador de clausura borrosa cuyos α-cortes son operadores de clausura clásicos (como fue señalado por Castro en [Cas94], para el caso general esto no es verdad). Finalmente, exploran una lógica de similitud desde un punto de vista abstracto y demuestran que el enfoque de Ying ([Yin94]) puede ser anidado en su lógica de similitud.

Respecto de la relación entre razonamiento no monotónico y razonamiento basado en similitud, no conocemos ningún trabajo, exceptuando el nuestro, que estudien el tema. Por el contrario si se conocen muchos trabajos dedicados a desarrollar diversos enfoques de razonamiento bajo: información incompleta, incertidumbre y conocimiento parcialmente inconsistente. Algunos de ellos son simbólicos y se basan en un marco lógico o en la programación lógica; otros tienen una orientación más numérica y utilizan probabilidades, funciones de creencias y plausibilidad, o posibilidades cualitativas. Aquí empleamos, como inspiración, los modelos basados en expectativas propuestos por Makinson y Gärdenfors [GM94]. Ese modelo se encuentra relacionado con la semántica basada en preferencias de la lógica no monotónica originalmente considerada por Shoham [Sho87; Sho88] e independientemente desarrollada por Makinson [Mak89], y Kraus, Lehmann y Magidor [KLM90]. La idea detrás de los modelos de preferencias es considerar que las preferencias de un agente pueden modelizarse mediante un orden parcial entre modelos o conjuntos de modelos (i.e. proposiciones). También, Makinson y Gärdenfors establecieron conexiones entre la lógica no monotónica y los mecanismos de revisión de creencias (véase también [GM91]), y entre ordenamientos de expectativas y relaciones de atrincheramiento (entrenchment) epistémico, que utilizaremos aquí.

Por otra parte, en [Sch97], Schlechta reduce la semántica de condicionales contrafácticos de Lewis y la semántica de preferencias de las lógicas no monotónicas a la noción de distancia. En nuestro trabajo, exploraremos este enfoque reduccionista empleando relaciones de similitud en lugar de distancias.

Finalmente, en [RS95], Ryan y Schoobbens proponen una aplicación de la noción de verosimilitud a la Teoría de Cambio. Pero a diferencia de la nuestra, su interpretación de dicha noción es cualitativa. Justamente, en nuestro trabajo la originalidad corresponde al enfoque cuantitativo.

1.4 Estructura de la tesis

La tesis se encuentra estructurada de la siguiente manera:

Capítulo 1: Primero, restringiremos el uso del término "sistema de razonamiento basado en similitud" a un sistema de razonamiento aproximado que formaliza la noción de verosimilitud. Luego, clarificaremos la distinción entre la noción de verosimilitud y las nociones de

incertidumbre y vaguedad, y describiremos las motivaciones generales de esta tesis.
Finalmente, en este capítulo, incluiremos todos los conocimientos previos necesarios y haremos mención de las investigaciones relacionadas.

Capítulo 2: Propondremos una caracterización de la verosimilitud en términos de aproximaciones superiores. Utilizaremos estas relaciones borrosas para extender la noción clásica de consecuencia lógica y para generar, de esta manera, diversas familias de consecuencia graduada, algunas de ellas ya mencionadas en la literatura. De esta manera, veremos como cada una de esas relación de consecuencia aplica la noción de verosimilitud, al considerar el grado de consecuencia de ψ dado un conjunto de fórmulas Γ como el grado de verosimilitud de ψ respecto de la información Γ.
Concluiremos este capítulo definiendo una semántica que será utilizada a lo largo de toda la tesis. Está se inspira en las ideas de Ruspini en [Rus91] y es capturada en una estructura de Kripke.

Capítulo 3: Luego de mostrar cómo puede caracterizarse la noción de verosimilitud mediante relaciones borrosas reflexivas sobre el conjunto de modelos, proporcionaremos una primera formalización sintáctica de las relaciones de consecuencia basadas en similitud mediante una lógica condicional. Propondremos dos clases de sistemas: multicondicional y multivaluado. En ambos casos presentaremos resultados de completitud para el caso de lenguajes finitos.

Capítulo 4: Dado que nuestros sistemas condicionales están restringidos a lenguajes finitos, y que nos gustaría evitar este supuesto, introduciremos una lógica intensional basada en un lenguaje multimodal. Luego de introducir la sintaxis, presentaremos una colección de sistemas modales. Se formulará una axiomatización para cada uno de ellos. También se presentarán resultados de correctitud y completitud. Luego compararemos nuestra lógica con la Lógica Posibilística.
A continuación mostraremos de qué manera es posible describir las relaciones de consecuencia graduadas antes mencionadas en nuestra lógica. Desde un punto de vista técnico, adaptamos los métodos clásicos de modelos canónicos para demostrar completitud, y los de filtrado para establecer la propiedad de modelo finito. La mayor parte de las contribuciones en este capítulo fueron publicadas en [RGG95b], [EGGR97], y [RGG98].

Capítulo 5: Con el objetivo de construir un marco general homogéneo dentro del cual representar y combinar las nociones de verosimilitud, incertidumbre y vaguedad con el mismo formalismo, propondremos una nueva lógica modal. Su semántica será una extensión de la mencionada más arriba, con el fin de permitir interpretaciones multivaluadas (asociadas con cada mundo). Su sintaxis será una extensión de la sintaxis definida en la lógica Racional de Pavelka con dos operadores modales. Nuevamente, se introducirán detalladamente varios sistemas modales y se formularán los resultados de correctitud y completitud. Finalmente, estableceremos la conexión entre la lógica multimodal y la lógica modal multivaluada. Técnicamente, uno de los puntos principales aquí es la utilización y adaptación de la teoría de correspondencia entre la lógica modal y la lógica de primer orden. Este capítulo elabora y generaliza las ideas contenidas en [GR99].

Capítulo 6: Analizaremos y compararemos las relaciones de consecuencia basadas en similitud con otras relaciones de consecuencia del razonamiento aproximado. Debido a la diversidad de las formas de razonamiento aproximado desarrolladas en Inteligencia Artificial, la pregunta que surge naturalmente es la de si podemos discernir algún patrón en esta diversidad, esto es, si existen características razonablemente generales que nos puedan ayudar a comprender cuáles son sus similitudes y sus diferencias. Para responder esta pregunta, debemos considerar una noción abstracta de consecuencia que nos ofrezca un marco general dentro del cual realizar el análisis y la comparación. Con este propósito, resumiremos las nociones

de operadores de clausura borrosa, sistemas de clausura y relaciones de consecuencia borrosa formulados por diferentes autores. Luego introduciremos una nueva clase de operadores de clausura borrosa que completan, generalizan y unifican los operadores previos. A continuación definiremos la axiomática de los diferentes operadores de clausura borrosa y relaciones de consecuencia borrosa, sus interrelaciones y los sistemas de clausura asociados a cada uno, mediante varios teoremas de representación. Finalmente, mostraremos que estas definiciones capturan algunas Relaciones de Consecuencia usuales usadas en el Razonamiento Aproximado, como las Relaciones de Consecuencia Aproximada y de Proximidad, el Operador de Inferencia Natural, la extensión canónica del operador de clausura clásico, y las lógicas con premisas aproximadas. Los resultados de este capítulo fueron publicados en forma abreviada en [REGG99] y [REGG00].

Capítulo 7: Hasta ahora, sólo hemos descrito y considerado sistemas de razonamiento basados en similitud que satisfacen la propiedad monotónica, esto es, si $T \subseteq T'$ son dos conjuntos de fórmulas y ψ es una fórmula, entonces el grado de verosimilitud de ψ respecto de T' es mayor que (o igual a) su grado respecto de T. Sin embargo, si T y T' contienen información con diferentes valores de confianza o fiabilidad, bien podría ocurrir que aceptemos la cercanía de ψ a T, pero una nueva fórmula en T', agregada a T, puede contradecir las bases que nos llevaron a considerar que ψ era cercana a T. Por lo tanto, si se considera la nueva fórmula más fiable que la antigua razón para sostener la cercanía de ψ, no necesariamente continuaremos aceptando ψ con el mismo grado de proximidad que antes.

De esta manera, con el objetivo de explorar una versión no monotónica del razonamiento basado en similitud, seguiremos algunas de las ideas de Schlechta en [Sch97]. Allí, reduce la noción de razonamiento no monotónico a la noción de distancia. Aquí, proponemos la posibilidad de considerar la similitud, en lugar de la distancia, como la noción central mediante la cual definir operadores de revisión de teorías y razonamiento no monotónico. En este sentido, estudiaremos sistemas de esferas definidos por medidas de consistencia e implicación. Finalmente, relacionaremos esos sistemas de esferas con el ordenamiento entre fórmulas à la Gärdenfors y Makinson.
Las contribuciones principales de este capítulo fueron publicadas en [RGG95a], [RGG96] y [GR00]

Capítulo 8: Concluimos nuestra tesis resumiendo las contribuciones principales, enumerando cuáles son los problemas abiertos remanentes más interesantes, y describiendo los temas de investigación que serán encarados en el futuro inmediato.

1.5 Semántica utilizada

Como ya fue mencionado y justificado en la introducción del presente capítulo, la interpretación que daremos de la noción de verosimilitud será en términos de una relación de similitud borrosa entre modelos. Cabe preguntarse entonces cual será la estructura de modelo que represente formalmente ese esquema de interpretación. Como se sabe hay muchas teorías de modelo alternativas, la mayoría de las cuales utiliza el concepto kripkiano de mundo posible. Las más conocidas son la de modelo relacional ([Kri59b], la de modelo con función de selección ([Lew73]) y la de modelo de vecindad ([Mon74]). Las dos primeras semánticas son equivalentes y por eso prescindiremos de la segunda hasta el capítulo 7 cuando mencionemos los sistemas de esferas. El tercero permite la modelización de lógicas no normales, la cual abordaremos lateralmente en el Capítulo 5. Aquíi, nos decidiremos por la formulación relacional de Kripke como estructura semántica por resultar la más natural al incluir explícitamente una relación entre mundos. Por lo tanto, en el resto del trabajo consideraremos una estructura de modelo relacional $M = \langle W, R, \models_M \rangle$ (común a todos los capítulos) donde W será el conjunto de mundos posibles, R será una L-relación borrosa sobre W, i.e. $R : W \times W \mapsto L$ donde L es un retículo, y $\models_M$ estará definida como una función

con dominio $W \times Prop$ y rango $\{0,1\}$, en el caso bi-valuado, o como una función con el mismo dominio pero con rango en L en el caso multivaluado. En ambos casos, $\models_{\mathcal{M}}$ indicará, para cada mundo, una asignación de valores de verdad para las variables proposicionales ($Prop$) del lenguaje $\mathcal{L}$. La relación borrosa R corresponderá a la medida de aproximación mencionada en los párrafos anteriores, de aquí la razón para elegir la semántica relacional. En algunos casos serán consideradas algunas restricciones o condiciones particulares sobre esta estructura. Por ejemplo a veces se pedirá que el retículo L esté provisto de una operación interna $\otimes$, o será restringido a una cadena $\{0,1\} \subseteq G \subseteq [0,1]$, y en otras oportunidades se establecerá que el conjunto W sea finito o que quede fijado en el conjunto de todos los modelos booleanos de un lenguaje $\mathcal{L}$.

En los diferentes capítulos tomaremos en consideración las siguientes clases de modelos[4]:

$$
\begin{array}{lcl}
\Sigma_0^L & = & \{\langle W, R, \models\rangle \mid R \text{ es una relación borrosa } \}, \\
\Sigma_1^L & = & \{\langle W, R, \models\rangle \mid R \text{ es una relación borrosa serial}\}, \\
\Sigma_2^L & = & \{\langle W, R, \models\rangle \mid R \text{ es una relación borrosa reflexiva } \}, \\
\Sigma_3^L & = & \{\langle W, R, \models\rangle \mid R \text{ es una relación borrosa reflexiva y simétrica } \}, \\
\Sigma_4^L & = & \{\langle W, R, \models\rangle \mid R \text{ es una relación borrosa reflexiva y } \otimes\text{-transitiva } \}, \\
\Sigma_\otimes^L & = & \{\langle W, R, \models\rangle \mid R \text{ es una relación de } \otimes\text{-similitud}\}.
\end{array}
$$

siendo L un conjunto recursivamente enumerable y $\otimes$ una operación cerrada en L.

Además, usaremos los símbolos Σ_i^{L+} y Σ_{if}^L para denotar la subclase de Σ_i^L ($i \in \{1,2,3,4,\otimes\}$) donde la relación borrosa es además de separación, y cuando el conjunto de mundos es finito, respectivamente. Como es obvio, tendremos que $\Sigma_0^L \supseteq \Sigma_1^L \supseteq \Sigma_2^L \supseteq \Sigma_3^L, \Sigma_4^L \supseteq \Sigma_\otimes^L$ y por lo tanto, sus correspondientes conjuntos de fórmulas válidas satisfacerán la inclusión inversa.

[4]Como se mencionará en el apartado 9.4 esta clase de modelos recibe el nombre mas apropiado de *marco*

Capítulo 2

Aproximaciones Superiores y Consecuencias Graduadas.

En este capítulo, propondremos una familia de medidas de proximidad que llamaremos aproximaciones superioriores y que serán más generales que las bien conocidas funciones de similitud. Demostraremos que esta familia tiene una correspondencia biunívoca con los conjuntos borrosos normalizados. Utilizando estas medidas de proximidad, presentaremos varias nociones de consecuencia graduadas que resultarán extensionales respecto de la clásica. Finalmente, daremos algunos ejemplos del uso de esas nociones de consecuencia graduada aplicados al razonamiento en casos y a interpolación.

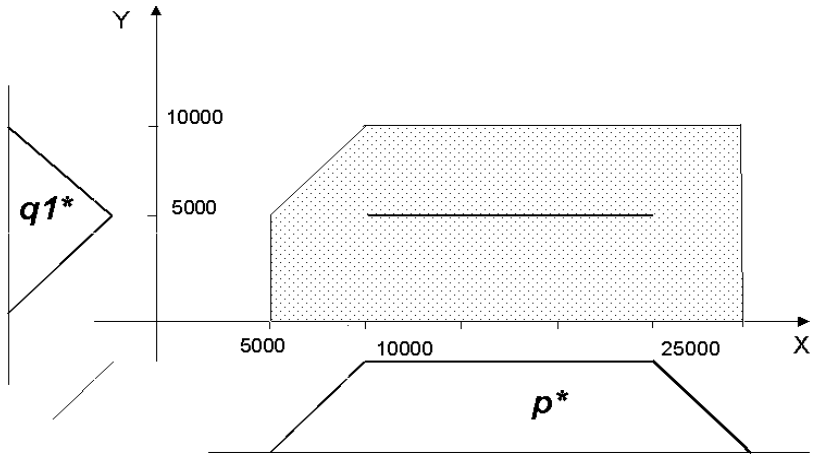
2.1 Un Ejemplo motivador:

Para fijar algunas ideas generales sobre cual es el tipo de razonamiento que pretendemos caracterizar, consideremos el siguiente consejo de un experto en finanzas para pequeños inversores:

Si Ud. tiene ahorrados entre \$ 10.000 y \$ 25.000	(p)
entonces	
Ud. debería reservarse \$ 5.000	$(q1)$
e	
invertir el resto de su capital en la Bolsa	$(q2)$

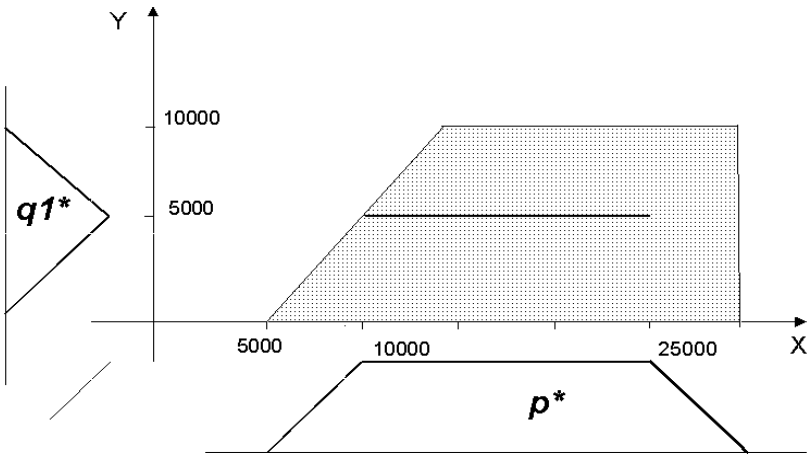
Supongamos además que el monto mínimo de inversión en Bolsa es de \$ 5000 (T) y que tan sólo se dispone de \$ 9.500 (p'). Considerando el auge de las inversiones bursátiles, nadie esperaría ahorrar los \$ 500 faltantes para aceptar el consejo e invertir parte de sus ahorros. En tal sentido, el eventual inversor tomaría la decisión de asumir el riesgo de conservar una suma menor de dinero como resguardo y colocar el resto en la Bolsa. Sería de esperar que se minimizara haciendo que el monto de la reserva q' esté tan cercano al sugerido $q1$ como p' lo esté de p. Obviamente, en este caso la noción de cercanía viene dada por la estructura métrica con que está equipada la unidad monetaria. Ahora bien, usando un modelo de razonamiento clásico, esta pequeña toma de decisión no puede ser modelada, puesto que $p' \not\models_T p$ y por lo tanto $p' \wedge [p \rightarrow (q1 \wedge q2)] \not\models_T q1$.
Cabe preguntarse entonces qué tipos de modelos de razonamiento necesitamos, y qué propiedades son razonables requerir de éstos. La intuición indicaría que si bien de p' no se deduce clásicamente p, no está lejos de hacerlo, y por lo tanto sería deseable disponer de una "medida" que nos permitiera establecer en que grado una proposición deduce otra. Por otra parte, sería esperable también que las reglas que modelizan consejos como el de nuestro ejemplo sean flexibles y robustas en el sentido que me aseguren que estando próximo a satisfacer sus precondiciones estaremos próximos

a satisfacer sus poscondiciones.
Volviendo al ejemplo, supongamos que nuestro lenguaje además de las proposiciones clásicas, cuenta con sólo tres variables X, Y, Z que representarán el dinero disponible, el de resguardo y el de inversión, respectivamente. Asumamos además, que disponemos de un conjunto de constantes $0, 1, 2, ..., 1000, 1001, ..., 2000, ...$ que corresponden a montos de dinero y expresiones del tipo $X = x$ o $Y = y$ o $Z = z$ tales que x, y, z son una de las constantes anteriores. Si cada modelo es restringido a aceptar un único valor de instanciación para las variables X, Y y Z, entonces podemos considerar dichos valores como una forma de indexación de los modelos, i.e. podemos interpretarlos como puntos de un espacio tridimensional con ejes (X, Y, Z). Note que la regla propuesta establece dependencias entre los valores que pueden tomar esas tres variables, como por ejemplo que $Z = X - Y$. Supongamos ahora que a cada proposición clásica le asociamos una proposición borrosa que es a su vez caracterizada por un conjunto borroso de modelos cuyo núcleo es el conjunto de modelos de la proposición original. Así, podemos graficar el plano de modelos proyectados sobre (X, Y), donde tiene influencia la parte $p \to q1$ de la regla de nuestro ejemplo, como sigue:



dónde las funciones graficadas (por debajo y en el costado izquierdo) representan los conjuntos borrosos de modelos asociados a las proposiciones borrosas p^* y $q1^*$, que tienen como núcleo los modelos de las proposiciones clásicas p y $q1$, respectivamente. La línea en el centro del gráfico representa los modelos donde la regla es verdadera, i.e. los mundos donde \$ 10.000 $\leq X \leq$ \$ 25.000 y $Y =$ \$ 5.000 satisfacen plenamente a la regla. En cambio cada modelo que aparece en la parte sombreada (representados por $Y \leq X$, \$ 5.000 $\leq X \leq$ \$ 30.000 y \$ 0 $\leq Y \leq$ \$ 10.000) la satisface parcialmente, en un grado que depende de cuan alejado esté del núcleo (la línea en el centro). Finalmente los modelos que aparecen en la zona blanca no satisfacen la regla.

La restricción de inversión mínima condiciona aún más la satisfactibilidad y algunos modelos de la parte sombreada dejan de ser aceptables y el gráfico anterior queda como sigue:



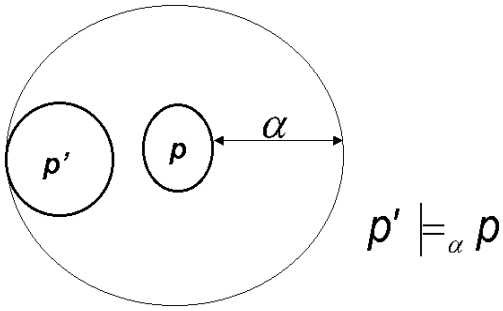
En una situación como la planteada, donde sólo contamos con un monto de dinero entre \$ 5.000 y \$ 10.000, la flexibilización de la regla significa encontrar una interpretación más permisiva que cubra a la familia de reglas: "Si X = \$ 10.000 entonces Y = \$ 5.000", "Si X = \$ 9.999 entonces Y = \$ 4.999", "Si X = \$ 9.998 entonces Y = \$ 4.998" y así siguiendo. Nuestra idea es emular esta familia con un mecanismo que sea representacional y computacionalmente más económico, teniendo en cuenta que tan cercano como esté el dinero que disponemos a los \$ 10.000, lo estará la reserva que tomaremos a los \$ 5.000. Esta idea lleva implícita la suposición que estamos buscando satisfacer lo más posible la regla de inversión y en tal sentido no será esperable ni deseable una inverción, por ejemplo, del total de los \$ 9.500. Lo que en definitiva señala nuestro ejemplo es la necesidad de una noción de consecuencia más débil que la clásica pero conservativa respecto de ella, es decir una noción que nos permita realizar las inferencias usuales en una lógica clásica y más. Además el ejemplo resalta el rol que para nosotros jugará el concepto de cercanía en el tipo de razonamiento a modelar.

En términos más precisos, el patrón inferencial que pretendemos caracterizar será uno denominado *silogismo extrapolativo* y que puede ser esquematizado de la siguiente manera:

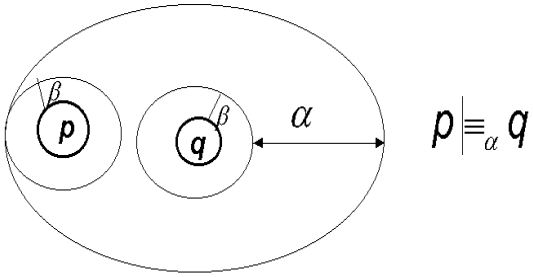
p	es *cercano* a ser verdadero	
p	*aproximadamente* implica	q
q	*no está lejos* de ser verdadero	

donde *cercano*, *aproximadamente* y *no está lejos* son expresiones relativas a una noción de medida, mientras p y q son proposiciones clásicas.

En nuestro ejemplo aparecen involucradas dos nociones diferentes de inferencia aproximada. Por un lado buscamos determinar que p es aproximadamente verdadero a partir de conocer p'. Para modelizarlo, una idea es utilizar una medida entre modelos que nos permita dar cuenta del grado de proximidad de la proposición p a la p'. En una primera instancia podríamos decir que p' deduce a p en grado α si podemos garantizar que todo modelo de p tiene algún modelo de p' a una "distancia" menor o igual que el valor α. Gráficamente eso sería:



Por otro lado buscamos que las reglas nos garanticen en algún grado α, que la cercanía en la satisfacción de las premisas se corresponda con cercanía en la satisfacción de las conclusiones. Gráficamente podría representarse de la siguiente forma:



Nótese que esta noción de consecuencia es más fuerte que la anterior dado que no sólo pide que los modelos de p sean α-cercanos a los modelos de q, sino también que todo modelo β-cercano a p deberá ser α-cercanos a los β-cercanos modelos de q, para cualquier β.

Estas dos nociones de inferencia son también las que aparecen involucradas en el silogismo extrapolativo y serán las que analizaremos, formalizaremos y compararemos, a lo largo de todo nuestro trabajo.

2.2 Similitud y Conjuntos Borrosos

Una de las posibles semánticas de los conjuntos borrosos es en términos de similitud (ver [EGG94b]), especificando el grado de pertenencia de un elemento a un conjunto borroso como el grado de proximidad entre él y los casos paradigmáticos o prototípicos del conjunto dado.
Con esa idea en mente, en [Nii87] pag.143, una noción de conjunto borroso es presentada como una definición extensional al estilo de Zadeh pero donde los grados de membrecía corresponden a grados de similitud o indistiguibilidad respecto a los casos más paradigmáticos. Más específicamente, Niiniluoto supone que un concepto vago Φ es representado por un conjunto de casos paradigmáticos $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ en un universo U y una medida S para establecer el grado de similitud entre elementos de U. Entonces cada elemento ψ de U tiene un grado $\mu_\Phi(\psi)$ de pertenencia a la extensión de Φ. Más aún, él señala que es muy natural tomar los valores de la función $\mu_\Phi(\psi)$ como:

$$\mu_\Phi(\psi) = \sup_{i=1,\ldots,n} S(\psi, \varphi_i)$$

Niiniluoto no va más allá en su propuesta, y no presenta ni definiciones formales ni condiciones sobre la función de similitud S.

La misma idea (pero más sofisticada) es usada por Klawonn en [Kla94] (ver también [KN96]). Allí, el autor considera el problema de interpolación borrosa de una función $f : X_1, \times, \ldots, \times, X_n \mapsto$

Y por medio de un conjunto F de valores de entrada-salida, i.e., $F = \{x_1^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}, y^{(i)} \mid f(x_1^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}) = y^{(i)} (i = 1, \ldots, r)\}$.

Los elementos de F, que podrían ser dados por un experto o corresponder a datos experimentales, son tomados como prototipos. Para cada conjunto prototípico P de un dominio D y dada una relación borrosa S_D sobre cada dominio (donde D será o bien X_1, o bien X_2 o bien ..., o X_n, o Y), se define un conjunto borroso como: $\mu_P(x) = \sup\{S_D(x,p) \mid p \in P \subseteq D\}$. Con esas funciones de pertenencia, él busca obtener el valor y de la función f para una tupla $(x_1, \ldots, x_n)$ basada en la hipótesis que, si tanto x_1 y $x_1^{(i)}$, como x_2 y $x_2^{(i)}$, y así siguiendo hasta x_n y $x_n^{(i)}$ son todos muy similares, entonces es razonable elegir como valor y, uno que sea muy similar a $y^{(i)}$ (donde $i = 1, \ldots, r$). Esa idea es expresada por la siguiente ecuación:

$$\mu^{salida}(y) = \max_{i \in \{1,\ldots,r\}} \{\mu_i^{salida}(y)\}$$

donde

$$\mu_i^{salida}(y) = \min\{\mu_{x_1^{(i)}}(x_1), \ldots, \mu_{x_n^{(i)}}(x_n), \mu_{y^{(i)}}(y)\}$$

Esta formulación da una interpretación del conocido método de Mandani ([Man77]) y considera cada par entrada-salida como un elemento de una relación y la función de membrecía $\mu^{salida}(y)$ corresponde a un grado de compatibilidad entre esos elementos y el formado por la nueva entrada y la salida y. Este punto nos permitirá después señalar una importante diferencia con muestro enfoque.

Ambos ejemplos muestran como la noción de similitud puede ser usada para dar cuenta de la indistinguibilidad entre objetos de un dominio U y como a través de esta puede definirse funciones de pertenencia a la Zadeh. Pero tal como lo señalan Castro y Klawonn en [KC95], la relación entre similitud y conjuntos borrosos es aún más imbricada. Ellos demuestran que aún cuando las medidas de similitud no sean el medio a través del cual se definan los conjuntos borrosos, hay una indistinguibilidad inherente a cada conjunto borroso que es imposible salvar a la hora de utilizarlos en razonamiento aproximado. De hecho, ellos logran determinar para cada conjunto borroso cual es la medida de indistiguibilidad asociada y que rol juega al momento de hacer procesos inferenciales. Estos resultados, vienen a demostrar que la noción de similitud no sólo es una buena herramienta para describir conjuntos borrosos, sino que es imprescindible para tal descripción.

Muchos autores están de acuerdo en considerar a las relaciones de la equivalencia borrosa como la forma natural de representar la indistinguibilidad. Esa elección es justificada por el teorema de representación de Valverde.

Teorema 2.1 *([Val85]) Una relación binaria borrosa S, definida desde pares de elementos de un universo U a elementos de un reticulado L, es una relación de equivalencia borrosa si y sólo si existe una familia H de conjuntos borrosos en U tal que*

$$S(u,u') = \inf_{h \in H} \{\min((h(u) \otimes\!\rightarrow h(u')), (h(u') \otimes\!\rightarrow h(u)))\}$$

para todo u y u' en U. Cada conjunto borroso $h \in U$ es llamado un generador de S.

Así una relación de equivalencia borrosa S nos permite definir un conjunto borroso normalizado A^* de elementos *cercanos* a $A \subseteq U$ de la siguiente manera:

$$\mu_{A^*}(u) = \sup_{u' \in A} S(u,u').$$

Recíprocamente, de cualquier conjunto borroso normalizado Φ en U se puede derivar una relación de equivalencia borrosa S y un subconjunto clásico no-vacío Φ_c tal ese

$$\Phi_c = \{u \mid \mu_\Phi(u) = 1\}, \text{ y}$$
$$S(u,u') = min(\mu_\Phi(u) \otimes\!\rightarrow \mu_\Phi(u'), \mu_\Phi(u') \otimes\!\rightarrow \mu_\Phi(u)).$$

Este resultado justifica formalmente la idea de que un grado de pertenencia de un elemento a un conjunto borroso $\mu_\Phi(u)$ puede ser interpretado como el grado de similitud entre u y los *prototipos* de Φ representados en el conjunto Φ_c, i.e., $\mu_{\Phi_c*}(u) = \sup_{u' \in \Phi_c} \min(\mu_\Phi(u) \otimes\!\!\rightarrow \mu_\Phi(u'), \mu_\Phi(u') \otimes\!\!\rightarrow \mu_\Phi(u)) = \sup_{u' \in \Phi_c}(1 \otimes\!\!\rightarrow \mu_\Phi(u)) = \mu_\Phi(u)$. Es importante señalar que, tal como fuera probado en [EGG94b], si a partir de un conjunto clásico A y una $\otimes$-similitud S se define un conjunto borroso A^* y desde este último se intenta obtener una relación de $\otimes$-similitud S' según la formulación anterior, entonces la resultante S' será más general que la original (i.e., aumenta el grado de indistinguibilidad, $\forall \omega, \omega' : S(\omega, \omega') \leq S'(\omega, \omega')$)

No obstante, en esta tesis, nos proponemos ser lo más generales posible y por esos utilizaremos funciones más débiles que las de equivalencia borrosa. Justamente la próxima proposición nos marca un límite para ese debilitamiento.

Proposición 2.1 *Un conjunto borroso $\Phi \in U^L$ es normal si y solamente si existe un conjunto $\Phi_c \neq \emptyset$ (representando el núcleo de Φ) y una relación borrosa reflexiva $R : U \times U \longmapsto L$ tal que*

$$\mu_\Phi(u') = \sup\{R(u', u) | u \in \Phi_c\}$$

Prueba: Para verificar la proposición en el sentido de derecha a izquierda es suficiente chequear que μ_Φ es una función. Pero eso es trivial.
Para probar la otra dirección, sólo es necesario elegir $\Phi_c = \{u \mid \mu_\Phi(u) = 1\} = \{\Phi\}_1$ (i.e., el 1-corte de Φ) y

$$R(u', u) = \begin{cases} 1 & Si\ u' = u \\ \mu_\Phi(u') & Si\ u \in \Phi_c \\ \alpha_{u',u} \in L & Si\ u \notin \Phi_c \end{cases}$$

donde $\alpha_{u',u}$ puede ser cualquier valor arbitrario en el reticulado L. □

Nótese que en general, si a partir de una relación borrosa reflexiva obtendremos un conjunto borroso, a partir de este no podemos recuperar la relación que lo generó. A lo sumos si elegimos $\alpha_{u',u} = 1$ en la construcción anterior, podremos garantizar que la obtenida en segundo término es menos específica que la original. De ahora en adelante, y debido a nuestro interés en caracterizar patrones inferenciales extensionales de los clásicos, concentraremos nuestra atención en conjuntos borrosos normales con los modelos de la lógica proposicional clásica como universo del discurso. En ese contexto el último teorema señala que si Γ es un conjunto de proposiciones en el lenguaje proposicional $\mathcal{L}$, del cual Ω es su conjunto de interpretaciones booleanas, entonces una relación reflexiva borrosa induce un conjunto borroso $[\Gamma]^*$, donde $[\Gamma]$ denota el conjunto (clásico) de los modelos de Γ (el conjunto de interpretaciones donde Γ es verdadero). Nosotros podemos asociar al conjunto $[\Gamma]^*$ la proposición borrosa Γ^*. Intuitivamente Γ^* significa *aproximadamente* Γ, o *no lejos de* Γ, donde "aproximadamente", "no lejos de" es matemáticamente expresado por la relación reflexiva borrosa R. Notar que esta noción de "proximidad" no es un morfismo respecto de todos los operadores lógicos. Por ejemplo en el caso de la intersección, *aproximadamente* $\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2$, en el sentido de $[\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2]^*$, no es necesariamente equivalente a *aproximadamente* Γ_1 *y aproximadamente* Γ_2, en el sentido de $[\Gamma_1]^* \bigcap [\Gamma_2]^*$. De aquí en más, $\hat{\Omega}$ denotará al conjunto de conjuntos de fórmulas en $\mathcal{L}$ cuyos elementos, $\hat{\omega}$, serán maximalmente consistentes.

2.3 Conjuntos borrosos, Consistencia y Consecuencia Graduadas

En esta sección, la noción de relación de consecuencia clásica es extendida haciendo uso de la teoría algebraica de los conjuntos borrosos sobre el universo de modelos booleanos Ω. Clásicamente, se dice que un conjunto de fórmulas Γ deduce una fórmula ψ en el contexto de una teoría T (donde

eventualmente T podría ser vacía), si el conjunto de modelos satisfaciendo simultáneamente a Γ y T está incluido en el conjunto de modelos que satisfacen ψ, i.e.,

$$\Gamma \models_T \psi \iff ([T] \bigcap [\Gamma]) \subseteq [\psi]$$

También la noción de consistencia será extendida. Recordemos que clásicamente dos conjuntos de fórmulas son consistentes si existe algún modelo que los satisfaga a ambos simultáneamente, i.e.,

$$[\Gamma_1] \bigcap [\Gamma_2] \neq \emptyset$$

Ahora para debilitar esas dos nociones, reemplazaremos en las definiciones las operaciones clásicas de inclusión e intersección entre conjuntos, por sus correspondientes versiones borrosas. En ese sentido, primero definiremos la función que denominaremos aplicación de aproximación, la cual asocia a cada conjunto de proposiciones clásico Γ uno borroso $[\Gamma]^*$.

Definición 2.1 *Una función $* : \mathcal{P}(L) \longmapsto \Omega^L$ es denominada una aplicación de aproximación superior si $[\Gamma] \preccurlyeq [\Gamma]^*$, donde $\preccurlyeq$ representa el orden puntual entre conjuntos borrosos (i.e. si A y B son dos conjuntos borrosos en el universo del discurso U entonces $A \preccurlyeq B$ si y sólo si $A(u) \leq B(u)$ para todo elemento u en U).*

Intuitivamente, * asignará a todo conjunto de fórmulas clásico Γ un conjunto borroso de modelos $[\Gamma]^*$ (que será leído como *aproximadamente* Γ) tal que su núcleo contiene a todos los modelos del conjunto de fórmulas de partida. Una función particular que nos permitirá hablar de extensionalidad será aquella aplicación de aproximación superior que a cualquier conjunto de fórmulas le hace corresponder exactamente el conjunto de sus modelos. De aquí en adelante nos referiremos a este tipo de aplicaciones como de aproximación a secas.

Para abreviar, cuando φ sea una sentencia del lenguaje $\mathcal{L}$, escribiremos $[\varphi]^*$ en lugar de $[\{\varphi\}]^*$.

La noción de aplicación de aproximación puede ser empleada de diferentes maneras con el propósito de generar relaciones de consecuencia graduadas a partir de la clásica. A continuación, presentaremos diferentes alternativas. Por razones que se aclararán a medida que avancemos en la presentación, consideraremos por separado el caso en que la teoría T es vacía, del que no lo es. Previamente vale la pena hacer algunas aclaraciones de notación, como por ejemplo, que los símbolos $\sqcap, \sqcup$ indicarán las operaciones entre conjuntos borrosos de intersección y unión (para distinguirlos de los clásicos $\cap$ y $\cup$), respectivamente y que los símbolos $\sqsubseteq, \preccurlyeq$ representarán las relaciones entre conjuntos borrosos correspondientes al grado de inclusión y el orden puntual entre conjuntos borrosos. Así, $\sqsubseteq$ tendrá rango en el retículo L, mientras que $\preccurlyeq$ será una relación con rango $\{0,1\}$. Las definiciones de consecuencias graduadas a partir de una aplicación de aproximación que se darán a continuación no incluirán todas las posibles alternativas. Las que hemos seleccionado se corresponden con las intuiciones presentadas hasta aquí y las motivaciones de nuestro trabajo.

Definición 2.2 *Sean Γ, ψ y α un conjunto de proposiciones, una proposición y un elemento del retículo L (con su orden asociado $\leq$), respectivamente. Entonces la noción "Γ deduce ψ en grado α"(o equivalentemente, "ψ es una α-consecuencia de Γ") puede ser alternativamente definida como sigue*[1] *:*

$$\Gamma \overset{1}{\models}{}^{\alpha} \psi \iff \alpha \leq [\Gamma] \sqsubseteq [\psi]^* \tag{2.1}$$

$$\Gamma \overset{2}{\models}{}^{\alpha} \psi \iff \alpha \leq [\Gamma]^* \sqsubseteq [\psi]^* \tag{2.2}$$

[1]Otra alternativa definición corresponde a:

$$\Gamma \overset{3}{\models}{}^{\alpha} \psi \iff \alpha \leq [\Gamma]^* \sqsubseteq [\psi]$$

la cual da cuenta de una noción de consecuencia más estricta que la clásica y que escapa a los objetivos de nuestro estudio.

La expresión $\alpha \leq A \sqsubseteq B$ debe ser interpretada como indicando que el grado de inclusión de A en B es más grande o igual que α para A y B conjuntos borrosos.

En términos de interpretaciones o modelos, $\Gamma \overset{1}{\models^{\alpha}} \psi$ expresa que ψ es un α-consecuencia de Γ si todo los modelos de Γ están por lo menos en la α-aproximación del conjunto de los modelos de ψ. La idea que está detrás de este tipo de derivaciones es que aunque ψ no es exactamente verdadero en el contexto de Γ hay una proposición cercana a y más débil que ψ, que es verdadera en el sentido clásico.

El caso de $\Gamma \overset{2}{\models^{\alpha}} \psi$ es otra interesante y más fuerte noción de derivabilidad graduada. La idea es expresar no sólo que cada modelo de Γ es α-cercano a algún modelo de ψ, sino también que cualquier modelo que esté cercano de algún modelo de Γ también lo estará de algún modelo de ψ.

Una cuestión que aparece rápidamente es como extender las definiciones anteriores para los casos en que se dispone de cierta información adicional expresada como un conjunto de fórmulas T. Una directa extensión de esas relaciones de consecuencia podría ser presentadas como sigue:

Definición 2.3 *Sean Γ, ψ, α y T, un conjunto de proposiciones, una proposición, un elemento del reticulado L y una teoría, respectivamente. Entonces la noción "Γ deduce ψ en grado α en el contexto de T" (o equivalentemente, "ψ es una α-consecuencia de Γ en presencia de T") puede ser alternativamente definida como sigue:*

$$\Gamma \overset{1}{\underset{T}{\models^{\alpha}}} \psi \Longleftrightarrow \alpha \leq ([\Gamma] \sqcap [T]) \sqsubseteq [\psi]^* \tag{2.3}$$

$$\Gamma \overset{2}{\underset{T}{\models^{\alpha}}} \psi \Longleftrightarrow \alpha \leq ([\Gamma]^* \sqcap [T]) \sqsubseteq [\psi]^* \tag{2.4}$$

$$\Gamma \overset{3}{\underset{T}{\models^{\alpha}}} \psi \Longleftrightarrow \alpha \leq ([\Gamma]^* \sqcap [T]^*) \sqsubseteq [\psi]^* \tag{2.5}$$

En este caso la expresión $\alpha \leq (A \sqcap B) \sqsubseteq C$ expresa que el grado de inclusión en C de la interesección entre A y B es más grande o igual a α, siendo A, B y C conjuntos borrosos.

En todos los casos, denotaremos el grado de consecuencia entre un conjunto de fórmulas Γ y una fórmula ψ como:

$$\Gamma \overset{i}{\approx} \psi = \sup\{\alpha \mid \Gamma \overset{i}{\models^{\alpha}} \psi\} \qquad ; \qquad \Gamma \overset{i}{\underset{T}{\approx}} \psi = \sup\{\alpha \mid \Gamma \overset{i}{\underset{T}{\models^{\alpha}}} \psi\}$$

donde i indica la clase de derivabilidad.

En el mismo sentido en que fuera extendida la noción de derivabilidad, una extensión de la noción de consistencia puede ser confeccionada considerando que un conjunto de fórmulas Γ_1 es α-consistente con respecto a otro conjunto de fórmulas Γ_2 si la intersección clásica entre el α-corte de "*aproximadamente*" Γ_1, i.e., $[\Gamma_1]^*_\alpha$, y $[\Gamma_2]$ es no vacía. Más formalmente:

Definición 2.4 *Dados dos conjuntos de fórmulas Γ_1 y Γ_2, diremos que Γ_1 es α-consistente con respecto a Γ_2 (denotada como $\Gamma_1 \vec{\bowtie}_\alpha \Gamma_2$) si:*

$$\Gamma_1 \vec{\bowtie}_\alpha \Gamma_2 \Longleftrightarrow [\Gamma_1]^*_\alpha \bigcap [\Gamma_2] \neq \emptyset$$

Además, el grado de consistencia de Γ_1 con respecto a Γ_2 será definido por $\Gamma_1 \vec{\bowtie} \Gamma_2 = \sup\{\alpha \mid \Gamma_1 \vec{\bowtie}_\alpha \Gamma_2\}$.

Note que tanto el grado de consistencia como la α-consistencia son nociones no simétricas, i.e., $\Gamma_1 \vec{\bowtie} \Gamma_2$ puede ser diferente de $\Gamma_2 \vec{\bowtie} \Gamma_1$ y Γ_1 puede ser α-consistente con respecto a Γ_2 pero no suceder la inversa.

Hasta aquí, hemos presentado algunas generalizaciones borrosas de las relaciones de consecuencia y de consistencia clásicas mediante aplicaciones de aproximación, pero poco hemos dicho acerca

de las propiedades que deben verificar esas aplicaciones en tanto son usadas para tal fin. Puesto que pretendemos que las nuevas nociones incluyan a las clásicas como casos particulares, parece muy razonable el requerimiento ya formulado de

A1: $\forall \Gamma \subseteq \mathcal{L} : [\Gamma] \preccurlyeq [\Gamma]^*$.

Sin embargo esta propiedad es sólo una condición necesaria (pero no suficiente) para garantizar que las nociones de consecuencias de las definiciones 2.2 y 2.3 sean extensionales en el sentido que si ψ consecuencia clásica del conjunto Γ entonces este deriva en grado 1 a ψ. Dicha propiedad si alcanza a establecer que los operadores presentados están ordenados según un orden de generalidad definido de la siguiente manera: si $\Gamma \overset{i}{\underset{T}{\models}}{}^{\alpha} \psi$ entonces $\Gamma \overset{j}{\underset{T}{\models}}{}^{\alpha} \psi$ con $j < i$ y $1 \leq j, i \leq 3$.

Adicionalmente, podría pensarse que la condición **A1** debería ser estricta, o sea que el conjunto original sea exactamente el núcleo:

A1': $\forall \Gamma \subseteq \mathcal{L} : [\Gamma] = [\Gamma]^*_1$.

Además si tenemos en cuenta que es de esperar que el grado de proximidad de un modelo a una reunión de conjuntos de modelos sea igual al "mejor" de los grados de proximidad entre dicho modelo y cada conjunto, obtenemos la siguiente propiedad:

A2: $\forall \Gamma \subseteq \mathcal{L} : (\text{Si } [\Gamma] = \bigcup_{i \in I} [\Gamma_i], \text{ entonces } [\Gamma]^* = \bigsqcup_{i \in I} [\Gamma_i]^*)$.

donde $\bigsqcup$ denota la unión de conjuntos borrosos definida por el supremo. Como se verá luego **A1** y **A2** nos darán las condiciones necesarias y suficientes para garantizar extensionalidad.

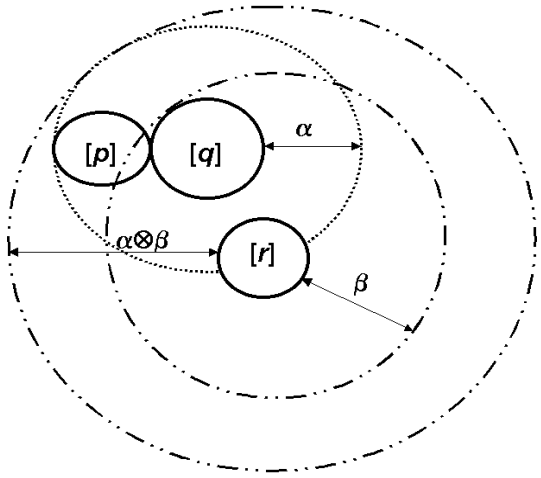
Considerando que en el caso clásico, la definición de consistencia es simétrica, también parecía válido estipular que el grado de consistencia entre dos conjuntos cualesquiera, sea independiente del orden, lo cual nos lleva a establecer la siguiente condición:

A3: $\forall \Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \mathcal{L}, \forall \alpha \in L : (\Gamma_1 \overrightarrow{\bowtie}_\alpha \Gamma_2 \Longleftrightarrow \Gamma_2 \overrightarrow{\bowtie}_\alpha \Gamma_1)$

Finalmente, considerando que clásicamente para cualquier terna de fórmulas, si de p se deriva q y de q se deriva r entonces de p se deriva r, lo cual es equivalente a pedir que si $[p] \subseteq [q]$ y $[q] \subseteq [r]$ entonces $[p] \subseteq [r]$, surge inmediatamente la siguiente condición graduada de transitividad:

A4: $\forall \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \subseteq \mathcal{L}, \forall \alpha, \beta \in L :$ Si $[\Gamma_1] \subseteq [\Gamma_2]^*_\alpha$ y $[\Gamma_2] \subseteq [\Gamma_3]^*_\beta$ entonces $[\Gamma_1] \subseteq [\Gamma_3]^*_{\alpha \otimes \beta}$.

para alguna t-norma $\otimes$. Gráficamente esto puede ser representado como sigue:



Hasta ahora tampoco hemos mencionado nada acerca de qué tipo de operadores de inclusión e intersección entre conjuntos borrosos deberían ser usados para dar cuenta de las relaciones de consecuencia deseadas. En la próxima sección entraremos en esas cuestiones y daremos algunas condiciones en tal sentido.

2.4 Aproximaciones topológicas

Como ya hemos mencionado en la introducción, el grado de verosimilitud de una sentencia ψ depende de la proximidad entre los modelos que satisfacen ψ y el o los modelos que caracterizan "el mundo real". En el mismo sentido, hemos hablado informalmente de esos grados de proximidad, como si la proximidad entre modelos se pudiera medir, pero no hemos sugerido cómo debería ser tal medida, i.e., qué propiedades le deberían ser requeridas. La mayoría de los autores aceptan que cualquier medida que trate de dar cuenta de la noción de verosimilitud debe ser por lo menos reflexiva, dado que es difícil justificar que entre los más cercanos modelos a uno dado no esté este presente. Sin embargo, vale la pena indicar que hay en la literatura algunas razonables propuestas que no asumen a priori tal condición. Entre ellas podemos citar la interpretación de Goldblatt en [Gol79] pag. 274, donde se considera la relación de un elemento consigo mismo como su grado de existencia.
Respecto de las propiedades de simetría y transitividad no existe el mismo consenso.

Por ejemplo, Tversky ha dado una base empírica para rechazar simetría. Sus experimentos confirman la hipótesis que cuando se evalúa la similitud entre dos objetos a y b, se le da más peso a los rasgos que a tiene y que a b le faltan, en desmedro de los rasgos que b posee y que no aparecen en a ([Tve77]).
En relación a la transitividad aparecen las paradojas de caracterización de conceptos vagos tales como la condición de ser *barato* o ser *calvo* que dan argumentos suficientes para no aceptarla, por lo menos en su versión fuerte.

Teniendo en cuenta estos antecedentes, y tratando de ser lo más general posible, tomaremos en consideración una noción de medida de proximidad representada como una relación borrosa reflexiva ($R : \Omega \times \Omega \longmapsto L$). Usando esta relación reflexiva, podemos construir una aplicación de aproximación superior que para cada conjunto de fórmulas $\Gamma \subset \mathcal{L}$, asocia a su conjunto de modelos booleanos el conjunto borroso, con universo Ω, $[\Gamma]^{\#}$ definido como:

$$[\Gamma]^{\#}(\omega') = \sup\{R(\omega', \omega) \mid \omega \in [\Gamma]\} \tag{2.6}$$

Es fácil verificar que así definida $[\Gamma]^{\#}$ incluye a $[\Gamma]$, y que $\#$ es distributiva respecto de la unión, o sea que satisface las propiedades **A1** y **A2**. De aquí en adelante, nos referiremos a las aplicaciones que satisfacen estas dos condiciones como aplicaciones de aproximación superior topológicas o simplemente como aproximaciones topológicas.

Lo interesante es que las propiedades **A1** y **A2** caracterizan completamente tales aproximaciones topológicas y por lo tanto ellos proveen una axiomatización de dichas aplicaciones.

Proposición 2.2 *Una aplicación* $* : \mathcal{P}(L) \longmapsto \Omega^L$, *satisface* **A1** *y* **A2** *si y sólo si existe una relación borrosa reflexiva* $R : \Omega \times \Omega \to L$ *tal que* $[\Gamma]^*$ *es definida por (2.6) para cualquier conjunto de proposiciones* Γ.

Prueba: Si $* : \mathcal{P}(L) \longmapsto \Omega^L$ satisface **A1** y **A2** entonces la relación definida por $R(\omega', \omega) = [\hat{\omega}]^*(\omega')$ [2], para todo $\omega, \omega' \in \Omega$ cumple con la condición buscada. □

Este resultado viene a reforzar lo que ya nos adelantaba la Proposición 2.1,las aproximaciones topológicas son determinadas por conjuntos borrosos normales a través de la definición (2.6).

[2] Recordemos que $\hat{\omega}$ es el conjunto maximal de fórmulas que satisface el modelo ω

No es difícil verificar cuáles son las propiedades necesarias para caracterizar aplicaciones de aproximación definidos por relaciones borrosas que satisfacen más que reflexividad.

Proposición 2.3 *Dado una aplicación de aproximación topológica* $* : \mathcal{P}(\mathcal{L}) \to \Omega^L$ *donde ahora el retículo tiene asociado una operación* $\otimes$ *denominada t-norma. Considerando la relación borrosa* R *en* $\Omega \times \Omega \longmapsto L$ *definida a través del grado de consistencia como* $R(\omega', \omega) = \hat{\omega} \bowtie \hat{\omega}'$*. Entonces las siguientes condiciones suceden:*

1. *R es una separación estricta si y sólo si, $*$ satisface* **A1'**.
2. *R es simétrica si y sólo si, $*$ satisface* **A2**.
3. *R es $\otimes$-transitiva si y sólo si, $*$ satisface* **A3**.

Prueba: Para los casos 1 y 2 la prueba es obvia. Para el tercer caso, en la dirección derecha-izquierda, basta tomar Γ_1, Γ_2 y Γ_3 como conjuntos de proposiciones maximalmente consistentes, siendo duales a simples interpretaciones. Así, las correspondientes condiciones para R son fácilmente verificables. En la otra dirección, la prueba (adaptada de [Rus91]) asume que $\alpha \leq [\Gamma_1] \sqsubseteq [\Gamma_2]^*$, que $\beta \leq [\Gamma_2] \sqsubseteq [\Gamma_3]^*$, y que R es $\otimes$-transitiva, i.e.,

$$R(\omega, \omega') \otimes R(\omega', \omega'') \leq R(\omega, \omega'')$$

para todo mundo $\omega, \omega', \omega''$. Notemos que $[\Gamma_i] \sqsubseteq [\Gamma_j]^* = \inf_{\omega' \models \Gamma_i} \sup_{\omega \models \Gamma_j} R(\omega, \omega')$
Tomando supremos en ambos lados de esa desigualdad con respecto a los Γ_3-mundos y puesto que $\otimes$ es tomada continua, resulta:

$$\sup_{\omega \models \Gamma_3} [R(\omega, \omega')] \otimes R(\omega', \omega'') \leq \sup_{\omega \models \Gamma_3} R(\omega, \omega'')$$

Dado que esa expresión es cierta para todo ω', en particular valdrá para los $\omega' \models \Gamma_2$ y rescribiendo lo anterior:

$$\beta \otimes R(\omega', \omega'') \leq \inf_{\omega' \models \Gamma_2} \sup_{\omega \models \Gamma_3} [R(\omega, \omega')] \otimes R(\omega', \omega'') \leq \sup_{\omega \models \Gamma_3} [R(\omega, \omega')] \otimes R(\omega', \omega'')$$

puesto que el primer término del centro es el grado de inclusión entre $[\Gamma_2]$ y $[\Gamma_3]^*$.
Aplicando transitividad entre las dos desigualdades anteriores obtenemos que:

$$\beta \otimes R(\omega', \omega'') \leq \sup_{\omega \models \Gamma_3} R(\omega, \omega'')$$

Ahora es posible tomar el supremo sobre los mundos ω' que por la reducción anterior son Γ_2-mundos. Así

$$\beta \otimes \sup_{\omega' \models \Gamma_2} R(\omega', \omega'') \leq \sup_{\omega \models \Gamma_3} R(\omega, \omega'')$$

Finalmente, como la desigualdad es cierta para todo mundo ω'' es particular lo seguirá siendo si tomamos $\omega'' \models \Gamma_1$.

$$\beta \otimes \inf_{\omega'' \models \Gamma_1} \sup_{\omega' \models \Gamma_2} R(\omega', \omega'') \leq \inf_{\omega'' \models \Gamma_1} \sup_{\omega \models \Gamma_3} R(\omega, \omega'')$$

En ese caso, la expresión anterior puede ser enunciada como:

$$\beta \otimes \alpha \leq [\Gamma_1] \sqsubseteq [\Gamma_3]^*$$

□

2.5 Consecuencia graduada y aproximaciones superiores

En esta sección, profundizaremos las conexiones entre las dos previas. Primero, generalizaremos las definiciones de medidas de implicación y consistencia propuestas por Ruspini en [Rus91]. Luego presentaremos una generalización de las definiciones de consecuencia aproximada y de proximidad tal como fueran definidas por Dubois et al. en [DEG+95]. Además daremos teoremas de representación para estas generalizaciones.

2.5.1 Consecuencia aproximada

Dada una relación reflexiva borrosa R sobre Ω podemos generalizar trivialmente las medidas de implicación y consistencia propuestas por Ruspini, para pares de conjuntos de fórmulas Γ y Δ, en $\mathcal{L}$, de la siguiente manera:

$$I_R(\Delta \mid \Gamma) = \inf_{\omega \in [\Gamma]} \sup_{\omega' \in [\Delta]} R(\omega, \omega'),$$

$$C_R(\Delta \mid \Gamma) = \sup_{\omega \in [\Gamma]} \sup_{\omega' \in [\Delta]} R(\omega, \omega'),$$

y definir la siguiente relación de consecuencia graduada entre un conjunto arbitrario y una proposición.

Definición 2.5 Consecuencia aproximada *Siendo Γ y ψ un subconjunto y una fórmula de $\mathcal{L}$, respectivamente, diremos que ψ es una α-consecuencia de Γ, denotado por $\Gamma \models_R^\alpha \psi$, si $I_R(\psi \mid \Gamma) \geq \alpha$.*

Observación 2.1 *Es muy fácil verificar que la relación de consecuencia definida como 2.1 es equivalente a la anterior consecuencia aproximada si la aplicación es una aproximación superior, i.e., $\models_R^\alpha$ está en la clase $\overset{1}{\models}{}^\alpha$.*

En lo que sigue, omitiremos el subíndice R en $\models_R^\alpha$ siempre y cuando no haya ambigüedad o confusion posible. Reservaremos el símbolo $\models$ para denotar la relación de consecuencia booleana.

Definición 2.6 *Dada una familia de relaciones $\vdash^\alpha \subseteq \mathcal{P}(L) \times \mathcal{L}$ con $\alpha \in L$, definimos las siguientes propiedades de esa clase de relaciones.*

A (Anidamiento)*: Si $\Gamma \vdash^\alpha \psi$, entonces $\Gamma \vdash^\beta \psi$ para $\beta \leq \alpha$.*

SC (Supra-clásica)*: $\Gamma \vdash^1 \psi$ si $\Gamma \models \psi$.*

ST (Sub-trivial)*: $\Gamma \vdash^0 \psi$ para todo $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ y $\psi \in \mathcal{L}$.*

OI (Ó a izquierda)*: $\Gamma \models^\alpha \psi$ sii $\hat{\omega} \models^\alpha \psi$ $\omega \in \Omega$: $\Gamma \subseteq \hat{\omega}$.*

PI (Preservación de Inclusión)*: Si $\phi \models \psi$ entonces para todo $\hat{\omega}$ si $\hat{\omega} \vdash^\alpha \phi$ entonces $\hat{\omega} \vdash^\alpha \psi$*

Coo (Coordinación)*:*

$$\hat{\omega} \mathrel{|\!\approx} \psi = \bigvee_{\{\hat{\omega}' \mid \hat{\omega}' \models \psi\}} \bigwedge_{\{\phi \mid \hat{\omega}' \models \phi\}} \hat{\omega} \mathrel{|\!\approx} \phi$$

donde

$$\hat{\omega} \mathrel{|\!\approx} \delta = \sup\{\alpha \mid \hat{\omega} \vdash^\alpha \delta\}$$

PC (Preservación de Consistencia)*: Si Γ es consistente ($[\Gamma] \neq \emptyset$), y $\Gamma \vdash^\alpha \perp$ entonces $\alpha = 0$.*

CI (Continuidad por la Izquierda)*: Si $\Gamma \vdash^\beta \psi$ para todo $\beta < \alpha$, entonces $\Gamma \vdash^\alpha \psi$.*

ESC (Estricta supra-clásica)*: para todo $\hat{\omega} \vdash^1 \psi$ sii $\hat{\omega} \models \psi$.*

Sim (Simetría)*: para cualquier* $\omega, \omega' \in \Omega$, $\forall \phi \in \hat{\omega'} : \hat{\omega} \vdash^{\alpha} \phi$ *sii* $\forall \psi \in \hat{\omega} : \hat{\omega'} \vdash^{\alpha} \psi$.

$\otimes$-T ($\otimes$-Transitividad)*: Si* $\Gamma \vdash^{\alpha} \varphi$ *y* $\varphi \vdash^{\beta} \psi$*, entonces* $\Gamma \vdash^{\alpha \otimes \beta} \psi$.

OD (Ó a derecha)*:* $\hat{\omega} \vdash^{\alpha} \psi$ *sii existe* $\omega' \in \Omega$ *tal que* $\psi \in \hat{\omega'}$ *y para toda fórmula* $\phi \in \hat{\omega'} : \hat{\omega} \vdash^{\alpha} \phi$.

Proposición 2.4 *La familia de operadores de consecuencia aproximada* $\{\models^{\alpha}_{R}\}_{\alpha \in L}$ *generadas a partir de una relación reflexiva borrosa* R*, satisface las propiedades de:* **A** (Anidamiento), **SC** (Supra-clásica), **ST** (Sub-trivial), **OI** *(* Ó a izquierda), **PI** (Preservación de Inclusión), **Coo** (Coordinación), **PC** (Preservación de Consistencia), **CI** (Continuidad por la Izquierda).

Más aún, las relaciones de consecuencia graduada $\models^{\alpha}_{R}$ *respectivamente verifican:*

ESC (Estricta supra-clásica)*: si* R *es una separación estricta.*

Sim (Simetría)*: si* R *es simétrica.*

$\otimes$-T ($\otimes$-Transitividad)*: si* R *es* $\otimes$*-transitiva.*

OD (Ó a derecha)*: si* R *satisface la max-condición, i.e.,* $I_R(\Gamma \mid \hat{\omega}) = \max\{R(\omega, \omega') \mid \Gamma \subseteq \hat{\omega'}\}$.

Prueba: Las primeras cinco propiedades son consecuencia inmediata de la definición. Por ejemplo *anidamiento* surge simplemente por la transitividad del orden en el reticulado L. *Supra-clásicalidad* resulta directamente de la reflexividad de R. *Sub-trivial* se obtiene por considerar que la función de proximidad es por definición mayor o igual a cero. *Ó a la izquierda* se vuelve clara si se piensa el ínfimo como una cuantificación universal. *Preservación de inclusión* es una consecuencia directa del hecho que la medida de implicación es monótona en su primer parámetro. Más interesante es la propiedad de *coordinación*. Su prueba aunque trivial no es evidente. Probemos las dos desigualdades.

$\geq$) Si en la expresión $\bigvee_{\{\hat{\omega'} \mid \hat{\omega'} \models \psi\}} \bigwedge_{\{\phi \mid \hat{\omega'} \models \phi\}} \hat{\omega} \mathrel{|\!\approx} \phi$ tomamos el caso particular del ínfimo cuando $\phi = \psi$ obtenemos la fórmula $\bigvee_{\{\hat{\omega'} \mid \hat{\omega'} \models \psi\}} \hat{\omega} \mathrel{|\!\approx} \psi$ cuyo valor es más grande o igual a la precedente. Como el supremo se vuelve vacuo la última formulación es equivalente a $\hat{\omega} \mathrel{|\!\approx} \psi$.

$\leq$) En este caso basta con probar que: $R(\omega, \omega') \leq \bigwedge_{\{\phi \mid \hat{\omega'} \models \phi\}} \hat{\omega} \mathrel{|\!\approx} \phi$. Para ello, sólo es necesario reemplazar $\hat{\omega} \mathrel{|\!\approx} \phi$ por su definición $\sup_{\omega'' \models \phi} R(\omega, \omega'')$. Luego si tomamos $\omega'' = \omega'$ obtenemos lo buscada dado que el ínfimo se vuelve vacuo. Así:

$$\hat{\omega} \mathrel{|\!\approx} \psi = \bigvee_{\{\hat{\omega'} \mid \hat{\omega'} \models \psi\}} R(\omega, \omega') \leq \bigvee_{\{\hat{\omega'} \mid \hat{\omega'} \models \psi\}} \bigwedge_{\{\phi \mid \hat{\omega'} \models \phi\}} \hat{\omega} \mathrel{|\!\approx} \phi$$

Para demostrar que la relación de consecuencia aproximada satisface la propiedad de *preservación de consistencia* sólo basta aplicar la definición. Supongamos que Γ es consistente, entonces $\Gamma \models^{\alpha} \perp$ si y sólo si $I_R(\perp \mid \Gamma) \geq \alpha$. Pero por definición lo último es igual al $\inf_{\omega \models \Gamma} \sup_{\omega' \models \perp} R(\omega, \omega')$. Luego como por hipótesis Γ es consistente y puesto que no hay modelos que satisfagan a $\perp$ la condición del supremo será vacía y su valor será cero para todo ω que satisface a Γ. Y así α deberá ser igual a cero.

Para corroborar que se cumple *continuidad a izquierda* sólo es necesario tener en cuenta que si $I_R(\psi \mid \Gamma) \geq \beta$ para todo $\beta < \alpha$ también suceda que $I_R(\psi \mid \Gamma) \geq (\sup_{\beta < \alpha} \beta) = \alpha$.

A su vez la comprobación de las propiedades de *estricta supra-clásicalidad* y *simetría* resulta de una simple reescritura de las definiciones. La prueba de $\otimes$*-transitividad* es muy similar a la presentada en el último teorema de la sección anterior para la dirección de izquierda a derecha.

Finalmente la demostración de *Ó derecha* es como sigue. Supongamos que R satisface la max-condición, entonces $I_R(\psi \mid \hat{\omega}) = \max\{R(\omega, \omega') \mid \psi \in \hat{\omega'}\}$. Sea ω^{+} el modelo de ψ donde se alcanza ese máximo. Luego $R(\omega, \omega^{+}) \geq \alpha$ y por lo tanto como para toda $\phi \in \hat{\omega^{+}} : \alpha \leq R(\omega, \omega^{+}) \leq I_R(\phi \mid \omega)$ resultará que $\hat{\omega} \models^{\alpha} \phi$.

$\square$

Sin embargo, las relaciones de consecuencia graduada no satisfacen la propiedad de *corte*, i.e., puede suceder que $\Gamma \models^{\alpha} \varphi$ y que $\Gamma \cup \varphi \models^{\beta} \psi$, con $\alpha, \beta > 0$, y $\Gamma \not\models^{\gamma} \psi$ con $\gamma > 0$. Tomando $\Gamma \cup \psi$ inconsistente, i.e., tal que $[\Gamma \cup \psi] = \emptyset$, es fácil construir un contraejemplo. Nótese que la propiedad de preservación de inclusión es una consecuencia de la propiedad de coordinación.

Las relaciones de consecuencia aproximada pueden ser caracterizadas en términos de las propiedades anteriores.

Teorema 2.2 *Sea $\{\vdash^{\alpha}\}_{\alpha \in L}$ una familia de relaciones binarias en $\mathcal{P}(\mathcal{L}) \times L$ satisfaciendo* **A**, **SC**, **ST**, **OI**, **Coo**, **PC** *y* **CI**. *Entonces, existe una relación borrosa reflexiva R en Ω tal que $\Gamma \vdash^{\alpha} \psi$ sii $I_R(\psi \mid \Gamma) \geq \alpha$.*

Prueba: Lo primero que necesitamos es asegurar la existencia de la relación borrosa reflexiva. Si actuáramos con ligereza podríamos proponer que sea $\sup\{\alpha \mid \hat{\omega} \vdash^{\alpha} \hat{\omega}'\}$. Pero eso no es posible por la signatura de $\vdash$, cuyo segundo parámetro debe ser una fórmula. Ahora si tomamos en cuenta que en el caso clásico un modelo ω satisface un conjunto Γ si y sólo si satisface todos y cada uno de sus elementos, podemos inspirarnos y proponer que:

$$R(\omega, \omega') = \bigwedge_{\{\phi \mid \hat{\omega}' \models \phi\}} \hat{\omega} \models\!\approx \phi$$

La propiedad **SC** asegura que la así definida relación R es reflexiva. Además, $\Gamma \vdash^{\alpha} \psi$ si y sólo si (debido a **OI**) $\hat{\omega} \vdash^{\alpha} \psi$ para todo $\omega \in \Omega$, $\hat{\omega} \supseteq \Gamma$ si y sólo si (por Anidamiento) $\alpha \leq \hat{\omega} \models\!\approx \psi$ si y sólo si (usando la propiedad de coordinación)

$$\alpha \leq \bigvee_{\{\hat{\omega}' \mid \hat{\omega}' \models \psi\}} \bigwedge_{\{\phi \mid \hat{\omega}' \models \phi\}} \hat{\omega} \models\!\approx \phi$$

lo cual, tomando en cuenta nuestra definición de R, es equivalente a $I_R(\psi \mid \Gamma) \geq \alpha$. □

Corolario 2.1 *El teorema también sucede si la familia de relaciones $\{\vdash^{\alpha}\}_{\alpha \in L}$ además satisface* **ESC**, **Sim**, **$\otimes$-T** *o* **OD**, *probada que la relación borrosa reflexiva R también es una separación estricta, simétrica, $\otimes$-transitiva o satisface la max-condición, respectivamente.*

La prueba consiste en testear que la relación R definida en la prueba del teorema anterior satisface las condiciones adicionales.

Una cuestión que surge naturalmente acerca de los modelos de razonamiento basado en aproximaciones es como incluir en ellos la información sobre condiciones de contexto o restricciones generales del dominio.

En el caso clásico, la forma más conocida de tomar en consideración el conocimiento disponible a priori es representarlo como un conjunto de fórmulas T y sumarlas al conjunto de premisas, i.e., $\Gamma \models_T \psi$ si y sólo si $T \cup \Gamma \models \psi$.
La directa traslación de esa formalización al caso de nuestra noción de consecuencia aproximada es también unir la teoría T y el conjunto de premisas. Esta idea se corresponde con la noción de consecuencia 2.3 de la anterior sección. Más formalmente la definición de consecuencia aproximada con un contexto T, simbolizada por $\models^{\alpha}_{R,T}$, es:

$$\Gamma \models^{\alpha}_{R,T} \psi \text{ sii } T \cup \Gamma \models^{\alpha}_{R} \psi.$$

O equivalentemente, $\Gamma \models^{\alpha}_{R,T} \psi$ si y sólo si $I_R(\psi | T \cup \Gamma) \geq \alpha$.

Parece muy natural aceptar rápidamente, que esta noción de consecuencia con contexto satisfaga las propiedades mencionadas para el caso anterior, en que el contexto no era tenido en cuenta, puesto que la definición del primero se reduce a la del segundo. Siguiendo ese razonamiento el siguiente teorema de caracterización puede ser propuesto.

Teorema 2.3 *Sea* $\{\vdash^\alpha\}_{\alpha\in L}$ *una familia de relaciones binarias anidadas en* $\mathcal{P}(\mathcal{L})\times L$*, i.e.,* $\vdash^\alpha \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{L})\times\mathcal{L}$ *y* $\Gamma\vdash^\alpha\psi$ *implies* $\Gamma\vdash^\beta\psi$ *para todo* $\beta\leq\alpha$*, y sea* T *un conjunto consistente de proposiciones en* $\mathcal{L}$*. Si la familia* $\{\vdash^\alpha\}_{\alpha\in L}$ *de relaciones de consecuencia satisface:* **OI** (Ó a izquierda)*,* **ST** (Sub-Trivial)*,* **Coo** (Coordinación)*,* **PC** (Preservación de Consistencia)*,* **CI** (Continuidad por izquierda)*, y*

$\mathbf{SC}_T$ Supra Clásica restringida*:* $\Gamma\vdash^1\psi$ *si* $\Gamma\cup T\models\psi$

Entonces existe una familia de relaciones reflexivas R *sobre el conjunto de modelos* Ω *tal que* $\Gamma\vdash^\alpha\psi$ *si y sólo si para cada* $\alpha\in L$ *resulta que* $\Gamma\cup T\models^\alpha_R\psi$*. Recíprocamente, para cualquier relación borrosa reflexiva* R *sobre* Ω *y cualquier conjunto de fórmulas* T*, la familia de relaciones de consecuencia* $\{\models^\alpha_{R,T}\}_{\alpha\in L}$ *verifica esas propiedades.*

Prueba: Definimos $R:\Omega_T\times\Omega\to L$ como en el teorema de caracterización 2.2, donde Ω_T es el conjunto de modelos de T. Cualquier extensión reflexiva de esa R nos será útil. □

La prueba del teorema remarca el hecho que la relación R sólo es unívocamente determinada para los pares ordenados en $\Omega_T\times\Omega$. Por lo tanto parecería que el corolario 1 sería verdadero si R es restringido a $\Omega_T\times\Omega$. Eso es efectivamente así, si las propiedades son restringidas de la siguiente manera:

- *Separación estricta restringida* $\Gamma\cup T\models\psi$ sii $\Gamma\vdash^1\psi$.
- *Simetría restringida*: Para todo $\omega,\omega'\in\Omega_T$, $\forall\phi\in\hat{\omega}':\hat{\omega}\models^\alpha\phi$ sii $\forall\psi\in\hat{\omega}:\hat{\omega}'\models^\alpha\psi$,
- *Transitividad restringida*: Si $\Gamma\models^\alpha_{R,T}\varphi$ y $\varphi\models^\beta_{R,T}\psi$, entonces $\Gamma\models^{\alpha\otimes\beta}_{R,T}\psi$ siempre y cuando $[T]\subseteq[\varphi]$.

Nótese que una versión más general de transitividad es imposible de establecer. Las razones para ello, son las mismas que se esgrimieran para el caso de *corte*. Analice por ejemplo el caso en que $[T]\cap[\varphi]=\emptyset$, $[T]\cap[\Gamma]\neq\emptyset$ y $\psi=\bot$. En esa situación supongamos que $\Gamma\models^\alpha_{R,T}\varphi$ con $\alpha>0$. Luego como $\varphi\models^1_{R,T}\bot$ resultaría que $\Gamma\models^{\alpha\otimes 1}_{R,T}\bot$, lo cual viola la condición de preservación de consistencia.

Usando esas condiciones restringidas, el siguiente teorema caracteriza las relaciones de consecuencia $\models^\alpha_{R,T}$ cuando ellas son basados en relaciones de similitud

Teorema 2.4 *Sea* $\{\vdash^\alpha\}_{\alpha\in L}$ *una familia de relaciones binarias anidadas en* $\mathcal{L}$ *satisfaciendo las condiciones del teorema previo más las propiedades de simetría y transitividad restringidas. Entonces existe una relación de* $\otimes$*-similitud* R *sobre el conjunto de modelos* Ω *tal que* $\Gamma\vdash^\alpha\psi$ *si y solamente si para cada* $\alpha\in L$ *sucede que* $\Gamma\cup T\models^\alpha_R\psi$*.*
Recíprocamente, para cualquier $\otimes$*-similitud* R *sobre* Ω *y cualquier subconjunto de fórmulas* T*, la familia de relaciones de consecuencia* $\{\models^\alpha_{R,T}\}_{\alpha\in L}$ *verifica esas propiedades.*

Prueba: El único punto relevante, consiste en la forma de definir la relación R sobre el conjunto $(\Omega-\Omega_T)\times\Omega$, dónde no es unívocamente determinada por la relación de consecuencia, de tal manera que resulte simétrica y $\otimes$-transitiva. Propondremos definir R como sigue:

$$R(\omega,\omega')=R(\omega',\omega)=\bigvee_{\alpha}\bigwedge_{\omega'\models\phi}\hat{\omega}\vdash^\alpha\phi$$

para todo $\omega\in\Omega_T$, y para esos $\omega\in\Omega-\Omega_T$:

$$R(\omega,\omega')=R(\omega',\omega)=\sup\{R(\omega',\omega")\otimes R(\omega",\omega)\mid\omega"\in\Omega_T\}$$

El resto de la prueba consiste en chequear mecánicamente caso por caso que nuestra definición se comporta según lo pensado. □

Este último resultado es equivalente a uno presentado en [DEG+97].

2.5.2 Consecuencia de proximidad

Hemos ya comprobado como el grado α en una relación de consecuencia aproximada $\Gamma \models_R^\alpha \psi$ corresponde a la magnitud en que la condición de satisfactibilidad de una proposición ψ debe ser relajada con el objetivo de lograr contener a todo los modelos de Γ o equivalentemente como la medida que asegura que cada modelo de Γ tiene al menos un α-cercano modelo de ψ.

Como lo señalamos en la subsección 2.3, esa es una de las posibles modelizaciones de las relaciones de consecuencia graduadas.

Otra interesante y más general formalización es aquella expresada por la idea que no sólo los modelos de un conjunto de fórmulas Γ estén cercanos a algún modelo de una fórmula ψ, sino también, que garantice que cualquier modelo que esté cercano a algún modelo de Γ necesariamente lo esté de algún modelo de ψ.

Dada una relación de proximidad R y su asociada aplicación de aproximación $*$, una primera propuesta podría ser simplemente expresada como: $[\Gamma]^* \preccurlyeq [\psi]^*$ (donde recordemos que $\preccurlyeq$ denota la relación de orden entre conjuntos borrosos, definida por $[\Gamma]^*(\omega) \leq [\psi]^*(\omega)$, para todo $\omega \in \Omega$). Asumamos por un instante que la nueva noción de consecuencia es indicada por $\Gamma \models_R \psi$. Es sencillo reconocer que el esquema anterior es equivalente a: $\Gamma \models_R \psi$ si y sólo si $I_R(\Gamma \mid \hat{\omega}) \leq I_R(\psi \mid \hat{\omega})$ para todo $\omega \in \Omega$. Así descrita, es claro que esta noción viene a expresar que cualquier modelo en el α-corte del conjunto borroso $[\Gamma]^*$ debe también pertenecer al α-corte del conjunto borroso $[\psi]^*$. Esta definición tiene dos inconvenientes a nuestro parecer: no es una noción graduada y es demasiada fuerte.

Pensamos que una definición más natural es la que se propone en [DEG+95], que permitiría dar cuenta de una relación graduada de consecuencia y en tal sentido menos demandante que la anterior. Esta se obtiene por reemplazar la inclusión estricta del párrafo anterior por la siguiente:

$$[\Gamma]^* \sqsubseteq_\otimes [\psi]^* = \inf_{\omega \in \Omega} \{[\Gamma]^*(\omega) \otimes\!\!\longrightarrow [\psi]^*(\omega)\}$$

donde $\otimes\!\!\longrightarrow$ es el residuo asociado a una t-norma $\otimes$. Teniendo en cuenta la interrelación entre el residuo y su asociada t-norma es sencillo corroborar que $\alpha \leq [\Gamma]^* \sqsubseteq_\otimes [\psi]^*$ si y sólo si $[\Gamma]^*(\omega) \otimes \alpha \leq [\psi]^*(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$. En esos términos podemos interpretar la version graduada, $\models_R^\alpha$, de $\models_R$, diciendo que un conjunto Γ y una fórmula ψ pertenecen a esa relación de consecuencia en grado α si todo modelo perteneciente a $[\Gamma]^*_\beta$ también pertenece a $[\psi]^*_{\alpha\otimes\beta}$. Obviamente cuando $\alpha = 1$ recuperamos el caso estricto $\models_R$. Más aún, cuanto más pequeño es α más débil es la relación de consecuencia $\models_R^\alpha$.

Ahora estamos en condiciones de describir una noción de consecuencia graduada denominada de *proximidad* porque deriva proximidad a las conclusiones desde proximidad a las premisas.

Definición 2.7 (Consecuencia de Proximidad) *Si $*$ denota la aplicación de aproximación correspondientes a una relación borrosa reflexiva R, entonces escribiremos $\Gamma \models_R^\alpha \psi$ si y sólo si $\alpha \leq [\Gamma]^* \sqsubseteq_\otimes [\psi]^*$*

Observación 2.2 *Nótese que la consecuencia de proximidad es un caso particular del definido en 2.2 cuando la aplicación de aproximación satisface* **A1** *y* **A2**.

Tal como ocurre con las relaciones de consecuencia aproximada, las de proximidad tienen también una medida de implicación asociada que las caracteriza:

$$J_R(\psi \mid \Gamma) = \inf_{\omega \in \Omega} \{I_R(\Gamma \mid \hat{\omega}) \otimes\!\!\longrightarrow I_R(\psi \mid \hat{\omega})\}.$$

Obviamente entonces, la siguiente equivalencia ocurre, cuando la aplicación * es una aproximación superior

$$\Gamma \models_R^\alpha \psi \text{ sii } J_R(\psi \mid \Gamma) \geq \alpha.$$

Como ya hemos mencionado en la sección 2.3, cuando la aplicación de aproximación satisface la propiedad **A1** (o equivalentemente cuando R es reflexiva), la consecuencia de proximidad que define es más general que su correspondiente relación aproximada (i.e., si $\Gamma \models_R^\alpha \psi$ entonces $\Gamma \models_R^\alpha \psi$ cualquiera sea el α). Pero, sorprendentemente, en [DEG+97] es probada la siguiente equivalencia.

Proposición 2.5 *Si R es una relación de $\otimes$-similitud (reflexiva, simétrica y $\otimes$-transitiva) y la t-norma $\otimes$ es contínua entonces*

$$J_R(\psi \mid \Gamma) = I_R(\psi \mid \Gamma)$$

y así, en este contexto, consecuencia aproximada y de proximidad coinciden.

Prueba: Por definición,

$$J_R(\psi \mid \Gamma) = \inf_{\omega \in \Omega} (\sup_{\omega' \in [\Gamma]} R(\omega', \omega)) \otimes\!\!\longrightarrow (\sup_{\omega" \in [\psi]} R(\omega", \omega))$$

Puesto que el residuo es no-creciente en su primer argumento y no-decreciente en el segundo, y la t-norma es continua, tenemos que $(\sup_{i \in I} \alpha_i) \otimes\!\!\longrightarrow \beta = \inf_{i \in I}\{\alpha_i \otimes\!\!\longrightarrow \beta\}$, y así,

$$J_R(\psi \mid \Gamma) \geq \inf_{\omega \in \Omega} \inf_{\omega' \in [\Gamma]} \sup_{\omega" \in [\psi]} (R(\omega', \omega) \otimes\!\!\longrightarrow R(\omega", \omega))$$

$$\geq \sup_{\omega" \in [\psi]} \inf_{\omega \in \Omega} \inf_{\omega' \in [\Gamma]} R(\omega', \omega) \otimes\!\!\longrightarrow R(\omega", \omega)$$

$$\geq \sup_{\omega" \in [\psi]} \inf_{\omega' \in [\Gamma]} R(\omega", \omega') \text{ (y usando } \otimes\text{-transitividad y simetría) } = I_R(\psi \mid \Gamma)$$

□

Como ya lo mencionáramos en el caso de consecuencias aproximadas, la necesidad de extender la modelización para tomar en cuenta información de contexto surge inmediatamente. En el caso de consecuencias de proximidad, la extensión natural parecería ser:

Definición 2.8 *La α-consecuencia de proximidad dado un contexto T, en símbolos $\models_{R,T}^\alpha$, es definida por:*
$\Gamma \models_{R,T}^\alpha \psi$ *sii* $\alpha \leq ([\Gamma]^* \sqcap [T]) \sqsubseteq_\otimes [\psi]^*$, *o equivalentemente, si y sólo si para todo* $\omega \in [T], \alpha \otimes I_R(\Gamma \mid \hat{\omega}) \leq I_R(\psi \mid \hat{\omega})$.

Esta consecuencia de proximidad, como en el caso previo, puede ser planteada en términos de una medida de implicación ad-hoc, que usualmente es representa por $J_{R,T}$ y es definida como,

$$J_{R,T}(\psi \mid \Gamma) = \inf_{\omega \in [T]} I_R(\Gamma \mid \hat{\omega}) \ \otimes\!\!\longrightarrow I_R(\psi \mid \hat{\omega}),$$

en el sentido que la equivalencia

$$\Gamma \models_{R,T}^\alpha \psi \text{ sii } J_{R,T}(\psi \mid \Gamma) \geq \alpha$$

siempre suceda. La medida de implicación $J_{R,T}$ está íntimamente ligada a la *distribución de necesidad condicional* propuesta por Ruspini en [Rus91]. Cuando $T = \{True\}$, o equivalentemente si $[T] = \Omega$, y R es una relación $\otimes$-similitud, la consecuencia de proximidad $\models_{R,T}^\alpha$ es equivalente a la consecuencia aproximada $\models_R^\alpha$ como ha sido previamente probado, pero en general, $\Gamma \models_{R,T}^\alpha \psi$ es una noción más fuerte que $\Gamma \models_{R,T}^\alpha \psi$. Efectivamente, $J_{R,T}(\psi \mid \Gamma) \leq I_R(\psi \mid T \cup \Gamma)$ siempre sucede pero no la inversa.

A continuación presentaremos las más importantes propiedades que verifican las relaciones de proximidad.

Proposición 2.6 *La familia de relaciones de consecuencia de proximidad* $\{\models^{\alpha}_{R,T}\}_{\alpha\in L}$ *satisface las propiedades de* **A***(anidamiento),* **SC** *(supra clásica),* **ST** *(sub-trivial),* **OI***(Ó a la izquierda) y* $\otimes$**-T** *(*$\otimes$*-transitividad). Además si la relación borrosa* R *es de separación entonces la familia satisface la siguiente propiedad:*

- *Si* $\Gamma \models^{1}_{R,T} \psi$ *entonces* $\Gamma \cup T \models \psi$

Prueba: Las primeras tres propiedades son consecuencia inmediata de la definición. Por ejemplo **A** surge simplemente por la transitividad del orden en el reticulado L. **SC** resulta por observar que si los modelos de Γ están incluidos en los de ψ entonces por la reflexividad de R el antecedente de la medida $J_{R,T}(\psi \mid \Gamma)$ siempre es menor o igual que su consecuente. *Sub-trivial* se obtiene por considerar que la relación R es por definición mayor o igual a cero. *Ó a la izquierda* se comprueba fácilmente si tenemos en cuenta que según vimos en la sección 9.1 $I_R(\varphi \vee \psi \mid \Gamma) = \max(I_R(\varphi \mid \Gamma), I_R(\psi \mid \Gamma))$ si Γ es maximal consistente y que para t-norma continua $\otimes$ su residuo satisface que $max(u,v) \otimes\!\!\rightarrow r = \min(u \otimes\!\!\rightarrow r, v \otimes\!\!\rightarrow r)$. El caso de transitivas es muy sencillo. Supongamos que $J_{R,T}(\varphi \mid \Gamma) \geq \alpha$ $J_{R,T}(\psi \mid \varphi) \geq \beta$. Entonces por definición para todo $\omega \in [T]$ resulta:

$$I_R(\Gamma \mid \hat{\omega}) \otimes \alpha \leq I_R(\varphi \mid \hat{\omega}) \qquad \text{y} \qquad I_R(\varphi \mid \hat{\omega}) \otimes \beta \leq I_R(\psi \mid \hat{\omega})$$

luego aplicando transitividad del orden tenemos para todo $\omega \in [T]$:

$$I_R(\Gamma \mid \hat{\omega}) \otimes \alpha \otimes \beta \leq I_R(\psi \mid \hat{\omega})$$

tal como buscábamos probar.

Para probar la última propiedad supongamos que R es de separación y que $\Gamma \models^{1}_{R,T} \psi$. Así tenemos que para todo $\omega \in [T]$: $I_R(\Gamma \mid \hat{\omega}) \leq I_R(\psi \mid \hat{\omega})$. En particular si $\omega \in [\Gamma]$ resulta que $I_R(\Gamma \mid \hat{\omega}) = 1$ y como consecuencia también $I_R(\psi \mid \hat{\omega}) = 1$. Pero por la propiedad de separación de R esto último sucede si y sólo si $\omega \in [\psi]$. Luego hemos probado que todo modelo de T y Γ también es modelo de ψ. □

La relación $\models^{\alpha}_{R,T}$ no satisface la propiedad de *Corte* ni la propiedad de descomposición, i.e., puede ser el caso que $\hat{\omega} \models^{\alpha}_{R,T} \Gamma$ sin que $\hat{\omega} \models^{\alpha}_{R,T} \hat{\omega}'$ sea verdadero para ningún $\hat{\omega}' \supseteq \Gamma$.

Antes de proseguir necesitamos introducir una nueva propiedad que nos permitirá caracterizar a los nuevos operadores.

Definición 2.9 *Dada una familia de operadores de consecuencia* $\{\vdash_{\alpha}\}_{\alpha\in L}$ *diremos que es de aproximación coordinada si satisface la siguiente propiedad:*

Coo' $\hat{\omega} \vdash^{\alpha} \psi$ *si y sólo si para todo* $\omega' \in [T]$ *sucede:*

$$\bigvee_{\{\omega" \mid \hat{\omega}" \models \psi\}} \bigwedge_{\{\phi \mid \hat{\omega}" \vdash \phi\}} \hat{\omega}' \models\!\!\approx \phi \geq (\bigwedge_{\{\delta \mid \hat{\omega} \models \delta\}} \hat{\omega}' \models\!\!\approx \delta) \otimes \alpha$$

El siguiente teorema provee de condiciones suficientes para que una familia de relaciones de consecuencias se correspondan con una medida de implicación $J_{R,T}$.

Teorema 2.5 *Sea* $\mathcal{L}$ *un lenguaje proposicional, y* $\{\vdash^{\alpha}\}_{\alpha\in L}$ *una familia anidada de relaciones binarias en* $\mathcal{P}(\mathcal{L})$*. Definimos* $T = \{q \in \mathcal{L} \mid \{True\} \vdash^{1} \{q\}\}$*. Si la familia* $\{\vdash^{\alpha}\}_{\alpha\in L}$ *de relaciones de consecuencia es* supra clásica *y* sub-trivial*, y satisface las propiedades de:* Ó a izquierda *y* Aproximación Coordinada.

Entonces, existe una relación reflexiva y $\otimes$*-transitiva* R *en* $\Omega \times \Omega$ *tal que* $\Gamma \vdash^{\alpha} \psi$ *si y sólo si* $J_{R,T}(\psi \mid \Gamma) \geq \alpha$.

Más aún, $\vdash^{\alpha}$ *satisface:*

1. Supraclásicalidad estricta *si y sólo si* R *es una relación de separación estricta.*

2. Simetría restringida: *Para todo* $\omega, \omega' \in \Omega_T$, $\forall \phi \in \hat{\omega}' : \hat{\omega} \models^{\alpha} \phi$ *si y sólo si* $\forall \psi \in \hat{\omega} : \hat{\omega}' \models^{\alpha} \psi$, *si y sólo si* R *es una* $\otimes$*-similitud.*

Prueba: Definimos $R : \Omega \times \Omega \to L$ como en el teorema de caracterización 2.2 para consecuencia aproximada, i.e.,

$$R(\omega, \omega') = \bigwedge_{\{\phi \mid \hat{\omega'} \models \phi\}} \hat{\omega} \mathrel{|\!\approx} \phi$$

Por definición R es reflexiva. También extendemos la relación de consecuencia para conjuntos del lado de las conclusiones como sigue:

$$\Gamma \vdash^{\alpha} M \qquad sii \qquad \bigwedge_{\phi \in M} \Gamma \mathrel{|\!\approx} \phi \geq \alpha$$

Esas dos definiciones nos permiten definir en forma alternativa a R como $R(\omega, \omega') = \hat{\omega} \mathrel{|\!\approx} \hat{\omega}'$. La siguiente observación será útil para el resto de la prueba:

$$\bigwedge_{\{\phi \mid \hat{\omega}'' \models \phi\}} \bigvee_{\{\hat{\omega}' \mid \hat{\omega}' \models \phi\}} \bigwedge_{\{\psi \mid \hat{\omega}' \models \psi\}} \hat{\omega} \mathrel{|\!\approx} \psi \quad = \quad \bigwedge_{\{\phi \mid \hat{\omega}'' \models \phi\}} \hat{\omega} \mathrel{|\!\approx} \phi$$

Tomando en cuenta esa observación y las definiciones que le precedieron, la propiedad de $\otimes$-transitividad es probada como sigue. Primero nótese que $\hat{\omega} \mathrel{|\!\approx} \hat{\omega}\prime$ si y sólo si para toda fórmula $\delta \in \hat{\omega}\prime : \hat{\omega} \mathrel{|\!\approx} \delta$ y que por la propiedad 4 eso es equivalente a que $\forall \hat{\omega}\prime\prime \in [T]$ se verifique que:

$$\bigwedge_{\{\delta \mid \hat{\omega}\prime \models \delta\}} ((\bigwedge_{\{\psi \mid \hat{\omega} \models \psi\}} \hat{\omega}'' \mathrel{|\!\approx} \psi) \otimes\!\!\longrightarrow \bigvee_{\{\omega^* \mid \hat{\omega}^* \models \delta\}} \bigwedge_{\{\phi \mid \hat{\omega}^* \models \phi\}} \hat{\omega}'' \mathrel{|\!\approx} \phi) \geq \sup\{\alpha \mid \hat{\omega} \vdash^{\alpha} \hat{\omega}\prime\}$$

Usando la observación previa, podemos reescribir la última expresión como:

$$(\bigwedge_{\{\psi \mid \hat{\omega} \models \psi\}} \hat{\omega}'' \mathrel{|\!\approx} \psi \;\; \otimes\!\!\longrightarrow \bigwedge_{\{\delta \mid \hat{\omega}\prime \models \delta\}} \hat{\omega}'' \mathrel{|\!\approx} \delta) \geq \hat{\omega} \mathrel{|\!\approx} \hat{\omega}\prime$$

y usando las definiciones de R obtenemos la propiedad de $\otimes$-transitividad buscada.
El final de la primera parte de la prueba se alcanza considerando que $\Gamma \vdash^{\alpha} \psi$ si y sólo si (por *Ó a izquierda*) $\hat{\omega} \vdash^{\alpha} \psi$ para todo $\omega \in [\Gamma]$ si y sólo si (por propiedad 4)

$$\bigwedge_{\{\omega' \mid \omega' \in [T]\}} (\bigvee_{\{\omega" \mid \hat{\omega"} \models \psi\}} \bigwedge_{\{\phi \mid \hat{\omega"} \models \phi\}} \hat{\omega}' \mathrel{|\!\approx} \phi \geq (\bigwedge_{\{\delta \mid \hat{\omega} \models \delta\}} \hat{\omega}' \mathrel{|\!\approx} \delta) \otimes \alpha)$$

si y sólo si (puesto que $\otimes$ es continua) para todo $\omega \in [\Gamma]$:

$$\bigwedge_{\{\omega' \mid \omega' \in [T]\}} ((\bigwedge_{\{\delta \mid \hat{\omega} \models \delta\}} \hat{\omega}' \mathrel{|\!\approx} \delta) \otimes\!\!\longrightarrow \bigvee_{\{\omega" \mid \hat{\omega"} \models \psi\}} \bigwedge_{\{\phi \mid \hat{\omega"} \models \phi\}} \hat{\omega}' \mathrel{|\!\approx} \phi) \geq \alpha$$

lo cual es equivalente a $J_{R,T}(\psi \mid \Gamma) \geq \alpha$ si volvemos a tomar en cuenta la definición de R.

Cuando la familia $\{\vdash^{\alpha}\}_{\alpha \in L}$ satisface las propiedades adicionales, $R : \Omega \times \Omega \to L$ es definida como:

$$R(\omega, \omega') = \begin{cases} \hat{\omega} \mathrel{|\!\approx} \hat{\omega}' & si\, \omega \in [T] \\ \hat{\omega}' \mathrel{|\!\approx} \hat{\omega} & si\, \omega' \in [T] \\ \min(\hat{\omega} \mathrel{|\!\approx} \hat{\omega}', \hat{\omega}' \mathrel{|\!\approx} \hat{\omega}) & si\;\; \omega\, y\, \omega' \notin [T] \end{cases}$$

Por construcción obviamente R es simétrica y reflexiva.

La propiedad de separación fuerte es probada como sigue:

Primero consideremos el paso de derecha a izquierda. Supongamos que R es una separación estricta y definamos $\models^{\alpha}_{R,T}$. Entonces $\Gamma \models^{1}_{R,T} \psi$ si y sólo si para todo $\omega \in [T] : I(\Gamma \mid \hat{\omega}) \leq I(\psi \mid \hat{\omega})$. Además, si $\omega \in [\Gamma]$ resultará que $I(\Gamma \mid \hat{\omega}) = 1$ por reflexividad y por lo tanto $I(\psi \mid \hat{\omega}) = 1$. Debido a la separación estricta, lo último implica que $\omega \in [\psi]$.

Para la otra dirección, supongamos que la familia $\{\vdash^{\alpha}\}_{\alpha \in L}$ satisface la propiedad de separación estricta pero la relación borrosa definida arriba no lo hace. Entonces deberá existir un modelo $\omega \in [T]$, $\omega \notin [\Gamma]$ y tal que $I(\Gamma \mid \omega) = 1$. Sea $\{\omega_i\}_{i \in I}$ una sucesión de modelos tal que $\omega_i \in [\Gamma]$ y $\sup R(\omega, \omega_i) = 1$. Entonces tomamos una fórmula $\lambda \in \Gamma$ tal que $\omega \not\models \lambda$. Pero, por la propiedad de coordinación $\omega \vdash^{1} \lambda$. Lo cual nos da una contradicción.

□

Presentadas y caracterizadas las nociones contextuadas de consecuencia aproximada y de proximidad estamos en condiciones de presentar una formalización del silogismo extrapolativo mencionado al comienzo de nuestra presentación.

$$\frac{\varphi' \models^{\alpha}_{T1} \varphi, \qquad \varphi \models^{\beta}_{T2} \psi}{\varphi' \models^{\alpha \otimes \beta}_{T1 \cap T2} \psi}$$

que debe ser leído como, "si φ' en el contexto de $T1$ está cercana en grado α a φ y si los modelos de $T2$ está en grado β tan próximos a φ como lo están de ψ entonces es claro que φ' en el contexto de $T1 \cap T2$ está al menos $\alpha \otimes \beta$-cercana a ψ". En la sección final daremos un par de ejemplos donde este silogismo tiene una aplicación directa.

2.6 Otros ejemplos

2.6.1 Razonamiento basado en Casos

El razonamiento basado en casos (CBR) consiste en sugerir una solución a una situación problemática nueva, a partir de una base de casos cuyas descripciones y resoluciones son conocidas, utilizando como información adicional una medida de proximidad entre descripciones de problemas (y eventualmente de soluciones). Los casos suelen ser descritos en términos de pares *Atributo-Valor* los que a su vez se agrupan en atributos de entrada y de salida. Las metodologías de razonamiento basado en casos, en general, asumen el principio de que: "*problemas parecidos requieren soluciones parecidas*" donde la idea de parecido está asociada a la existencia de algún tipo de "métrica" R_p para dar cuenta del grado de proximidad entre descripciones de problemas y otra R_s para cuantificar la proximidad de soluciones. Esas medidas de similitud juegan un rol crucial en estos modelos de razonamiento y aquí, serán representadas por una relaciones borrosas reflexiva.

Para cada caso o par *problema-solución* (p_i, s_i), hay diferentes maneras de plasmar el principio de "*cuanto más parecida es la descripción p_0 del nuevo problema a p_i más parecida será la solución conocida s_i a la buscada s_0* ". Una de ellas recibe el nombre de determinística (tal como es señalado en [DEG+99]) y suele ser presentada como:

$$\text{cuanto más parecido es } X \text{ a } [p_i]^*_{R_p} \text{ más parecido será } Y \text{ a } [s_i]^*_{R_s}$$

donde X e Y son vectores de valores de atributos correspondientes a descripciones de problemas y soluciones, respectivamente, y $[p_i]^*_{R_p}$ y $[s_i]^*_{R_s}$ representan las aproximaciones superiores de p_i y s_i respecto de las funciones de proximidad R_p y R_s. Esta forma determinítica puede ser caracterizada como una regla borrosa $p_i^* \to s_i^*$ cuya función característica para cada par de valores (p, s) está dada por la siguiente expresión:

$$\mu_{p_i^* \to s_i^*}(p, s) = [p_i]^*_{R_p}(p) \otimes\!\!\longrightarrow [s_i]^*_{R_s}(s) \tag{2.7}$$

Si centramos nuestro interés en el núcleo de esta regla, estaremos capturando la idea de que la medida de proximidad entre las descripciones de problemas determina una cota inferior para la medida de proximidad entre las descripciones de soluciones.

Desde un punto de vista más formal podemos considerar modelos como pares de índices $P \times S$ donde P y S representarán nombres de problemas y soluciones respectivamente, y la relación de proximidad entre ellos como $R = R_p \times R_s$ tal que:

$$R(\omega, \omega') = R((p,s),(p',s')) = R_p \times R_s((p,s),(p',s')) = \min(R_p(p,p'), R_s(s,s'))$$

Nótese que las correspondientes relaciones marginales de R respecto de P y S son R_p y R_s[3]. Claramente en este contexto lógico, la regla 2.7 se corresponde con la noción de consecuencia de proximidad (aceptando un teorema de la deducción que más tarde probaremos), en grado 1 tomando como teoría la descripción del problema a través de la regla $p_i \to s_i$. Sobre este punto vale la pena aclarar que hasta ahora ha quedado implícito que cada caso o par problema-solución genera una única regla borrosa cuyo antecedente y consecuente tiene por función característica es triangular, pero eso no debe ser necesariamente así, i.e. no necesariamente el par (p_i, s_i) representa un único mundo.

La anterior formalización puede ser generalizada si asociamos a cada caso (p_i, s_i) un peso α_i y la "debilitamos" de la siguiente forma:

$$\alpha_i \otimes\!\!\longrightarrow ([p_i]^*_{R_p}(p) \otimes\!\!\longrightarrow [s_i]^*_{R_s}(s))$$

Intuitivamente, esta generalización expresa que $\alpha_i \otimes R_p(p_i, p)$ es la cota inferior de $R_s(s_i, s)$, es decir "aumentamos el error" en la apreciación de dicha cota.

Si bien ambas reglas permiten una caracterización del principio de razonamiento de los CBR, ellas sólo nos indican un espacio de soluciones posibles para el problema p, i.e. $\{s \mid \alpha_i \otimes R_p(p_i, p) \leq R_s(s_i, s)\}$, pero no la manera de seleccionar una de entre todas ellas. Parece razonable, proponer como solución s a partir de un caso (p_i, s_i), a la más próxima a s_i según R_s. Bajo ese criterio, resulta que deberíamos tomar $s = s_i$ para cada par (p_i, s_i) de la base de casos. Luego surge la necesidad de valuar la bondad de la solución s_i aportado por cada caso conocido. Claramente, dicho valor se corresponde con la próximidad entre la descripción de p y de p_i según R_p. Dicho en fórmulas:

Si tenemos la siguiente regla:	$\alpha_i \leq ([p_i]^*_{R_p}(p) \otimes\!\!\longrightarrow [s_i]^*_{R_s}(s))$
y si el grado de similitud entre p y p_i es:	$\beta_i \leq R_p(p_i, p)$
entonces es razonable asumir que:	$\alpha_i \otimes \beta_i \leq R_s(s_i, s)$.

Si admitiéramos la posibilidad de describir los casos de la base en forma parcial, o sea que el conjunto de valores conocidos de atributos de un caso pueda ser un subconjunto propio de $P \times S$, la regla que representa el principio de razonamiento por similitud no cambiaría, aunque ahora las aproximaciones superior no serían funciones triángulares sinó trapezoidales. Si además permitimos que también el caso a resolver pueda estar parcialmente descrito, entonces el esquema inferencial anterior debería ser cambiado reemplazando las medidas de similitud entre descripciones de problemas y soluciones completas, por las medidas de implicación respectivas: I_{R_p} y I_{R_s}.

En cualquiera de esos casos, es posible reconocer un patrón inferencial tipo *modus ponens* y es fácil describir esos esquemas inferenciales en términos de los operadores de consecuencia graduada de aproximación y de proximidad, tomando como teoría el conjunto $T = \{p_i \to q_i \mid (p_i, q_i)$ *es un problemas de solución conocida*$\}$:

[3]Dada una relación borrosa R con dominio en $U \times V$, la relación marginal R_u es definida como $R_u(u_1, u_2) = \sup\{R((u_1, v), (u_2, v)) \mid v \in V\}$ para todo $u_1, u_2 \in U$.

Si tenemos:	$p_i \models^{\alpha_i}_{R,T} s_i$
y si:	$p \models^{\beta_i}_{R} p_i$
entonces inferir que:	$p \models^{\alpha_i \otimes \beta_i}_{R,T} s_i$.

Si la base de casos cuenta con más de una instancia es natural tomar el máximo de todas los $\alpha_i \otimes \beta_i$ como la ponderación de la similitud de la solución propuesta s_i a la desconocida s.

2.6.2 Interpolación

Los sistema de control borroso suele ser presentado como un conjunto de reglas borrosas definidas sobre el dominio multidimensional $U_1 \times \cdots \times U_n \times V_1 \times \cdots \times V_m$ con variables de entrada $\{X_i\}_{1 \leq i \leq n}$ y de salida $\{Y_j\}_{1 \leq j \leq m}$, sobre los dominios $U_1, \ldots, U_n$ y $V_1, \ldots, V_m$, respectivamente. Así un sistema con r reglas que trabajen con múltiples entredas y salidas, tendría el siguiente aspecto:

R.1 :	**Si**	X_1 está en A_1^1 y	...	y X_n está en A_n^1	**entonces**	Y_1 está en B_1^1 y ... y Y_n está en B_m^1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
R.r :	**Si**	X_1 está en A_1^r y	...	y X_n está en A_n^r	**entonces**	Y_1 está en B_1^r y ... y Y_n está en B_m^r

Donde A_i^k y B_j^k para $1 \leq k \leq r$, $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$ son conjuntos borrosos. La interpretación más difundida es que cada regla formaliza la idea que: "*cuanto mayor es el grado de pertenencia de los valores que toman las variables de entradas a sus conjuntos de referencia, mayor será el grado de pertenencia de las valores de salida a sus correspondientes conjuntos de referencia*". Nuevamente aparece la idea que una "medida" sobre los valores de entrada ofrece una cota inferior sobre una "medida" de los datos de salida. La analogía con el ejemplo anterior se magnifica si tenemos en cuenta que por lo general todos los conjuntos borrosos de una regla de control son normalizados. En esas circunstancias, podemos recurrir a la Proposición 2.1 del presente capítulo, y para considerar a cada uno de ellos como definido por un núcleo y una función de similitud borrosa. Así, la noción del grado de permanencia queda sustituida por el grado de similitud y la interpretación de una regla de control se vuelve muy parecida al principio que gobierna la inferencia basada en casos.

Para ser aún más claros, analicemos un caso donde los conjuntos de entrada y salida son unitarios y que contiene sólo dos reglas de control enunciadas como sigue:

R.1 :	**Si**	X está en	A^1	**entonces**	Y está en	B^1
R.2 :	**Si**	X está en	A^2	**entonces**	Y está en	B^2

Obviamente esta es una descripción incompleta de la relación funcional entre valores de entrada/salida. Asumamos que estamos en la situación en que la variable X toma el valor x_0 (i.e. $X = x_0$) y deseamos conocer su correspondiente salida haciendo uso de las reglas de control. La interpretación mencionada anteriormente indicaría que cuanto más similar sea el valor x_0 al núcleo de A^i, más similares deberían ser los apropiados valores de Y a B^i con $i = 1, 2$. Nuevamente podemos considerar el modelo de Kripke $\mathcal{M} = \langle U \times V, R, \models \rangle$, donde U y V son los dominios de A^i y B^i con $i = 1, 2$, respectivamente, y $R = S_u \times S_v$, i.e. la relación producto de las similitudes sobre los dominios U y V. Tomemos la siguiente nomenclatura $p =$ "$X = x_0$", $q_i =$ "X está en A_i", $r_i =$ "Y está en B_i" con $i = 1, 2$. Luego las reglas de control anteriores pueden ser modeladas como sigue:

$$q_i \models^1_R r_i \qquad \text{con} \qquad i = 1, 2$$

Esta expresión formal deja nuevamente en claro que para cada entrada x tenemos un conjunto de valores y que Y puede tomar en orden a satisfacer la restricción $A_i(x) \leq B_i(y)$.

Ahora si expresamos el grado en el cual la proposición "X está en A_i" es implicada por "$X = x_0$" a través de:

$$p \models^{\alpha_i} q_i \qquad \text{con} \qquad \alpha_i = I_R(q_i \mid p) \quad \text{e} \quad i = 1, 2$$

podemos combinar las dos formas de representar nuestro conocimiento mediante el siguiente esquema inferencial:

$$\frac{\begin{array}{ccc} p \models^{\alpha_1} q_1 & ; & p \models^{\alpha_2} q_2 \\ q_1 \models^{1}_{R} r_1 & ; & q_2 \models^{\alpha_i}_{R} r_2 \end{array}}{p \models^{\alpha_1} r_1 \quad ; \quad p \models^{\alpha_2} r_2}$$

En el caso de los sistemas de control borroso la solución propuesta no será r_1 o r_2 calificadas con algún grado de verosimilitud, tal fuera el caso en los CBR's, sino una tomada de la intersección $[r_1^*]_{\alpha_1} \cap [r_2^*]_{\alpha_2}$. Aquí aparece la idea de interpolación, ya que no elegimos entre las soluciones conocidas sino que "producimos" una como combinación de ellas. La elección en si misma es un proceso que no puede ser modelado aún en este formalismo lógico. En la práctica esa tarea es llevada a cabo a tavés de un procesos extralógico denominada "desfuzzificación" que tiene en cuenta todo el conjunto borroso $[r_i^*]$ y no sólo su α_i-corte.

Como es probado en [DEG+97] los resultados mencionado aquí puede ser generalizados para contemplar reglas de control que sean graduadas y con contexto diferentes para enunciar dichas reglas y las instanciaciones de las variables de entrada. Ellos condensan esa condiciones en la siguiente regla de inferencia:

$$\frac{\begin{array}{c} p \models^{\alpha}_{K} q \\ q \models^{\beta}_{K'} r \end{array}}{p \models^{\alpha \otimes \beta}_{K \cap K'} r}$$

En los capítulos que siguen introduciremos varias formalizaciones lógicas de las relaciones de consecuencia mencionadas en el presente.

Capítulo 3

Lógica Condicional basada en similitud

Las llamadas lógicas condicionales tienen una larga tradición en la lógica contemporánea y sus sistemas son extensiones de la lógica clásica. Desde sus orígenes han sido propuestas con el fin de caracterizar formalmente los distintos usos pragmáticos en el lenguaje natural de la sentencia *"Si ... entonces ..."*. Una excelente cronología y análisis, desde un punto de vista lógico-filosófico, de la mayoría de estas lógicas, fue realizada por Sanford en [San92]. Aquí sólo señalaremos que, en general cada clase de sentencias condicionales tiene asociada una forma o tipo de razonamiento (deónticos, indicativos, subjuntivos, contrafácticos, *Prima Facie*, temporales, de causalidad, etc.) y que las descripciones sintácticas de estas lógicas han tenido por objetivo reflejar estas distintas nociones de consecuencia dentro del lenguaje objeto. En las últimas décadas esta área de investigación ha despertado el interés de los investigadores de Inteligencia Artificial (ejemplo paradigmático es el artículo de Ginsberg [Gin86]), quienes han producido una gran diversidad de sistemas que comienzan con una crítica al llamado condicional material basada en el hecho que éste es verdadero siempre que el antecedente es falso. En la mayoría de los casos este cuestionamiento es superado a través de un tratamiento no clásico de los enunciados condicionales, como por ejemplo el asumido en los sistema de condicionales "derrotables" (usualmente conocidos como *defeasible conditionals* a los cuales volveremos en el Capítulo 7).

En términos generales el estudio de los sistemas condicionales involucra, por un lado, la elaboración de distintos tipos de semánticas para cada uno de sus usos lingüísticos y, por otro lado, el del comportamiento inferencial de los nuevos tipos de condicionales propuestos, dando lugar a las preguntas acerca de la posibilidad de construir una teoría unificada de los condicionales y de las condiciones mínimas que debe cumplir una conectiva para ser considerada un condicional y si esta puede o no tener una definición veritativa funcional .

Desde el área de razonamiento aproximado también se han propuesto interpretaciones para la sentencia *"Si ... entonces ..."* basada en lo que podríamos denominar genéricamente, medidas condicionales, entre las cuales podemos citar a la de plausibilidad ([FH99]), la de probabilidad ([Ada75]) y la de posibilidad ([Dub86]). En ese mismo sentido han sido presentadas interpretaciones que hacen uso de la teoría de conjuntos difusos (fuzzy sets, [Zad65]) y de conjuntos "groseros" (rough sets, [Paw82]). La mayoría de estos enfoques "numéricos" tienen en común que la semántica del condicional está basada en una estructura de Kripke enriquecida con una función sobre los mundos posibles o sobre conjuntos de mundos posibles que permite caracterizar a la correspondiente medida condicional.

Esa misma línea de trabajo nos guiará a lo largo del presente capítulo, para dar cuenta de las nociones de consecuencia aproximada y de proximidad presentadas en el capítulo anterior y basadas en las medidas condicionales $I_R(\cdots \mid \ldots)$ y $J_R(\cdots \mid \ldots)$.

Para ello, emplearemos dos técnicas diferentes: una en el marco de la lógica clásica y otra en

un contexto multivaluado. En el primer caso, extenderemos la lógica proposicional clásica con tres familias de operadores binarios que representarán las familias de relaciones de consecuencia aproximada y de proximidad (mencionadas en los respectivos teoremas de representación del capítulo precedente) y los operadores de consistencia graduada.

En el segundo caso, extenderemos una lógica multivaluada con dos operadores binarios que representarán directamente las medidas de implicación: I_R y J_R. En ningún caso permitiremos el anidamiento de estos nuevos operadores binarios, dada nuestra pretensión de que ellos reflejen a nivel sintáctico las nociones de consecuencia y consistencia, que claramente no lo son. Además ninguno de ellos tendrá una interpretación veritativa funcional.

En este capítulo sólo tomaremos en cuenta un lenguaje proposicional de alfabeto finito que denotaremos $\mathcal{L}_k$ o sea que nuestro lenguaje estará generado por un conjunto de variables proposicionales $\{p_1, \ldots, p_k\}$ con k finito, un conjunto de operadores $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow\}$, delimitadores como $\{, (, [, \},),]$ y las familias de operadores ya mencionadas cuya cardinalidad dependerán de la cardinalidad del conjunto G.
Además, la estructura semántica $M = (W, R, \models_M)$ que utilizaremos aquí será una restricción de la presentada al final del capítulo previo: el conjunto W será equivalente al conjunto de todas las interpretaciones booleanas Ω. En otras palabras, la cardinalidad de W será de 2^{2^k} y $\models_M$ asocia a cada elemento $\omega \in W$ una única e irrepetible interpretación de las variables proposicionales, i.e. $\models_M$ puede ser visto como una biyección entre los índices de W y el conjunto de todas las funciones de interpretación del lenguaje proposicional generado a partir de $\{p_1, \ldots, p_k\}$.

3.1 Lógicas Multicondicionales

En esta sección presentaremos dos familias de lógicas que denominaremos multicondicionales debido a que sus lenguajes serán el resultado de extender el lenguaje de la lógica proposicional clásica (con alfabeto finito) con una familia de operadores común a ambas y sendas familias de operadores binarios. Así definiremos la lógica multicondicional aproximada que contiene en su lenguaje la familia de operadores $\{>_\alpha\}_{\alpha \in G}$ y la lógica multi-condicional de proximidad que utiliza la familia de operadores $\{\gg_\alpha\}_{\alpha \in G}$, y que tendrán en común la familia de operadores $\{>_\alpha<\}_{\alpha \in G}$, donde G es tal que: $\{0, 1\} \subseteq G \subseteq [0, 1]$. En cada caso podemos describir el conjunto de fórmulas que consideraremos bien formadas como sigue.

Definición 3.1 *El conjunto de fórmulas condicionales de las lógicas multicondicionales aproximada (resp. de proximidad) denotado por ${\mathcal{L}_\mathcal{I}}^k$ (resp. ${\mathcal{L}_\mathcal{J}}^k$) está constituído por los siguientes elementos:*

- *Si p es una fórmula proposicional en $\mathcal{L}_k$ entonces también es una fórmula multicondicional aproximada (resp. de proximidad).*
- *Si p y q son fórmulas proposicionales en $\mathcal{L}_k$ entonces para todo $\alpha \in G$: $p >_\alpha q$ (resp. $p \gg_\alpha q$) es una fórmula multicondicional aproximada (resp. de proximidad).*
- *Si p y q son fórmulas proposicionales en $\mathcal{L}_k$ entonces para todo $\alpha \in G$: $p >_\alpha< q$ es una fórmula multicondicional aproximada (resp. de proximidad).*
- *Si φ y ϕ son fórmulas multicondicionales aproximada (resp. de proximidad) entonces $\varphi \circ \phi$ es también una fórmula multicondicional aproximada (resp. de proximidad), donde $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$*
- *Si φ es una fórmula multicondicional aproximada (resp. de proximidad) entonces $\neg\varphi$ también lo es (resp. de proximidad).*
- *Las fórmulas multicondicionales aproximadas (resp. de proximidad) son únicamente generadas por la reglas precedentes.*

Las *condiciones de satisfactibilidad*, dado un modelo $M = (W, R, \models_M)$, y fórmulas p and q of $\mathcal{L}_k$, pueden ser presentadas como sigue, escribiremos $(M, \omega) \models \varphi$ en lugar de $\models_M (\omega, \varphi) = 1$:

$$\begin{array}{lll} (M,\omega) \models p >_\alpha q & \text{sii} & I_R^M(q \mid p) \geq \alpha, \\ (M,\omega) \models p \gg_\alpha q & \text{sii} & J_{R,\varpi}^M(q \mid p) \geq \alpha, \\ (M,\omega) \models p \gtrless_\alpha q & \text{sii} & C_R^M(q \mid p) \geq \alpha. \end{array}$$

El resto de las condiciones son las usuales. Estas definiciones de satisfactibilidad dejan claro el rol de las fórmulas $p >_\alpha q$ y $p \gg_\alpha q$ en el lenguaje objeto como representantes de cotas inferiores de $I_R^M(q \mid p)$ y $J_R^M(q \mid p)$ respectivamente. Nótese que la condición de satisfactibilidad para los operadores $>_\alpha$ y $\gtrless_\alpha$ no son locales a cada mundo como en el caso restante. Tal como las definimos, las interpretaciones de estos operadores corresponden a identificar verdad en un mundo con validez en un modelo. Esta visión "global" nos permitirá describir propiedades que combinen aspectos que ocurren en diferentes mundos, como por ejemplo transitividad y simetría. Sobre este punto es importante remarcar que si nos hubiéramos decidido a tomar una definición local habríamos tenido que permitir el anidamiento de estos operadores para poder expresar esta clase de propiedades.

Señalemos una primera relación semántica existente entre los operadores $\{>_\alpha\}_{\alpha \in G}$ y $\{\gg_\alpha\}_{\alpha \in G}$. Es sencillo probar que para cualquier modelo $M = (W, R, \models) \in \Sigma_{if}$ con $i \geq 2$, la validez de las fórmulas $\top >_\alpha p$ y $\top \gg_\alpha p$ coinciden, i.e. una será válida en dicho modelo si y sólo si la otra lo es. Por otra parte es interesante también indicar que con la interpretación propuesta para la familia de operadores binarios $\{\gg_\alpha\}_{\alpha \in G}$, es posible a partir de estos definir familias de operadores monádicos de posibilidad $\{\Diamond_\alpha\}_{\alpha \in L}$ y de necesidad $\{\Box_\alpha\}_{\alpha \in L}$ (los cuales serán nuestro objeto de estudio en el próximo capítulo) de la siguiente manera: $\Diamond_\alpha p = \top \gg_\alpha p$ y $\Box_\alpha p = \neg(\top \gg_\alpha \neg p)$.

En lo que sigue hablaremos de sistema condicional (como conjunto de axiomas y reglas de inferencia) sin distinguirlo de la lógica condicional que genera por clausura. En tal sentido a veces mencionaremos por ejemplo a **CSI**(G) pensándolo simplemente como un conjunto de axiomas y reglas y otras como un conjunto saturado por aplicación de las reglas de deducción. Creemos que esta ambigüedad no producirá confusiones.

3.1.1 Lógicas multicondicionales aproximadas

A continuación daremos una lista de fórmulas condicionales que serán utilizadas para definir axiomáticamente lógicas condicionales aproximadas. Acompañaremos a cada una de ellas con una sigla que la denotará a la largo de nuestra presentación y que en general coincidirá con la que presentáramos en el capítulo anterior.

A: $p >_\alpha q \to p >_\beta q$, con $\beta \leq \alpha$.
ST: $p >_0 q$.
ST': $p \to \neg(p >_\beta \bot)$, con $\beta > 0$.
ST": $\bot >_1 p$.
OI: $(p \vee q >_\alpha r) \leftrightarrow (p >_\alpha r) \wedge (q >_\alpha r)$.
OD: $(\bar{w} >_\alpha p \vee q) \leftrightarrow (\bar{w} >_\alpha p) \vee (\bar{w} >_\alpha q)$.
ESC: $(p >_1 q) \equiv (p \to q)$.
$\otimes$-T: $(p >_\alpha q) \wedge (q >_\beta r) \to p >_{\alpha \otimes \beta} r$.
Sim: $p \gtrless_\alpha q \to q \gtrless_\alpha p$
OID: $(q \vee r) \gtrless_\alpha p \leftrightarrow (q \gtrless_\alpha p) \vee (r \gtrless_\alpha p)$
IC: $\bar{w} >_\alpha q \leftrightarrow \bar{w} \gtrless_\alpha q$

donde α y β están en G, p y q pertenecen a $\mathcal{L}_k$, y $\bar{w}$ representa a una conjunción elemental maximal (c.e.m.). Respecto de los axiomas que acabamos de presentar puede verse fácil y rápidamente que reflejan las propiedades mencionadas en el capítulo precedente. De hecho hemos utilizado la misma sigla para facilitar su identificación. Sin embargo dos de ellos son nuevos: **ST'** y **ST"**. Éstos responden a la necesidad de explicitar los supuestos de que el supremo del conjunto vacío es

igual a cero y que el ínfimo de dicho conjunto es uno, respectivamente.

El siguiente paso será enumerar las lógicas condicionales aproximadas que serán de nuestro interés. Para ello seguiremos la convención notacional propuesta por Lemmon y Scott: escribiendo **CSI** para representar la lógica básica y a continuación la inicial o sigla de los axiomas de la lógica en cuestión.

Definición 3.2 *La lógica multicondicional aproximada básica* **CSI**(G) *(o* **CSI** *para abreviar cuando creamos que no es necesario mencionar explícitamente a G) corresponde al mínimo conjunto de fórmulas que contiene a los axiomas de la lógica proposicional clásica PL más los axiomas* **A**,**ST**, **ST'**, **ST"**, **OI**, **OD**, **RLO** *y* **IC**, *y que además es cerrado por las siguientes reglas de inferencia:*

MP: *De* φ *y* $\varphi \to \psi$ *inferir* ψ

CI: *De* $\forall \alpha < \beta : p >_\alpha q$ *inferir* $p >_\beta q$

Sus extensiones serán las lógicas condicionales aproximadas que son cerradas no sólo por modus ponens y continuidad por izquierda, sino también por:

RK: *De* $p \to q$ *inferir* $p >_1 q$ *con p y q in $\mathcal{L}_k$*

y que adicionan los axiomas que mencionaremos en cada caso a continuación:

autoreferente: **CSI·T**(G) *es* **CSI**(G) *cerrada por* **RK**,

de Brouwer: **CSI·TB**$(G) =$ **CSI·T**$(G) +$ **Sim**,

de orden borroso: **CSI·S4**$(G, \otimes) =$ **CSI·T**$(G) +$ $\otimes$**-T**,

de similitud: **CSI·S5**$(G, \otimes) =$ **CSI·T**$(G) +$ **Sim**$+$ $\otimes$**-T**,

Los sistemas lógicos que resultan de adicionar a las descripciones anteriores el axioma **ESC**, corresponden a la versiones estrictas de las precedentes y serán mencionados por la palabra *estricta* a los nombres ya referidos y denotadas como **CSI·#**$^+(G, \otimes)$, dónde $\# =$ **T**, **TB**, **S4**, **S5**.

Nótese que sólo hemos incluído en la denominación de la lógica una referencia a la t-norma $\otimes$ cuando incluimos el axioma $\otimes$**-T** puesto que para el resto es irrelevante. Además las lógicas propuestas serán finitamente axiomatizables si el conjunto G de índices es finito, y recursivamente axiomatizables si G lo es. Es importante señalar que en presencia de la regla de inferencia **RK** el axioma **ST"** se vuelve superfluo. Por último señalemos que la regla infinitaria **CI** es necesaria para garantizar que los operadores $>$ estén cerrados por supremos. Obviamente dicha regla es vacua en el caso que la cadena G es de cardinalidad finita.

Una vez enunciadas nuestras propuestas de lógicas condicionales necesitamos comprobar que se comportan adecuadamente respecto de las respectivas semánticas. Lo primero, y más sencillo, es verificar que los axiomas son válidos en las pretendidas interpretaciones y que las reglas preservan esa validez. Este resultado de correctitud es planteado y probado en el teorema que sigue.

Teorema 3.1 *La siguientes relaciones entre las precedente lógicas y las clases de modelos propuestas al final del capítulo 1 pueden ser enumeradas como:*

- *Si φ es teorema de* **CSI** *entonces es válida en la clase de modelos Σ_{0f}.*
- *Si φ es teorema de* **CSI·T** *entonces es válida en la clase de modelos Σ_{2f}.*
- *Si φ es teorema de* **CSI·TB** *entonces es válida en la clase de modelos Σ_{3f}.*
- *Si φ es teorema de* **CSI·S4** *entonces es válida en la clase de modelos Σ_{4f}.*
- *Si φ es teorema de* **CSI·S5** *entonces es válida en la clase de modelos $\Sigma_{\otimes f}$.*

Y respectivamente puede repetirse la enumeración para los sistemas estrictos (que incorporan el axioma **ESC***)* $\mathbf{CSI}\cdot\#^{+}$*, dónde* $\# = \mathbf{T}, \mathbf{TB}, \mathbf{S4}, \mathbf{S5}$*, respecto a las correspondientes clases de modelos estrictos* Σ_{if}^{+} *con* $i = 2, 3, 4$ *o* $\otimes$*. En el mismo sentido puede enunciarse que las reglas de inferencia preservan validez en las respectivas clases de modelos.*

Prueba: La prueba será referida a cada par $\langle$ sistema lógico, clase de modelo $\rangle$. En cada caso se probará que los axiomas mencionados para una determinada lógica son válidos en la referida clase y que el resto de los axiomas no lo son. En idéntica forma procederemos con las reglas de inferencia. Tanto los axiomas de la lógica proposicional como la regla de modus ponens no serán consideradas.

$\langle \mathbf{CSI}, \Sigma_{0f} \rangle$

A: En este caso sólo es necesario observar que $I_R^M(q \mid p) \geq \alpha$ implica $I_R^M(q \mid p) \geq \beta$, si $\beta \leq \alpha$. Puesto que, dado un modelo $M = (W, R, \models_M)$ y un mundo $\omega \in W$, por definición de satisfactibilidad $(M,\omega) \models p >_\alpha q$ si y sólo si, $I_R^M(q \mid p) \geq \alpha$. Aplicando transitividad resulta que $(M,\omega) \models p >_\beta q$.

ST: Puesto que en nuestros modelos R es una relación total (i.e. definida para todo par de elementos de W) mayor o igual a cero, entonces es claro que para todo fórmula q y mundo ω siempre $I_R^M(q \mid p) \geq 0$ y así $(M,\omega) \models p >_0 q$.

ST′: En esta oportunidad sólo es necesario señalar que por convención el supremo del conjunto vacío es 0. Por lo tanto si p es satisfactible entonces $I_R^M(\bot \mid p) = 0$.

ST": En esta ocasión basta notar que por convención el ínfimo del conjunto vacío es 1. Por lo tanto $I_R^M(p \mid \bot) = 1$.

OI: Nótese que por definición $(M,\omega) \models p \vee q >_\alpha r$ si y sólo si, $I_R^M(r \mid p \vee q) \geq \alpha$. Pero como fue ya probado en el Capítulo 1, $I_R^M(r \mid p \vee q) = \min\{I_R^M(r \mid p), I_R^M(r \mid q)\}$. Por lo tanto $(M,\omega) \models p \vee q >_\alpha r$ si y sólo si, es el caso que $I_R^M(r \mid p) \geq \alpha$ y $I_R^M(r \mid q) \geq \alpha$. Lo que equivale a decir que $(M,\omega) \models p >_\alpha r$ y $(M,\omega) \models q >_\alpha r$.

OD: En este caso es suficiente probar que: $I_R^M(p \vee q \mid \bar{\omega}) \geq \alpha$ si y sólo si $\max\{I_R^M(p \mid \bar{\omega}), I_R^M(q \mid \bar{\omega})\} \geq \alpha$. Pero eso ya fue probado en el Capítulo 1 al presentar las propiedades de la medida de implicación. En este punto es importante remarcar el valor del hecho de que una conjunción elemental maximal $\bar{\omega}$ tenga una relación biunívoca con un índice $\omega \in W$. Si éste no fuera el caso esta propiedad no se verificaría.

OID: Este axioma corresponde semánticamente a la condición: $C_R^M(p \mid q \vee r) \geq \alpha$ si y sólo si $\max\{C_R^M(p \mid q), C_R^M(p \mid r)\} \geq \alpha$. Propiedad que ya fue verificada en el Capítulo 1 para una medida de consistencia.

IC: Dado un modelo M y un mundo ω, debido a las condiciones de satisfactibilidad la interpretación de la fórmula **IC** corresponde a verificar que $I_R^M(q \mid \bar{\omega}) = \sup_{\omega' \models q} R(\omega, \omega') \geq \alpha$ es igual que $C_R^M(q \mid \bar{\omega}) = \sup_{\omega' \models q} R(\omega, \omega') \geq \alpha$. Lo cual es obvio. Nuevamente aquí es crucial el hecho que la relación entre $\bar{\omega}$ y ω sea biunívoca.

CI: Para comprobar que la regla de inferencia **CI** preserva validez supongamos que $\forall \alpha < \beta : p >_\alpha q$ sucede. Luego eso quiere decir que $I_R^M(q \mid p) > \alpha$ para todo $\alpha < \beta$. Pero eso es equivalente a que $\inf_{w \models p} \sup_{w' \models q} R(w, w') > \alpha$. Lo que a su vez se reduce a que para todo $w \models p$ resulta que $\sup_{w' \models q} R(w, w') > \alpha$ para todo $\alpha < \beta$. Lo cual es equivalente a pedir que para todo $w \models p$ existe un $w'_\alpha \models q$ (dependiente de α también) tal que $R(w, w'_\alpha) > \alpha$. Como además el conjunto de modelos es finito resulta que $R(w, w'_\alpha)$ debe ser mayor o igual a β.

Contraejemplos: Para ver que tanto los axiomas **ESC**, $\otimes$**-T** y **Sim** no son válidos en la clase de modelos Σ_{0f} basta elegir apropiadamente un modelo que sirva de contraejemplo. Para el primer caso alcanza con considerar fórmulas p y q en $\mathcal{L}_k$ tal que $p \to q$ no sea

tautología y un modelo M que sea irreflexivo (i.e. $R(\omega,\omega) < 1$), que contenga un $p \wedge \neg q$-mundo $\omega*$, y asegurando que para todo p-mundo ω exista otro q-mundo ω' distinto del primero tal que $R(\omega,\omega') = 1$. Esto nos asegura que $I_R^M(q \mid p) = 1$, y por lo tanto $(M,\omega*) \models p >_1 q$ pero $(M,\omega*) \not\models p \to q$. El ejemplo corresponde a lo que se conoce como modelo serial.

Para contra-argumentar la validez de $\otimes$-**T** consideramos fórmulas p, q y r lógicamente independientes y proponemos un modelo M tal que para todo p-mundo ω_1 y q-mundo ω_2 $R(\omega_1,\omega_2) = 1$ y para todo q-mundo ω_2 y r-mundo ω_3 $R(\omega_2,\omega_3) = 1$, pero que exista un $\neg p \wedge \neg q \wedge r$-mundo $\omega*$ tal que para todo p-mundo ω_1 $R(\omega_1,\omega*) = 0$. Así resulta que $I_R^M(q \mid p) = 1$ y $I_R^M(r \mid q) = 1$ pero $I_R^M(r \mid p) = 0 < (1 \otimes 1) = 1$.

Como contraejemplo para el axioma **Sim** en Σ_{0f} podemos tomar en consideración el modelo M que tiene la particularidad de que la proximidad desde todos los p-mundos a todo los $\neg p$-mundos es igual a 1 pero que la proximidad desde todos los $\neg p$-mundos a todo los p-mundos es igual a 0. Luego para todo mundo ω, resulta que $(M,\omega) \models p >_1\!< \neg p$, pero no que $(M,\omega) \models \neg p >_1\!< p$.

Finalmente para chequear que la regla de inferencia **RK** no preserva validez en la clase Σ_{0f} basta hacer notar que en la familia de modelos $\mathcal{C} = \{M = (W,R,\models_M) \mid \forall \omega,\omega' \in W : R(\omega,\omega') \leq r < 1$ con r en los reales$\}$, $I_R^M(q \mid p) \leq r$ para todo par de fórmulas p y q. Luego el contra-argumento aparece teniendo en cuenta que la fórmula $p \to p$ es válida en la clase Σ_{0f} pero no la fórmula $p >_1 p$.

$\langle$**CSI·T**, $\Sigma_{2f}\rangle$

RK: Para verificar que esta regla de inferencia preserva validez sólo es necesario considerar alguna tautología de la forma $p \to q$. Dado un modelo $M = (W,R,\models_M)$ en Σ_{2f}, i.e. con R reflexiva, el valor de:

$$I_R^M(q \mid p) = \inf_{\omega \models p} \sup_{\omega' \models q} R(\omega,\omega')$$

es igual a 1 puesto que para todo p-mundo $\omega \in W$ también es un q-mundo debido a que : $(M,\omega) \models p \to q$. Por lo tanto $p >_1 q$ es una fórmula válida en M tal como deseábamos probar.

Contraejemplos: Para probar que la fórmula **ESC** no es válida en la clase Σ_{2f} es suficiente considerar el modelo $M = (W,R,\models_M)$ tal $R(\omega,\omega') = 1$ para todo par de mundos $\omega,\omega' \in W$. Así tomado el modelo valida toda fórmula de la forma $p >_1 q$, pero obviamente no toda fórmula $p \to q$ es una tautología.

Para los axiomas **Sim** y $\otimes$-**T** sólo hace falta notar que los modelos que sirvieron como contraejemplos para esos mismos axiomas en la clase Σ_{0f}, ahora pueden ser reutilizados agregándoles la condidición que para todo mundo $\omega \in W$: $R(\omega,\omega) = 1$, la cual no interfiere con la contra-argumentación.

$\langle$**CSI·TB**, $\Sigma_{3f}\rangle$

Sim: Consideremos cualquier modelo $M = (W,R,\models_M)$ tal que R es reflexiva y simétrica. Por definición $(M,\omega) \models p >_\alpha\!< q$ si y sólo si $C_R^M(q \mid p) = \sup_{\omega \models p} \sup_{\omega' \models q} R(\omega,\omega') \geq \alpha$. Pero por simetría y permutando los supremos, podemos reescribir $C_R^M(q \mid p)$ como igual a $\sup_{\omega' \models q} \sup_{\omega \models p} R(\omega',\omega) \geq \alpha$ lo cual a su vez es equivalente a $C_R^M(p \mid q)$, lo que a su vez indica que $(M,\omega) \models q >_\alpha\!< p$.

Contraejemplos: Para verificar que el axioma **ESC** no es válido en la clase de modelos Σ_{3f}, sólo es necesario reconsiderar el contraejemplo anterior $M = (W,R,\models_M)$ tal $R(\omega,\omega') = 1$ para todo par de mundos $\omega,\omega' \in W$, el cual obviamente satisface reflexividad y simetría. Nuevamente este modelo valida toda fórmula de la forma $p >_1 q$, pero obviamente no toda fórmula $p \to q$ es una tautología.

Para contra-argumentar sobre la validez de $\otimes$-**T**, consideremos las fórmulas p, q y r lógicamente independientes y un modelo $M = (W, R, \models_M)$ tal que R es reflexiva y simétrica y que para todo p-mundo ω_1 y q-mundo ω_2, $R(\omega_1, \omega_2) = R(\omega_2, \omega_1) = 1$ y para todo q-mundo ω_2 y r-mundo ω_3, $R(\omega_2, \omega_3) = R(\omega_3, \omega_2) = 1$, pero que exista un $\neg p \wedge \neg q \wedge r$-mundo $\omega*$ tal que para todo p-mundo ω_1, $R(\omega_1, \omega*) = R(\omega*, \omega_1) = 0$. Así resulta que $I_R^M(q \mid p) = 1$ y $I_R^M(r \mid q) = 1$ pero $I_R^M(r \mid p) = 0 < (1 \otimes 1) = 1$.

$\langle$**CSI·S4**, $\Sigma_{4f}\rangle$

$\otimes$**-T:** Para este caso tomemos en consideración un modelo $M = (W, R, \models_M)$ tal que R es reflexiva y $\otimes$-transitiva. Note que la interpretación del axioma $(p >_\alpha q) \wedge (q >_\beta r) \rightarrow (p >_{\alpha\otimes\beta} r)$ corresponde a:

$$I_R^M(r \mid q) \otimes I_R^M(q \mid p) \leq I_R^M(r \mid p)$$

propiedad que ya fue probada en el Capítulo 1 para las medidas de implicación.

Contraejemplo: De nuevo el ejemplo planteado para el sistema anterior para corroborar la invalidez de **ESC** sigue siendo plausible en este sistema.
La insatisfactibilidad del axioma **Sim** en la clase Σ_{4f} puede ser verificada considerando el modelo $M = (W, R, \models_M)$ tal que R es reflexiva y representa un orden total estricto entre los elementos $\omega \in W$. Más específicamente enumeramos los elementos de W desde 1 a 2^{2^k} dónde k es el número de variables proposicionales y tomamos la relación R como sigue: $\forall \omega_i \in W R(\omega_i, \omega_i) = 1$ y $\forall \omega_i, \omega_j \in W, i < j : R(\omega_i, \omega_j) = 1\, y\, R(\omega_j, \omega_i) = 0$. Claramente para cualquier n, es el caso que $(M, \omega_n) \models \bar{\omega}_i >_1 \bar{\omega}_j$ y no lo es que $(M, \omega_n) \models \bar{\omega}_j >_1 \bar{\omega}_i$ si $i < j$.

$\langle$**CSI·S5**, $\Sigma_{\otimes f}\rangle$

Contraejemplo: Para comprobar que **ESC** no es válida en la clase de modelos $\Sigma_{\otimes f}$, consideremos otra vez el modelo $M = (W, R, \models_M)$ tal $R(\omega, \omega') = 1$ para todo par de mundos $\omega, \omega' \in W$, el cual obviamente satisface reflexividad, simetría y $\otimes$-transitividad. Nuevamente este modelo valida toda fórmula de la forma $p >_1 q$, pero obviamente no toda fórmula $p \rightarrow q$ es una tautología.

$\langle$**CSI·#**$^+$, $\Sigma_{if}^+\rangle$

ESC: Nosotros probaremos ahora que el axioma ESC es válido en toda clase de modelos tal que la relación de accesibilidad satisface la propiedad de separación. Eso probará que todos los sistemas lógicos mencionados con anterioridad que son cerrados por la regla de inferencia **RK**, **CSI·#**, extendidos con el axioma **ESC** son correctos respecto Σ_i^+ dónde $\# = \mathbf{T}, \mathbf{TB}, \mathbf{S4}, \mathbf{S5}$ y $i = 2, 3, 4, \otimes$, respectivamente. Para eso consideremos un modelo $M = (W, R, \models_M)$ en cualquiera de dichas clases Σ_{if}^+, i.e. $R(\omega, \omega') = 1$ si y sólo si $\omega = \omega'$. Supongamos que para todo $\omega \in W$ $(M, \omega) \models p >_1 q$ y por definición esto sucede si y sólo si

$$I_R^M(q \mid p) = \inf_{\omega \models p} \sup_{\omega' \models q} R(\omega, \omega') = 1$$

Lo cual es equivalente a afirmar que para todo $\omega \models p : \sup_{\omega' \models q} R(\omega, \omega') = 1$. Puesto que W es finito la última expresión puede ser enunciada como: para todo $\omega \models p$ existe un $\omega' \models q$ tal que $R(\omega, \omega') = 1$. Pero como la R satisface la propiedad de sepación entonces para todo $\omega \models p$ debe ser $\omega' = \omega$ y por lo tanto $\omega \models q$.

□

Ahora presentaremos la otra cara de la adecuación de nuestros sistemas lógicos a la semántica propuesta. En este caso verificaremos que si una fórmula es válida en una clase de modelos Σ_{if} con

$i = 0, 2, 3, 4, \otimes$ (respectivamente $\Sigma_{i_f}^+$ con $i = 2, 3, 4, \otimes$) entonces es un teorema del asociado sistema lógico **CSI**$\cdot\#$ con $\# = \{\}, \mathbf{T}, \mathbf{TB}, \mathbf{S4}, \mathbf{S5}$ (respectivamente **CSI**$\cdot\#^+$ con $\# = \mathbf{T}, \mathbf{TB}, \mathbf{S4}, \mathbf{S5}$). Este sentido de la adecuación sintáctica-semántica es conocida con el nombre de completitud y aquí será probada utilizando una forma simplificada de la técnica del modelo canónico. La prueba puede ser esquematizada de la siguiente manera. Utilizando el enunciado recíproco de completitud, supondremos que existe una fórmula φ que no es probable en un sistema lógico dado y probaremos que no es válida en la clase de modelos asociada. Así puesto que φ no es probable en el sistema, entonces $\neg\varphi$ será consistente con el conjunto de axiomas que caracterizan el sistema lógico en cuestión. Utilizando un símil del teorema de Lindenbaum demostraremos que el conjunto que contiene a dichos axiomas y a $\neg\varphi$ puede ser extendido a un conjunto maximal consistente. A continuación probaremos que debido a los axiomas **OI** y **OD** la presencia o ausencia de una fórmula condicional pura (i.e. aquella cuyo operador principal es del estilo $>_\alpha$) depende unívocamente de la presencia o ausencia de las fórmulas de la forma $\bar{\omega} >_\alpha \bar{\omega'}$ dónde $\bar{\omega}$ y $\bar{\omega'}$ son c.e.m.'s. Este resultado nos autorizará a construir nuestro modelo canónico teniendo en cuenta únicamente este último tipo de fórmulas condicionales. Luego probaremos que ese modelo canónico pertenece a la clase de modelos considerada. Finalmente debido a que por construcción la fórmula φ no es válida en el modelo propuesto, el que a su vez pertenece a la clase deseada, resulta la invalidez de la fórmula φ en dicha clase de modelos.

Definición 3.3 *Un conjunto de fórmula Γ es llamado maximalmente Λ-consistente (consistente para un sistema lógico Λ) si Γ es Λ-consistente y no existe otro conjunto de fórmulas Λ-consistente que lo tenga como subconjunto propio. Cuando Γ sea maximalmente Λ-consistente, escribiremos Γ es $\Lambda - MCS$.*

Lema 3.1 *(de Lindenbaum) Si Γ es un conjunto de fórmula Λ-consistente entonces existe un conjunto Γ^* tal que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$ siendo Γ^* un $\Lambda - MCS$.*

Prueba: Suponiendo que el conjunto G es al menos recursivamente enumerable, consideremos a $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots$ una enumeración de las fórmulas de nuestro lenguaje condicional. Nosotros definimos el conjunto Γ^+ en la forma usual como la unión de la cadena de conjuntos consistentes $\Delta_0, \ldots, \Delta_n, \ldots$ construídos como sigue:

$$\begin{array}{lcl} \Delta_0 & = & \Gamma \\ \Delta_{n+1} & = & \left\{ \begin{array}{ll} \Delta_n \cup \{\phi_n\}, & Si\ \Delta_n \vdash_\Lambda \phi_n \\ \Delta_n \cup \{\neg\phi_n\}, & \text{en cualquier otro caso} \end{array} \right. \\ \Gamma^+ & = & \bigcup_{n \geq 0} \Delta_n \end{array}$$

La prueba se completa probando que: (1) Δ_n es Λ-consistente para todo n; (2) uno y sólo uno de ϕ y $\neg\phi$ está en Γ^+; (3) Si $\Gamma^+ \vdash_\Lambda \phi$ entonces $\phi \in \Gamma^+$; y finalmente que Γ^+ es $\Lambda - MCS$. Los detalles no son presentados puesto que son bien conocidos. □

Ahora recordaremos un conocido resultado de la lógica proposicional clásica que expresa que toda fórmula es lógicamente equivalente a una disyunción de conjunciones elementales maximales (c.e.m.). Para ello utilizaremos el teorema de Bychovski que establece que:

Teorema 3.2 *(Bychovski) El álgebra de Boole asociada a $\mathcal{L}_k / \equiv$ (el conjunto cociente por equivalencia lógica del lenguaje proposicional finito generado por k variables proposicionales) es isomorfo al álgebra de la partes del conjunto de aplicaciones desde el conjunto de variables proposicionales $\{p_1, \ldots, p_k\}$ a $\{0, 1\}$ (o sea el conjunto de interpretaciones Ω).*

Lema 3.2 *Toda fórmula proposicional $p \not\equiv \bot$ es lógicamente equivalente a una disyunción de conjunciones elementales maximales, la cual será denominada su forma normal disyuntiva distinguida (***FNDD***).*

Prueba: La prueba es inmediata si tomamos en cuenta que toda interpretación tiene asociada una fórmula que sólo es verdadera en ella (y falsa en todas las demás). Si δ_i es la interpretación en cuestión la fórmula $\bar{\omega}_i$ es definida como:

$$\bigwedge_{1\leq j\leq k} a_j$$

dónde

$$a_j = \begin{cases} p_j & \text{si} \quad \delta_i(p_j) = 1 \\ \neg p_j & \text{si} \quad \delta_i(p_j) = 0 \end{cases}$$

Luego la fórmula Φ lógicamente equivalente a $p \not\equiv \perp$ es construída a partir de la disyunción de las $\bar{\omega}_i$ asociadas a cada interpretación δ_i que hace verdadera a p, i.e.

$$\Phi = \bigvee_{\{i|\delta_i(p)=1\}} \bar{\omega}_i$$

con $1 \leq i \leq 2^{2^k}$.
La prueba se concluye usando el teorema de Bychovski para justificar que efectivamente p y Φ son lógicamente equivalentes puesto que ambas tienen el mismo conjunto de interpretaciones que las satisfacen. □

Observación 3.1 *Note que cada $\bar{\omega}_i$ corresponde a lo que hemos dado en llamar una conjunción elemental maximal y que una fórmula p tal que $p \equiv \perp$ no tiene FNDD. Este último hecho es el que nos obliga a incluir los axiomas específicos para $\perp$ en la axiomática de* **CSI** *(y sus extensiones).*

Ahora usaremos el lema anterior para demostrar que en las lógicas condicionales aproximadas aquí propuestas, toda fórmula condicional simple (es decir cuyo operador principal es de la forma $>_\alpha$ para algún $\alpha \in G$) es lógicamente equivalente en el sistema **CSI** (y sus extensiones) a una fórmula condicional simple que tenga por antecedente y consecuente sendas c.e.m.'s . Este resultado nos autorizará a tomar en cuenta sólo este tipo de fórmulas para definir unívocamente un modelo a partir de un conjunto maximal consistentes de ellas (i.e. para toda c.e.m. $\bar{\omega}_i$ y $\bar{\omega}_j$ y todo $\alpha \in G$: una sólo una de $\bar{\omega}_i >_\alpha \bar{\omega}_j$ o $\neg(\bar{\omega}_i >_\alpha \bar{\omega}_j)$ está).

Lema 3.3 *Dado un sistema condicional* **CSI** *toda fórmula $p >_\alpha q$ y $p >_\alpha< q$ con p y q no equivalentes a $\perp$ y $\alpha \in G$ con G recursivamente enumerable, es lógicamente equivalente a una fórmula que sólo contiene c.e.m.'s.*

Prueba: Por el lema 3.2 toda fórmula no equivalente a $\perp$ es expresable en FNDD. Luego

$$p >_\alpha q \equiv (\bigvee_{\{i|\delta_i(p)=1\}} \bar{\omega}_i) >_\alpha (\bigvee_{\{j|\delta_j(q)=1\}} \bar{\omega}_j)$$

Luego aplicando el axioma **OI** tenemos que:

$$p >_\alpha q \equiv \bigwedge_{\{i|\delta_i(p)=1\}} (\bar{\omega}_i >_\alpha (\bigvee_{\{j|\delta_j(q)=1\}} \bar{\omega}_j))$$

Y finalmente aplicando el axioma **OD** obtenemos que:

$$p >_\alpha q \equiv \bigwedge_{\{i|\delta_i(p)=1\}} \bigvee_{\{j|\delta_j(q)=1\}} (\bar{\omega}_i >_\alpha \bar{\omega}_j)$$

Para la consistencia graduada la prueba es como sigue. Puesto que ni p ni q son intrínsecamente inconsistentes por hipótesis tenemos que:

$$p >_\alpha< q \equiv (\bigvee_{\{i|\delta_i(p)=1\}} \bar{\omega}_i) >_\alpha< (\bigvee_{\{j|\delta_j(q)=1\}} \bar{\omega}_j)$$

Luego aplicando el axioma **LRO** resulta:

$$p \gtrdot_\alpha\!\!\lessdot q \equiv \bigvee_{\{i|\delta_i(p)=1\}} (\bar{\omega}_i \gtrdot_\alpha\!\!\lessdot (\bigvee_{\{j|\delta_j(q)=1\}} \bar{\omega}_j))$$

y teniendo en cuenta el axioma **IC** y **OD** en ese orden obtenemos:

$$p \gtrdot_\alpha\!\!\lessdot q \equiv \bigvee_{\{i|\delta_i(p)=1\}} \bigvee_{\{j|\delta_j(q)=1\}} (\bar{\omega}_i >_\alpha \bar{\omega}_j)$$

Así hallamos los dos resultados buscados.

□

Observación 3.2 *Nótese que si en las expresiones finales halladas en el lema anterior tomamos la conjunción como un ínfimo, la disyunción como un supremo y la fórmula condicional entre c.e.m.'s como indicando que la "indistinguibilidad" o la "consistencia" entre los modelos que representan es mayor que α entonces esta expresión no es ni más ni menos que la definición de la medida de implicación o consistencia cumpliendo la condición de ser mayor o igual que α.*

Como fue anunciado con anterioridad, nuestra prueba de completitud pasará por asumir la existencia de una fórmula φ que no es deducible en un sistema lógico condicional y probar que no es válida en la clase de modelos asociada al sistema en que la fórmula en cuestión no es teorema. Para corroborar esa invalidez construiremos un modelo de proximidad que no satisface φ. A tal fin y puesto que la verdad de una fórmula condicional simple en nuestros modelos de Kripke es global (i.e. independiente del mundo donde la verdad sea evaluada), propondremos el siguiente resultado:

Lema 3.4 *Si una fórmula condicional aproximada φ no es derivable en el sistema condicional* **CSI**(G) *(resp. sus extensiones) entonces existe una teoría T_0 en* **CSI**(G) *(resp. en sus extensiones) tal que:*

- *$T_0 \cup \{\neg\varphi\}$ es* **CSI**-*consistente.*
- *Para todo par de c.e.m.'s $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ y todo $\alpha \in G$ resulta que $\bar{\omega}_1 >_\alpha \bar{\omega}_2$ está en T_0 o $\neg(\bar{\omega}_1 >_\alpha \bar{\omega}_2)$ está en T_0.*
- *Y sólo fórmulas de esa forma están en T_0.*

Así T_0 es maximal respecto de las fórmulas condicionales simples que sólo tienen c.e.m.'s y no tiene otras fórmulas que esas.

Prueba: Si φ no pertenece a la lógica **CSI**(G) entonces **CSI**$(G) \cup \{\neg\varphi\}$ bajo modus ponens es una teoría **CSI**-consistente. Luego enumerando todas las fórmula de la forma $\bar{\omega}_1 >_\alpha \bar{\omega}_2$ y $\neg(\bar{\omega}_1 >_\alpha \bar{\omega}_2)$ para todo par de c.e.m.'s $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ y todo $\alpha \in G$, y aplicando la misma técnica de completamiento que en el lema de Lindenbaum obtenemos el T_0 deseado. □

Ahora ya estamos en condiciones de construir el modelo buscado. Para ello tomemos el conjunto de todas las extensiones maximales de T_0, $\{T_{\omega_i} \mid i \in I$ siendo I un conjunto de naturales entre 1 y $2^{2^k}\}$. El siguiente lema nos indica que el conjunto propuesto es un buen candidato.

Lema 3.5 *Para cada conjunción elemental maximal $\bar{\omega}$ existe una y sólo una extensión maximal de T_0 a la que pertenece.*

Prueba: Dividiremos la prueba en:

Existencia: Supongamos que no. Luego $T_0 \cup \{\bar{\omega}\}$ es inconsistente o equivalentemente que $T_0 \vdash_{\mathbf{CSI}} \neg\bar{\omega}$. Pero eso es absurdo porque T_0 sólo tiene fórmulas condicionales puras y no hay forma de inferir desde ellas una fórmula proposicional pura.

Unicidad: Supongamos que hubiera dos extensiones maximales que contienen a $\bar{\omega}$. Luego toda fórmula proposicional pura o su negación será derivable de $\bar{\omega}$. Lo mismo sucede con las fórmulas condicionales puras. Puesto que toda fórmula condicional es una combinación mediante operadores lógicos de expresiones proposicionales puras y condicionales puras, cualquiera de ellas o su negación es derivable a partir de $T_0 \cup \{\bar{\omega}\}$. Luego los dos conjuntos contienen los mismos elementos y por tanto son iguales.

□

Finalmente podemos proponer el modelo canónico de Kripke que deseábamos. Este será $M_c = (W_c, R_c, \models_{M_c})$ dónde:

W_c:	es definido como el conjunto $\{\omega_i \mid T_{\omega_i}\}$.
R_c:	entre $\omega, \omega' \in W_c$ como el $\max\{\alpha \mid \bar{\omega} >_\alpha \bar{\omega}' \in T_0\}$.
$\models_{M_c}$:	entre ω_i y una variable proposicional p si $p \in T_{\omega_i}$.

El máximo en la definición del R_c está garantizado debido a la regla de inferencia **CI.**

Teorema 3.3 *Sean* $\{T_{\omega_i} \mid 1 \leq i \leq 2^{2^k}\}$ *y* $M_c = (W_c, R_c, \models_{M_c})$ *como definidos arriba, resulta que:*

$$(M_c, \omega_i) \models \varphi \Longleftrightarrow \varphi \in T_{\omega_i}$$

Prueba: Inmediata a partir de la definición de modelo canónico y de los lemas anteriores. Por ejemplo si la fórmula φ en cuestión es puramente proposicional entonces esta se deriva clásicamente y por lo $(M_c, \omega_i) \models \varphi \Longleftrightarrow \bar{\omega}_i \vdash \varphi$ y por el lema precedente eso es equivalente a que $\varphi \in T_{\omega_i}$. El caso en que la fórmula sea una condicional es más interesante. Consideremos que $\varphi = p >_\alpha q$ con p y q en $\mathcal{L}_k$. Primero realicemos la prueba de derecha a izquierda. En tal caso, por el lema 3.3 de descomposición tenemos que la fórmula en cuestión es equivalente a:

$$p >_\alpha q \equiv \bigwedge_{\{\bar{\omega}_i \vdash p\}} \bigvee_{\{\bar{\omega}_j \vdash q\}} (\bar{\omega}_i >_\alpha \bar{\omega}_j)$$

Por la forma en que fue definida la relación de accesibilidad R_c y teniendo en cuenta que por contrucción $p >_\alpha q$ pertenece a todo T_{ω_i} resulta que de dicha descomposición inferimos que:

$$\alpha \leq \inf_{\{\bar{\omega}_i \vdash p\}} \sup_{\{\bar{\omega}_j \vdash q\}} R_c(\omega_i, \omega_j)$$

lo que corresponde a la definición de satisfactibilidad de $p >_\alpha q$ en el modelo M_c.

El sentido de izquierda a derecha de la prueba consiste en desandar la línea argumental recién desarrollada. Suponemos que $(M_c, \omega_i) \models p >_\alpha q$ para todo $\omega_i \in W_c$. Aplicando la definición obtenemos la desigualdad inmediata superior para R_c, de la cual resulta

$$\alpha \leq \inf_{\{\bar{\omega}_i \vdash p\}} \sup_{\{\bar{\omega}_j \vdash q\}} \max\{\beta \mid \omega_i >_\beta \omega_j \in T_0\}$$

por reemplazar R_c por su definición. La cual por la propiedad de anidamiento resulta cierta si y sólo si para todo p-mundo ω_i existe un q-mundo ω_j tal $\omega_i >_\alpha \omega_j \in T_0$. Por el lema 3.3 de descomposición tenemos que eso último es equivalente a pedir que $p >_\alpha q \in T_0$, o lo que es lo mismo $p >_\alpha q \in T_{\omega_i}$ para todo $\omega_i \in W_c$.

□

Ahora sólo resta demostrar que el modelo canónico así definido responde adecuadamente a los requerimientos de reflexividad, simetría, $\otimes$-transitividad y de separación (y sus combinaciones) cuando es construído sobre la base de los sistema lógicos **CSI·T**, **CSI·B**, **CSI·4** y **CSI**$^+$ (y sus combinaciones), respectivamente. La siguiente proposición aclara el punto.

Proposición 3.1 *Si $M_c = (W_c, R_c, \models_{M_c})$ es un modelo canónico definido sobre una lógica condicional LC extensión de* **CSI**. *Entonces:*

1. *Si LC es cerrada por* **RK** *entonces R_c es reflexiva.*
2. *Si* **Sim** $\in LC$ *entonces R_c es simétrica.*
3. *Si* $\otimes$**-T** $\in LC$ *entonces R_c es $\otimes$-transitiva.*
4. *Si* **ESC** $\in LC$ *entonces R_c es de separación.*

Prueba: Consideremos cada caso propuesto:

Reflexividad Bajo el supuesto que el sistema condicional LC es cerrado por la regla **RK** y puesto que $\bar{\omega} \to \bar{\omega}$ pertenecerá a LC, resulta que $\bar{\omega} >_1 \bar{\omega}$ también estará en LC.

Simetría Es claro que la presencia del axioma **Sim** es una condición suficiente para garantizar que R_c sea simétrica.

Transitividad En este caso sólo es necesario enunciar el axioma $\otimes$**-T** para tres m.e.c.'s $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ y $\bar{\omega}_3$ cualesquiera, obteniendo que:

$$(\bar{\omega}_1 >_\alpha \bar{\omega}_2) \wedge (\bar{\omega}_2 >_\beta \bar{\omega}_3) \to (\bar{\omega}_1 >_{\alpha\otimes\beta} \bar{\omega}_3)$$

que fuerza la transitividad de R_c.

Separación Basta notar que el axioma **ESC** establece que las únicas fórmulas condicionales puras con operador principal $>_1$ son las que corresponden a reemplazar en una tautología proposicional el operador principal $\to$ de implicación material por el operador condicional $>_1$. Por lo tanto las únicas fórmulas condicionales con m.e.c.'s del tipo $\bar{\omega} >_1 \bar{\omega}'$ serán aquellas tal que $\bar{\omega} \equiv \bar{\omega}'$.

□

Ahora ya disponemos de todos los ingredientes necesarios para enunciar y probar la anunciada completitud.

Teorema 3.4 *Los siguientes resultados de completitud pueden ser enunciados:*

- *Si φ es válida en la clase de modelos Σ_{0f} entonces es teorema de* **CSI** .
- *Si φ es válida en la clase de modelos Σ_{2f} entonces es teorema de* **CSI·T**.
- *Si φ es válida en la clase de modelos Σ_{3f} entonces es teorema de* **CSI·TB**.
- *Si φ es válida en la clase de modelos Σ_{4f} entonces es teorema de* **CSI·S4**.
- *Si φ es válida en la clase de modelos $\Sigma_{\otimes f}$ entonces es teorema de* **CSI·S5**.

Y respectivamente puede repetirse la enumeración para las clases de modelos estrictos Σ_{if}^{+} con $i = 2, 3, 4$ o $\otimes$ respecto a los correspondientes sistemas estrictos (i.e. que contienen al axioma **ESC***)* **CSI·#**$^{+}$*, dónde* $\# = \mathbf{T}, \mathbf{TB}, \mathbf{S4}, \mathbf{S5}$.

Prueba: La prueba es inmediata a partir de los resultados precedentes, puesto que en cada caso el modelo canónico pertenecerá a la clase de referencia. □

3.1.2 Lógicas multicondicionales de proximidad

Ahora presentaremos una nueva familia de sistemas condicionales que pretenderán capturar axiomáticamente la noción de consecuencia de proximidad presentada en el Capítulo 2.

El listado que sigue detalla las fórmulas que serán usadas para axiomatizar las diferentes lógicas multicondicionales de proximidad. Las siglas que acompañarán a cada una de ellas coincidirán con el utilizado en otras subsecciones de este mismo capítulo. En todos los casos p, q y r son de $\mathcal{L}_k$

A: $p \gg_\alpha q \to p \gg_\beta q$ si $\beta \leq \alpha$.
ESC: $p \gg_1 q \to (p \to q)$.
ST: $p \gg_0 q$.
ST": $\bot \gg_1 p$.
OI: $(p \vee q \gg_\alpha r) \leftrightarrow (p \gg_\alpha r) \wedge (q \gg_\alpha r)$.
OD: $(s \gg_\alpha p \vee q) \leftrightarrow (s \gg_\alpha p) \vee (s \gg_\alpha q)$
$\otimes$-T: $(p \gg_\alpha q) \wedge (q \gg_\beta r) \to p \gg_{\alpha\otimes\beta} r$.
Res: $\neg(p \gg_\alpha q) \wedge \neg(q \gg_\beta r) \to \neg(p \gg_{\alpha\otimes\beta} r)$.
IJ $\top \gg_\alpha q \to p \gg_\alpha q$.
Rfx $p \to (p \gg_\alpha q \to \top \gg_\alpha q)$

y las siguientes reglas de inferencias:

MP:	De	φ y $\varphi \to \psi$	inferir	ψ
CI:	De	$\forall \alpha < \beta : p \gg_\alpha q$	inferir	$p \gg_\beta q$
RK:	De	$p \to q$	inferir	$p \gg_1 q$

Veamos ahora que todos estos axiomas y reglas son válidos y preservan validez, respectivamente, en los modelos de proximidad.

Proposición 3.2 *Sea $M = (W, R, \models)$ un modelo de Kripke de proximidad en Σ^G_{0f}. Entonces M satisface los axiomas:* **A**, **ST"**, **OI**, **OD**, **$\otimes$-T**, **Res** *e* **IJ**. *Además las reglas* **MP**, **CI** *y* **RK**, *preservan validez en M. Adicionalmente, si R fuera reflexiva (i.e. si $M \in \Sigma^G_{2f}$) entonces M satisfaría* **Rfx** *y si R fuera de sepación entonces M satisfaría también el axioma* **ESC**.

Prueba: Las demostraciones seguirán un esquema muy similar al planteado en el caso de la lógica de consecuencia aproximada.

A: En este caso sólo es necesario observar que para cada $\omega \in W$ $J^M_{R,\bar{\omega}}(q \mid p) \geq \alpha$ implica $J^M_{R,\bar{\omega}}(q \mid p) \geq \beta$, si $\beta \leq \alpha$. Puesto que por definición de satisfactibilidad $(M, \omega) \models p \gg_\alpha q$ si y sólo si, $J^M_{R,\bar{\omega}}(q \mid p) \geq \alpha$. Aplicando transitividad resulta que $(M, \omega) \models p \gg_\beta q$.

ST: Para probarlo basta señalar que la relación R es total y que toma valores mayores o iguales a cero.

ST": Puesto que en nuestros modelos R es una relación total (i.e. definida para todo par de elementos de W) que toma valores mayores o iguales a cero y dado que por convención $I_R(\bot \mid \omega) = 0$ entonces es claro que para todo fórmula p y mundo ω siempre $J^M_{R,\bar{\omega}}(p \mid \bot) \geq 1$ y así $(M, \omega) \models \bot \gg_1 p$.

OI: Nótese que por definición $(M, \omega) \models p \vee q \gg_\alpha r$ si y sólo si, $J^M_{R,\bar{\omega}}(r \mid p \vee q) \geq \alpha$. Pero como fue ya probado en el Capítulo 1, $J^M_{R,\bar{\omega}}(r \mid p \vee q) = \min\{J^M_{R,\bar{\omega}}(r \mid p), J^M_{R,\bar{\omega}}(r \mid q)\}$. Por lo tanto $(M, \omega) \models p \vee q \gg_\alpha r$ si y sólo si, es el caso que $J^M_{R,\bar{\omega}}(r \mid p) \geq \alpha$ y $J^M_{R,\bar{\omega}}(r \mid q) \geq \alpha$. Lo que equivale a decir que $(M, \omega) \models p \gg_\alpha r$ y $(M, \omega) \models q \gg_\alpha r$.

OD: En este caso es suficiente probar que: $J^M_{R,\bar{\omega}}(p \vee q \mid r) \geq \alpha$ si y sólo si $\max\{J^M_{R,\bar{\omega}}(p \mid r), J^M_{R,\bar{\omega}}(q \mid r)\} \geq \alpha$. Pero eso ya fue probado en el capítulo anterior al presentar las propiedades de esta medida de implicación.

CI: Para comprobar que esta regla de inferencia preserva validez supongamos que $\forall \alpha < \beta$: $p \gg_\alpha q$ sucede. Eso quiere decir que $J^M_{R,\bar{\omega}}(q \mid p) \geq \alpha$ para todo $\alpha < \beta$ o lo que es lo mismo que $\alpha \leq I^M_R(p \mid \bar{\omega}) \otimes\!\!\rightarrow I^M_R(q \mid \bar{\omega})$. Por la propiedad de residuación resulta que: $\alpha \otimes I^M_R(p \mid \bar{\omega}) \leq I^M_R(q \mid \bar{\omega})$ para todo $\alpha < \beta$. Además por definición $I^M_R(p \mid \bar{\omega}) \otimes\!\!\rightarrow I^M_R(q \mid \bar{\omega}) = \sup\{\gamma \mid I^M_R(p \mid \bar{\omega}) \otimes \gamma \leq I^M_R(q \mid \bar{\omega})\}$ lo cual, por incluirlos, es mayor a igual al $\sup\{\alpha < \beta \mid I^M_R(p \mid \bar{\omega}) \otimes \alpha \leq I^M_R(q \mid \bar{\omega})\} = \beta$, tal como queríamos probar.

$\otimes$-T: Supongamos que $(M,\omega) \models p \gg_\alpha q$ y que $(M,\omega) \models q \gg_\beta r$. Como en el caso anterior, esas condiciones se reducen equivalentemente a las siguiente condiciones: $\alpha \otimes I^M_R(p \mid \bar{\omega}) \leq I^M_R(q \mid \bar{\omega})$ y $\beta \otimes I^M_R(q \mid \bar{\omega}) \leq I^M_R(r \mid \bar{\omega})$. Luego por aplicar la propiedad de transitividad del orden tenemos que $\alpha \otimes \beta \otimes I^M_R(p \mid \bar{\omega}) \leq I^M_R(r \mid \bar{\omega})$, que por residuación es equivalente a lo que buscábamos probar.

Res: Como en la situación inmediata anterior supongamos que las condiciones del antecedente del axioma se satisface en un mundo ω. Así$(M,\omega) \models \neg(p \gg_\alpha q)$ y que $(M,\omega) \models \neg(q \gg_\beta r)$. Las cuales por definición equivalen a que $\alpha \otimes I^M_R(p \mid \bar{\omega}) > I^M_R(q \mid \bar{\omega})$ y $\beta \otimes I^M_R(q \mid \bar{\omega}) > I^M_R(r \mid \bar{\omega})$. Y nuevamente aplicando la transitividad del orden resulta que $\alpha \otimes \beta \otimes I^M_R(p \mid \bar{\omega}) > I^M_R(r \mid \bar{\omega})$, tal como queríamos.

RK: Para verificar que esta regla de inferencia preserva validez sólo es necesario considerar alguna tautología de la forma $p \rightarrow q$. Dado un modelo $M = (W, R, \models_M)$ en Σ_{0f}, el valor de:

$$I^M_R(p \mid \bar{\omega}) \otimes\!\!\rightarrow I^M_R(q \mid \bar{\omega})$$

es igual a 1 puesto que todo p-mundo también es un q-mundo.

Contraejemplos: Sea $M = (W, R, \models)$ un modelo en Σ_{1f} tal que para todo mundo $\omega : R(\omega, \omega_q) < 0.9$ para todo q-mundo ω_q. Luego si $p \rightarrow q$ es una tautología y $(M,\omega) \models p$, resulta que $(M,\omega) \models p \gg_1 q$ pero $(M,\omega) \not\models \top \gg_1 q$. Por lo tanto M es un contra-modelo de **Rfx**.

El modelo $M = (W, R, \models)$ que revoca la validez del axioma **ESC**, en la clase de modelos Σ_{2f} puede ser aquel que para todo mundo ω hay un q-mundo ω_q tal que $R(\omega_q, \omega) \geq R(\omega_p, \omega)$ todo p-mundo ω_p. Eso hace que para todo mundo ω $J^M_{R,\bar{\omega}}(q \mid p) = 1$. Pero obviamente eso no quiere decir que $p \rightarrow q$ fuera una tautología.

□

Definición 3.4 *El sistema de lógica multicondicional de proximidad básica* **CSJ**$(G, \otimes)$ *corresponde al mínimo conjunto de fórmulas en $\mathcal{L}_{\mathcal{J}}{}^k$ que contiene todos los axiomas de la lógica proposicional PL más los siguientes:* **A**, **ST**, **ST"**, **OI**, **OD**, **IJ**, **$\otimes$-T** *y* **Res**, *y que será cerrado por la regla de inferencia* **MP**, **CI** *y* **RK**. *Sus extensiones serán la lógica multicondicional de proximidad autoreferente que incorpora el axioma* **Rfx** *a los anteriores y su correspondiente versión estricta que agrega el axioma* **ESC**.

Siguiendo una línea argumental similar a la de la subsección anterior probaremos que cualquier conjunto de fórmulas Γ de la lógica proposicional maximalmente consistente en ese contexto, puede ser completado consistentemente de forma tal de obtener un conjunto maximal de fórmulas en **CSJ**$(G, \otimes)$ (respectivamente en sus extensiones). A continuación definiremos la noción de teoría base.

Definición 3.5 *Un conjunto de fórmulas Γ de la lógica* $\mathbf{CSJ}(G,\otimes)$ *(respectivamente en sus extensiones) será denominado una teoría base en* $\mathbf{CSJ}(G,\otimes)$ *(respectivamente en sus extensiones) si es maximalmente consistente respecto de la lógica proposicional y para todo m.e.c. $\bar{\omega}$ y para todo $\alpha \in L$ una y sólo una de las siguientes fórmulas $\top \gg_\alpha \bar{\omega}$ o $\neg(\top \gg_\alpha \bar{\omega})$ pertenecen a Γ (es decir es maximal respecto de esta clase de fórmulas). Denotaremos con ξ al conjunto de todas las fórmulas del tipo $\top \gg_\alpha \bar{\omega}$ o $\neg(\top \gg_\alpha \bar{\omega})$ para cualquier $\alpha \in G$ y cualquier m.e.c. $\bar{\omega}$.*

El interés por estas teorías bases radica en el hecho que son equivalentes a teorías maximales de fórmulas en $\mathbf{CSJ}(G,\otimes)$ (respectivamente en sus extensiones) como se demostrará en el próximo lema.

Lema 3.6 *Todo conjunto maximal consistente de fórmulas, $T_{\max}$, en* $\mathbf{CSJ}(G,\otimes)$ *(respectivamente en sus extensiones) es lógicamente equivalente a su teoría base asociada en* $\mathbf{CSJ}(G,\otimes)$ *(respectivamente en sus extensiones) definida como $\Gamma = T_{\max} \cap (\mathcal{L}_k \cup \xi)$.*

Prueba: Recordemos que dos teorías son equivalentes si de ellas pueden demostrarse las mismas fórmulas. Obviamente todo conjunto maximal consistente $T_{\max}$ contiene a su teoría base asociada Γ. Por lo tanto sólo es necesario probar que de Γ se derivan todas las fórmulas de $T_{\max}$ o equivalentemente que $T_{\max} \subseteq Cn(\Gamma)$ (dónde $Cn(\Gamma)$ representa al conjunto Γ cerrado por sus consecuencias respecto de la lógica $\mathbf{CSJ}(G,\otimes)$).

Notemos primero que debido a que estamos considerando un lenguaje proposicional finito $\mathcal{L}_k$ sabemos que toda fórmula proposicional resulta equivalente a alguna disyunción de m.e.c.'s (ver lema 3.2). Luego toda fórmula condicional puede ser reducida a conjunciones o disyunciones de fórmulas condicionales que sólo tiene un m.e.c en su antecedente y otro en su consecuente por aplicación de los axiomas **OI** y **OD**. Así por ejemplo la fórmula $p \gg_\alpha q$ es equivalente a:

$$\bigwedge_{\{i|\delta_i(p)=1\}} \bigvee_{\{j|\delta_j(q)=1\}} (\bar{\omega}_i \gg_\alpha \bar{\omega}_j)$$

Por lo tanto verificar la equivalencia propuesta sólo requiere que comprobemos que una teoría base Γ, para cada par de m.e.c.'s $\bar{\omega}_i$ y $\bar{\omega}_j$ y cada $\alpha \in G$, deduce alguna de las siguientes fórmulas: $\bar{\omega}_i \gg_\alpha \bar{\omega}_j$ o $\neg(\bar{\omega}_i \gg_\alpha \bar{\omega}_j)$. Debido a que tenemos el axioma **A** de "anidamiento" existirá sólo un α^* para el cual todas las fórmulas $\bar{\omega}_i \gg_{\alpha^*} \bar{\omega}_j$ y $\neg(\bar{\omega}_i \gg_{\beta^*} \bar{\omega}_j)$ para todo $\beta^* > \alpha^*$, se derivarán de Γ (notar que la situación dual no es posible debido a que tenemos la regla **CI**) y ese será el caso que consideraremos. Supongamos que: $\gamma = \max\{\alpha \mid \top \gg_\alpha \bar{\omega}_i\}$ y $\delta = \max\{\beta \mid \top \gg_\beta \bar{\omega}_j\}$. Recordemos que gracias a la regla **CI** esos máximos tienen existencia garantizada. Debido al hecho que Γ es maximal respecto de ξ tendremos que a partir del supuesto anterior resulta que $\forall \beta > \gamma : \neg(\top \gg_\beta \bar{\omega}_i)$ y $\forall \lambda > \delta : \neg(\top \gg_\lambda \bar{\omega}_j)$ estarán en Γ. Consideremos las siguientes casos particulares de los axiomas $\otimes$**-T** y **Res**:

$$\top \gg_{\alpha_1} \bar{\omega}_i \wedge \neg(\top \gg_{\alpha_1 \otimes \beta_1} \bar{\omega}_j) \to \neg(\bar{\omega}_i \gg_{\beta_1} \bar{\omega}_j)$$

$$\neg(\top \gg_{\alpha_2} \bar{\omega}_i) \wedge \top \gg_{\alpha_2 \otimes \beta_2} \bar{\omega}_j \to \bar{\omega}_i \gg_{\beta_2} \bar{\omega}_j$$

En el primer caso a partir de nuestras hipótesis podemos tomar $\alpha_1 = \gamma$ y $\gamma \otimes \beta_1 > \delta$ (obviamente estas inecuaciones tienen sentido si $\gamma > \delta$). Por el contrarecíproco de la condición de residuación resulta que la última desigualdad es equivalente a $\beta_1 > \gamma \otimes\!\!\to \delta$. Esto nos dice que a partir de las condiciones aceptadas podemos concluir que $\neg(\bar{\omega}_i \gg_{\beta_1} \bar{\omega}_j)$ para todo $\beta_1 > \gamma \otimes\!\!\to \delta$. Tomemos ahora en consideración la segunda fórmula con $\alpha_2 > \gamma$ y $\alpha_2 \otimes \beta_2 \leq \delta$. De la segunda condición y la propiedad de residuación resulta que $\beta_2 \leq \alpha_2 \otimes\!\!\to \delta$ y así podremos concluir que $\bar{\omega}_i \gg_\rho \bar{\omega}_j$ con $\rho = \alpha_2 \otimes\!\!\to \delta$, para todo $\alpha_2 > \gamma$. Luego aplicando apropiadamente la regla infinitaria **CI** sobre esta familia de conclusiones deducimos que $\bar{\omega}_i \gg_\sigma \bar{\omega}_j$ con $\sigma = \gamma \otimes\!\!\to \delta$. Lo cual completa nuestra prueba. □

Esta equiparación entre conjuntos maximales consistentes de fórmulas y teorías bases nos permitirá definir la noción de modelo canónico a partir de estas últimas, tal como veremos a continuación.

Definición 3.6 *Dado el conjunto de los modelos booleanos Ω, definimos la noción de modelo canónico M_c en la lógica* **CSJ**$(G, \otimes)$ *(respectivamente en sus extensiones) como la terna* $(W_c, Rc, \models_c)$ *dónde:*

- $W_c = \{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ *dónde* T_ω *será la única teoría base que tendrá a las fórmulas válidas en* ω.
- $R_c \subseteq W_c \times W_c : R_c(\omega_1, \omega_2) = \max\{\alpha \mid \top \gg_\alpha \bar{\omega}_2 \in T_{\omega_1}\}$.
- $\models_c \subseteq W_c \times \mathcal{L}_k : \omega \models \varphi \Longleftrightarrow \varphi \in \bar{\omega}$.

Nótese que en la definición de R_c la existencia del máximo está garantizado por la regla de inferencia **CI**. A continuación probaremos que el modelo propuesto tiene el comportamiento buscado.

Teorema 3.5 *Sean* $\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ *y* $M_c = (W_c, R_c, \models_{M_c})$ *como definidos arriba, resulta que para toda fórmula* $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}}{}^k$*:*

$$(M_c, \omega_i) \models \varphi \Longleftrightarrow \varphi \in T_{\omega_i}$$

Prueba: Ésta es inmediata a partir de la Definición 3.6 y lemas anteriores. Por ejemplo si la fórmula φ es puramente proposicional entonces ésta se deriva clásicamente y por lo $(M_c, \omega_i) \models \varphi \Longleftrightarrow \bar{\omega}_i \vdash \varphi$ y por el lema precedente eso es equivalente a que $\varphi \in T_{\omega_i}$. El caso en que la fórmula sea una condicional es más interesante.

Consideremos que $\varphi = p \gg_\alpha q$ con p y q en $\mathcal{L}_k$. Primero realicemos la prueba de izquierda a derecha. Supongamos que $(M_c, \omega_i) \models p \gg_\alpha q$. Por definición de satisfactibilidad eso significa que:

$$J^{M_c}_{R_c,\bar{\omega}_i}(q \mid p) = I_{R_c}(p \mid \bar{\omega}_i) \otimes\!\!\rightarrow I_{R_c}(q \mid \bar{\omega}_i) = \sup_{\{\bar{\omega}_k \vdash p\}} R_c(\bar{\omega}_i, \bar{\omega}_k) \otimes\!\!\rightarrow \sup_{\{\bar{\omega}_l \vdash q\}} R_c(\bar{\omega}_i, \bar{\omega}_l) \geq \alpha$$

Denotaremos con δ y γ los máximos alcanzados en el antecedente y consecuente, respectivamente. Como la cantidad de m.e.c.'s $\bar{\omega}_l$ es finito entonces existirá un $\bar{\omega}_l^*$ donde se alcanzará el segundo máximo. De esa manera y debido a la definición de R_c y de la presencia del axioma **A** tendremos que $\forall \bar{\omega}_k \vdash p : \neg(\top \gg_\epsilon \bar{\omega}_k) \in T_{\omega_i}$ para todo $\epsilon > \delta$ y $\top \gg_\gamma \bar{\omega}_l^* \in T_{\omega_i}$. Luego aplicando *modus ponens* entre estas fórmulas y las respectivas instancias del axioma **Res**: $(\neg(\top \gg_\epsilon \bar{\omega}_k) \wedge \top \gg_{\epsilon\otimes\rho} \bar{\omega}_l^*) \rightarrow \bar{\omega}_k \gg_\rho \bar{\omega}_l^*$ para todo $\rho \leq \epsilon \otimes\!\!\rightarrow \gamma$ inferimos que $\bar{\omega}_k \gg_\rho \bar{\omega}_l^* \in T_{\omega_i}$. Finalmente como T_{ω_i} es cerrada por **CI** resulta que $\forall \bar{\omega}_k \vdash p : \bar{\omega}_k \gg_\sigma \bar{\omega}_l^* \in T_{\omega_i}$ dónde $\sigma = \delta \otimes\!\!\rightarrow \gamma \geq \alpha$ y por *modus ponens* sobre el axioma **A** inferimos que:

$$\bigwedge_{\{\bar{\omega}_k \vdash p\}} (\bar{\omega}_k \gg_\alpha \bar{\omega}_l^*) \in T_{\omega_i}$$

Por otra parte, debido al lema 3.3 de descomposición tenemos que:

$$p \gg_\alpha q \leftrightarrow \bigwedge_{\{\bar{\omega}_k \vdash p\}} \bigvee_{\{\bar{\omega}_l \vdash q\}} (\bar{\omega}_k \gg_\alpha \bar{\omega}_l) \in T_{\omega_i}$$

Que por debilitar el lado derecho para el m.e.c. $\bar{\omega}_l^*$, tenemos que:

$$\bigwedge_{\{\bar{\omega}_k \vdash p\}} (\bar{\omega}_k \gg_\alpha \bar{\omega}_l^*) \rightarrow p \gg_\alpha q \in T_{\omega_i}$$

y aplicando *modus ponens* obtenemos lo buscado.

Para el sentido de derecha a izquierda de la prueba asumamos que $\varphi = p \gg_\alpha q \in T_{\omega_i}$. Por el axioma de transitividad tenemos que $\forall \beta : p \gg_\alpha q \rightarrow (\top \gg_\beta p \rightarrow \top \gg_{\alpha\otimes\beta} q) \in T_{\omega_i}$. Lo que por combinación con la hipótesis inicial a través de *modus ponens* nos permite deducir que $\forall \beta$:

$\top \gg_\beta p \to \top \gg_{\alpha\otimes\beta} q \in T_{\omega_i}$. Tomando $\delta = \max\{\beta \mid \top \gg_\beta p \in T_{\omega_i}\}$ y dado que por la regla **CI** sabemos que $\top \gg_\delta p \in T_{\omega_i}$, podemos concluir que $\top \gg_{\alpha\otimes\delta} q \in T_{\omega_i}$.

Por otra parte a partir de las condiciones de satisfactibilidad $(M_c, \omega_i) \models p \gg_\alpha q$ si y sólo si

$$\alpha \otimes I_{R_c}(p \mid \bar{\omega}_i) \leq I_{R_c}(q \mid \bar{\omega}_i) \Longleftrightarrow \alpha \otimes \sup_{\{\bar{\omega}_k \vdash p\}} R_c(\bar{\omega}_i, \bar{\omega}_k) \leq \sup_{\{\bar{\omega}_l \vdash q\}} R_c(\bar{\omega}_i, \bar{\omega}_l)$$

Por definición de R_c resulta que

$$sup_{\{\bar{\omega}_k \vdash p\}} R_c(\bar{\omega}_i, \bar{\omega}_k) = \sup_{\{\bar{\omega}_k \vdash p\}} \max\{\beta \mid \top \gg_\beta \bar{\omega}_k \in T_{\omega_i}\} = \max\{\beta \mid \bigvee_{\{\bar{\omega}_k \vdash p\}} \top \gg_\beta \bar{\omega}_k \in T_{\omega_i}\} = \max\{\beta \mid \top \gg_\beta p \in T_{\omega_i}\} = \delta$$

De la misma forma

$$I_{R_c}(q \mid \bar{\omega}_i) = \sup_{\{\bar{\omega}_l \vdash q\}} R_c(\bar{\omega}_i, \bar{\omega}_l) = \max\{\lambda \mid \top \gg_\lambda q \in T_{\omega_i}\}$$

Pero como ya hemos probado que $\top \gg_{\alpha\otimes\delta} q \in T_{\omega_i}$ resultará que $I_{R_c}(q \mid \bar{\omega}_i) \geq \alpha \otimes \delta$ tal como buscábamos probar. □

Ahora ya disponemos de todos los ingredientes necesarios para enunciar y probar la anunciada completitud.

Teorema 3.6 *Las siguientes relaciones de completitud pueden ser establecidas:*

- *Si φ es válida en la clase de modelos Σ_{0f} entonces es teorema de* **CSJ**.
- *Si φ es válida en la clase de modelos Σ_{2f} entonces es teorema de* **CSJ·T**.

Y respectivamente puede repetirse la enumeración para las clases de modelos estrictos $\Sigma_{i_f}^+$ con $i = 0, 2$ o $\otimes$ respecto a los correspondientes sistemas estrictos (que son cerrados por la regla **ESC***)* **CSJ**$^+$ *y* **CSJ·T**$^+$*, respectivamente.*

Prueba: La prueba es inmediata dada la correspondencia que acabamos de mostrar entre fórmulas válidas en el modelo canónico y teoremas del sistema asociado y el hecho que estos modelos pertenecen a la clase de referencia. □

3.2 Lógicas condicionales multivaluadas

La principal idea detrás de este enfoque consiste en tomar el grado en el cual una proposición q es consecuencia de otra p como el valor de verdad de una fórmula condicional que tiene a p como su antecedente y a q como su consecuente. En este caso el lenguaje condicional consistirá en extender el lenguaje proposicional $\mathcal{L}_k$ con dos operadores binarios $>, \gg$ y con un conjunto de constantes de verdad $\bar{r}$ por cada elemento r en los racionales Q. El conjunto de fórmulas de este nuevo lenguaje es definido como sigue:

- Toda fórmula proposicional es también una condicional.
- Si p y q son fórmulas proposicionales en $\mathcal{L}_k$ entonces $p > q$ y $p \gg q$ son fórmulas condicionales.
- Si $\bar{r}$ es una constante de verdad y φ es una fórmula condicional entonces $\bar{r} \to \varphi$ y $\varphi \to \bar{r}$ son también fórmulas condicionales.
- Si φ y ψ son fórmulas condicionales entonces $\varphi \circ \psi$ es una fórmula condicional dónde $\circ \in \{\&, \to, \bar{0}\}$.

En lo que sigue denotaremos con ${\mathcal{FL}_{\mathcal{I}}}^k$ al lenguaje condicional que no contiene fórmulas que utilicen el operador $\gg$ y que fuera generado con k variables proposicionales. De igual manera escribiremos ${\mathcal{FL}_{\mathcal{J}}}^k$ para denotar el lenguaje condicional que no contiene el operador $>$. Por otra parte, en la presente sección un modelo tendrá una connotación diferente a la que expresáramos en la sección anterior. Las fórmulas condicionales ya no serán interpretadas como verdaderas o falsas sino que se les adjudicará un grado de verdad que será un elemento de un retículo $L = \langle \Re, \leq \rangle$, i.e. los reales con su orden.

En el presente contexto las clases de modelos serán simbolizadas con $\Sigma^{\Re}$ y sus elementos corresponderán como hasta ahora a modelos de la forma $M = (W, R, \models_M)$, dónde W, R y $\models_M$ son como siempre. La diferencia radica en la manera en que las condiciones de satisfactibilidad son extendidas a todo el lenguaje y en particular a una fórmula condicional. Dado un modelo $M = (W, R, \models_M)$, para todo $\omega \in W$ y toda fórmula del lenguaje proposicional φ, $\models_M (\omega, \varphi)$ toma exclusivamente valor 0 o 1 (i.e. las fórmulas proposicionales puras son interpretadas clásicamente) y para las fórmulas condicionales $p > q$ y $p \gg q$ dónde p y q están en $\mathcal{L}_k$, la interpretación es definido como:

$\models_M (\omega, p > q) = \alpha$ si $I_R^M(q \mid p) = \alpha$.
$\models_M (\omega, p \gg q) = \alpha$ si $J_{R,\bar{\omega}}^M(q \mid p) = \alpha$.

Las condiciones de satisfactibilidad para las fórmulas complejas son las usuales en una lógica multivaluada (ver anexo 1 y [Háj98]). Es importante remarcar que estamos usando una estructura de modelo "clásica" para hacer un interpretación multivaluada del lenguaje donde, nuevamente, la noción de satisfactibilidad para un condicional aproximado es independiente del mundo particular donde estemos evaluando su veracidad, i.e. corresponde a una noción global. En el actual contexto, claramente los operadores condicionales $>$ y $\gg$ representan en el lenguaje lógico a las medidas I_R^M y $J_{R,\bar{\omega}}^M$, respectivamente. La razón por la que introducimos las constantes de verdad se debe justamente a nuestro deseo de representar en el lenguaje objeto cotas inferiores o superiores para esas medidas.

Las axiomáticas que presentaremos en la dos subsecciones que siguen utilizarán como base los axiomas de las lógicas racionales $R\bigotimes L$ dónde $\bigotimes = Ł, \Pi$ o G, según cual sea la t-norma considerada. Aquí no reproduciremos su presentación y remitimos al lector al anexo 1 para su consulta. También aparecen allí referidos las definiciones de prueba y validez, como así también los resultados de completitud básicos que serán utilizados a continuación. Por otra parte, dada nuestra pretensión de que las fórmulas proposicionales puras sean interpretadas sólo como verdaderas o falsas (i.e. con valores de verdad 1 o 0) incluiremos el siguiente axioma para variables proposicionales:

Bool: $p \vee \neg p$.

3.2.1 Lógica Condicional multivaluada aproximada

Como ya fue anunciado, en este apartado pretendemos proponer sistemas lógicos que puedan dar cuenta en el lenguaje objeto de la noción de consecuencia aproximada a través del operador lógico $>$. Los siguientes serán los axiomas que utilizaremos para describir estas lógicas de condicionales multivaluadas, dónde p y q son fórmulas del lenguaje proposicional $\mathcal{L}_k$.

ST′: $p \to \neg(p > \bot)$.
ST": $\bot > p$.
Sim: $\bar{\omega} > \bar{\omega}' \to \bar{\omega}' > \bar{\omega}$, si $\bar{\omega}$ y $\bar{\omega}'$ son m.e.c.'s
$\otimes$-T: $(p > q) \to ((q > s) \to (p > s))$.
OI: $(p \vee q) > r \leftrightarrow (p > r) \wedge (q > r)$.
OD: $(\bar{\omega} > p \vee q) \leftrightarrow (\bar{\omega} > p) \vee (\bar{\omega} > q)$, dónde $\bar{\omega}$ es un m.e.c.

y las reglas de inferencia que adicionaremos serán:

RK:	De	$p \to q$	inferir	$p > q$
ESC:	De	$p > q$	inferir	$p \to q$

Definición 3.7 *El sistema de lógica condicional aproximada multivaluada básica* **FCSI**$(Q, \otimes)$ *corresponde al mínimo subconjunto de fórmulas incluído en* $\mathcal{FL}_{\mathcal{I}}{}^k$ *que tendrá los siguientes axiomas:* **BL**, **ST′**, **ST”**, $\mathbf{A}_{\otimes}$, **rc1**, **rc2**, **Bool**, **OI**, **OD** *(donde* $\mathbf{A}_{\otimes}$ *es Ł ó* **G** *ó* $\{\mathbf{\Pi 1}, \mathbf{\Pi 2}\}$ *según cual sea la t-norma subyacente) y que será cerrado tan sólo por la regla de inferencia* **MP** *si la t-norma es Gödel o Łukasiewicz y que en el caso de la t-norma producto se exige además clausura por* **RI**. *Las correspondientes extensiones se obtendrán por incorporar los axiomas remanentes ya mencionaremos como sigue:*

autoreferente: **FCSI·T**$(Q, \otimes)$ *es* **FCSI**$(Q, \otimes)$ *cerrada por* **RK**,

de Brouwer: **FCSI·TB**$(Q, \otimes) =$ **FCSI·T**$(Q, \otimes) +$ **Sim**,

de orden borroso: **FCSI·S4**$(Q, \otimes) =$ **FCSI·T**$(Q, \otimes) + \otimes$**-T**,

de similitud: **FCSI·S5**$(Q, \otimes) =$ **FCSI·T**$(Q, \otimes) +$ **Sim**$+ \otimes$**-T**,

Los sistemas lógicos que resultan de clausurar los sistemas anteriores con la regla **ESC**, corresponden a las versiones estrictas de las precedentes y serán mencionados por la palabra *estricta* a los nombres ya referidos y denotadas como **FCSI**$\cdot\#^+(Q, \otimes)$, dónde $\# = \mathbf{T}, \mathbf{TB}, \mathbf{S4}, \mathbf{S5}$.

Una vez enunciadas nuestras propuestas de lógicas condicionales necesitamos comprobar que se comportan adecuadamente respecto de las respectivas semánticas. En el contexto de la presente sección, la correctitud y completitud de un sistema Ξ respecto de una clase de modelos Σ, será formulada en lo que se conoce en la literatura como estilo Pavelka, i.e. comprobaremos que *el grado de prueba* de una fórmula φ in Ξ y el *grado de verdad* de una fórmula φ en Σ coinciden para cualquier fórmula φ, i.e. $\forall \varphi : |\varphi|_{\Xi} = ||\varphi||_{\Sigma}$. Nótese que esta definición de grado de prueba es la que nos permite prescindir de la regla de inferencia **CI** necesaria en los sistemas multicondicionales.

Para probar que el *grado de prueba* en un sistema **FCSI** es igual al *grado de verdad* en una clase Σ, utilizaremos un camino indirecto que hace uso de los conocidos resultados de correctitud y completitud de las lógicas racionales enunciados en el Capítulo 1. Esta idea puede ser resumida en el siguiente diagrama donde lo que buscamos probar es la equivalencia indicada con (1) y cuya prueba pasará por demostrar las equivalencias respectivamente indicadas como (2), (3) y (4).

$$\begin{array}{ccc}
\forall r < 1 : \mathbf{FCSI} \vdash \bar{r} \to \varphi & \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} & \models_{\Sigma} \varphi \\
(2) \Updownarrow & & \Updownarrow (4) \\
\forall r < 1 : \mathbf{FCSI^*} \vdash \bar{r} \to \varphi^* & \overset{(3)}{\Longleftrightarrow} & \mathbf{e}(\varphi^*) = 1 \; \forall \mathbf{e} : \models_{\mathbf{e}} \mathbf{FCSI}^*
\end{array}$$

Notar que la equivalencia (3) corresponde al resultado mencionado de las lógicas racionales. El probar (2) requiere que toda fórmula condicional pase a ser una variable proposicional de la lógica racional, lo que a su vez conlleva a traducir todos los axiomas del sistema **FCSI** a fórmulas de la lógica racional que involucra esas “nuevas” variables proposicionales. Justamente para lograr mayor claridad representaremos con $P_{\varphi,\psi}$ a la variable proposicional (en la lógica racional) asociada a la fórmula condicional $\varphi > \psi$ de $\mathcal{FL}_{\mathcal{I}}{}^k$. Con esa notación podemos proponer la siguiente translación $*$ de fórmulas de $\mathcal{FL}_{\mathcal{I}}{}^k$ a la lógica racional:

1. $(\varphi > \psi)^* = P_{\varphi,\psi}$.

2. $\bar{r}^* = \bar{r}$.

3. $(\varphi \circ \psi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$ con $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \&\}$.

Utilizando esta traducción podemos transcribir los axiomas y reglas de inferencia de un sistema **FCSI** para generar una teoría (cerrada respecto de esas reglas) en la lógica racional que notaremos como **FCSI***. Así por ejemplo la teoría **FCSI·S5**$(Q, \otimes)^*$ contendrá las siguientes fórmulas para las fórmulas φ, ψ y χ en $\mathcal{L}_k$:

$\varphi \rightarrow \neg P_{\varphi,\perp}$.

$P_{\perp,\varphi}$.

$P_{\bar{\omega},\bar{\omega}'} \rightarrow P_{\bar{\omega}',\bar{\omega}}$, si $\bar{\omega}$ y $\bar{\omega}'$ son m.e.c.'s

$P_{\varphi,\psi} \rightarrow (P_{\psi,\chi} \rightarrow P_{\varphi,\chi})$.

$P_{(\varphi\vee\psi),\chi} \leftrightarrow P_{\varphi,\chi} \wedge P_{\psi,\chi}$.

$P_{\bar{\omega},(\varphi\vee\psi)} \leftrightarrow P_{\bar{\omega},\varphi} \vee P_{\bar{\omega},\psi}$, donde $\bar{\omega}$ es un m.e.c.

y estará cerrada por las reglas de inferencia:

De $\varphi \rightarrow \psi$ inferir $P_{\varphi,\psi}$.

De $P_{\varphi,\psi}$ inferir $\varphi \rightarrow \psi$.

Notar que debido a la forma de hacer la transcripción, las fórmulas que se infieren a través de las reglas **RK** o **ESC** son directamente incluídas, y las correspondientes pruebas en la lógica racional serán más cortas. Ahora podemos presentar la prueba de la equivalencia (2). La misma será no específica en el sentido que la enunciaremos y probaremos para un sistema genérico e iremos asumiendo en cada paso si un axioma o regla está presente si ello fuera necesario.

Teorema 3.7 *Simbolizando con $\Xi(Q, \otimes)$ a cualquiera de los sistemas condicionales aproximados presentados con anterioridad y tomando como $\Xi(Q, \otimes)^*$ a la teoría en $R\bigotimes L$ que surge de aplicar a este sistema la transformación *. Entonces:*

$$\vdash_{\Xi(Q,\otimes)} \varphi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Xi(Q, \otimes)^* \vdash_{R\otimes L} \varphi^*$$

Prueba: En el sentido de izquierda a derecha, la prueba se realiza por inducción en la longitud de la prueba para una fórmula φ, tomada ésta como la cantidad de reglas que apliqué para realizar la inferencia.

Caso base: Si la longitud es 0 entonces φ debe ser un axioma. Luego $\varphi^* \in \Xi(Q, \otimes)^*$ y debido a la reflexividad de la noción de consecuencia $\Xi(Q, \otimes)^* \vdash_{R\otimes L} \varphi^*$.

Caso $n \rightarrow n+1$: Supongamos que la propiedad se verifica para pruebas de longitud menor a $n+1$. Supongamos además que R_{n+1} es la regla de inferencia aplicada para para obtener φ. Analicemos las distintas posibilidades para R_{n+1}.

- Si R_{n+1} es **MP** con ψ y $\psi \rightarrow \varphi$ como antecedentes entonces debe ser que ambas fórmulas tienen pruebas con longitudes menores estrictas que $n+1$ y así $\Xi(Q, \otimes)^* \vdash_{R\otimes L} \psi^*$ y $\Xi(Q, \otimes)^* \vdash_{R\otimes L} (\psi \rightarrow \varphi)^*$, lo que determina por modus ponens en $R\otimes L$ que $\Xi(Q, \otimes)^* \vdash_{R\otimes L} \varphi^*$.
- Suponiendo que R_{n+1} es **RK** tal que con $\phi \rightarrow \psi$ infiere $\phi > \psi = \varphi$. Pero en este caso $\phi \rightarrow \psi$ debe ser una tautología y por las condiciones de clausura que fuerza la aplicación * resulta que $P_{\phi,\psi} = \varphi^*$ pertenecerá a $\Xi(Q, \otimes)^*$.

- Asumiendo que la última regla aplicada R_{n+1} en la demostración de $\varphi = \phi \to \psi$ es **ESC** (i.e. asumiendo que el sistema $\Xi(Q, \otimes)$ contiene esa regla). Luego por la segunda condición de la transformación *, $\phi > \psi$ es probable en el sistema y así $\phi \to \psi = \varphi^*$ es incorporada en $\Xi(Q, \otimes)^*$ y por lo tanto probable en él.
- Si la regla **RI** pertenece al sistema $\Xi(Q, \otimes)$ y R_{n+1} es igual a ella con las precondiciones $\phi \to \bar{r}\ \forall r > 0$, entonces sus pruebas deben ser menores que n y por lo tanto usando la hipótesis inductiva sucederá que: $\forall r > 0\ :\ \Xi(Q, \otimes)^* \vdash_{R \otimes L} \phi^* \to \bar{r}$. Luego aplicando la regla **RI** (pero ahora en $R \otimes L$) obtenemos la prueba para $\varphi^* = \phi^* \to \bar{0}$.

Para el paso inverso el esquema de la prueba es el mismo y no será repetido pues alcanza con hacer notar que la aplicación * es biyectiva. □

Vale la pena señalar, que el resultado que acabamos de dar no ofrece ninguna sorpresa dado que hemos forzado a que ambos sistemas, el condicional y el racional, "manejen" el mismo conjunto de fórmulas al compensar el hecho de que el sistema racional posee menos reglas, incorporando a priori las conclusiones que producen esas reglas faltantes y así garantizar la "transportabilidad" de las pruebas en uno u otro sentido.

En el capítulo 5 utilizaremos también una técnica de traducción entre sistemas lógicos. Sin embargo en aquel caso no podremos garantizar esta "reversibilidad" de las pruebas.

Tal como había sido anunciado, el paso siguiente es demostrar la equivalencia (4). Lo primero, y más sencillo, es verificar que los axiomas son válidos en las pretendidas interpretaciones y que las reglas preservan esa validez. En los términos antedichos eso equivale a probar que *el grado de prueba* es una cota inferior del *grado de verdad*. Este resultado es planteado y probado en el teorema que sigue.

Teorema 3.8 *La siguientes relaciones entre las precedente lógicas y las clases de modelos propuestas al final del Capítulo 1 pueden ser enumeradas como:*

- *Si φ es teorema de* **FCSI**$(Q, \otimes)$ *entonces es válida en la clase de modelos* $\Sigma^{\Re}_{0f}$.
- *Si φ es teorema de* **FCSI·T**$(Q, \otimes)$ *entonces es válida en la clase de modelos* $\Sigma^{\Re}_{2f}$.
- *Si φ es teorema de* **FCSI·TB**$(Q, \otimes)$ *entonces es válida en la clase de modelos* $\Sigma^{\Re}_{3f}$.
- *Si φ es teorema de* **FCSI·S4**$(Q, \otimes)$ *entonces es válida en la clase de modelos* $\Sigma^{\Re}_{4f}$.
- *Si φ es teorema de* **FCSI·S5**$(Q, \otimes)$ *entonces es válida en la clase de modelos* $\Sigma^{\Re}_{\otimes f}$.

Y respectivamente puede repetirse la enumeración para los sistemas estrictos (que son cerrados por la regla **ESC***)* **FCSI·#**$^+(Q, \otimes)$*, dónde* $\# = \mathbf{T}, \mathbf{TB}, \mathbf{S4}, \mathbf{S5}$*, respecto a las correspondientes clases de modelos estrictos* $\Sigma^{\Re}_{if}{}^{+}$ *con* $i = 2, 3, 4$ *o* $\otimes$*. En el mismo sentido puede enunciarse que las reglas de inferencia preservan validez en las respectivas clases de modelos.*

Prueba: Las pruebas son esencialmente equivalentes a las presentadas en el Teorema 3.1. Simplemente por claridad hemos diferido su presentación a la sección final. □

Como consecuencia directa de este teorema resulta que para toda fórmula φ el grado de prueba en el sistema Ξ es menor o igual al grado de verdad en la familia de modelos Σ, i.e., $\forall \varphi : |\varphi|_{\Xi} \leq ||\varphi||_{\Sigma}$, dónde el par $\langle \Xi, \Sigma \rangle$ se instancia con cualquiera de los pares mencionados en el enunciado del anterior teorema. Este resultado de correctitud nos será también muy utíl en la prueba de la equivalencia (4), pero todavía necesitamos otro resultado preliminar antes de desarrollarla.

Proposición 3.3 *Sea $\Xi(Q,\otimes)^*$ la teoría que resulta de transformar el sistema condicional de proximidad $\Xi(Q,\otimes)$ a través de la aplicación * y* $\mathbf{e}$ *un modelo que satisface aquella teoría. Si definimos la relación entre mundos como*

$$R_{\mathbf{e}}(\omega,\omega') = \mathbf{e}(P_{\bar{\omega},\bar{\omega}'})$$

Entonces:

1. *Si $\Xi(Q,\otimes)$ es cerrada por la regla* **RK** *entonces $R_{\mathbf{e}}$ es reflexiva.*
2. *Si $\Xi(Q,\otimes)$ es cerrada por ambas reglas* **RK** *y* **ESC** *entonces $R_{\mathbf{e}}$ es de separación.*
3. *Si $\Xi(Q,\otimes)$ tiene el axioma* **Sim** *entonces $R_{\mathbf{e}}$ es simétrica.*
4. *Si $\Xi(Q,\otimes)$ tiene el axioma* $\otimes$**-T** *entonces $R_{\mathbf{e}}$ es transitiva.*

Prueba: Consideremos cada caso propuesto:

Reflexividad Dado que $\bar{\omega} \to \bar{\omega}$ es una tautología entonces por la regla de transcripción por * del sistema condicional $\Xi(Q,\otimes)$ que contiene la **RK** resulta que $P_{\bar{\omega},\bar{\omega}}$ pertenecerá a $\Xi(Q,\otimes)^*$ y así $\mathbf{e}(P_{\bar{\omega},\bar{\omega}}) = 1$.

Separación Basta notar que la combinación de las reglas **RK** y **ESC** establece que las únicas fórmulas condicionales puras (i.e. con operador principal $>$) son las que corresponden a reemplazar en una tautología proposicional el operador principal $\to$ de implicación material por el operador condicional $>$. Por lo tanto las únicas variables propocionales con m.e.c.'s serán $P_{\bar{\omega},\bar{\omega}}$ para cualquier $\bar{\omega}$.

Simetría Es claro que la presencia del axioma **Sim** es una condición suficiente para que garantizar que $R_{\mathbf{e}}$ sea simétrica.

Transitividad En este caso sólo es necesario enunciar el axioma $\otimes$**-T** para tres m.e.c.'s $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ y $\bar{\omega}_3$ cualesquiera, obteniendo que:

$$(\bar{\omega}_1 > \bar{\omega}_2)\&(\bar{\omega}_2 > \bar{\omega}_3) \to (\bar{\omega}_1 > \bar{\omega}_3)$$

que fuerza la transitividad de $R_{\mathbf{e}}$.

□

Ahora podemos dar una primera aproximación a nuestro objetivo final.

Teorema 3.9 *Dada la clase de modelos de Kripke Σ y su sistema condicional asociado $\Xi(Q,\otimes)$, entonces una fórmula $\varphi \in \mathcal{FL}_{\mathcal{I}}^k$ no es válida en Σ si y sólo si existe un modelo multivaluado* $\mathbf{e}$ *que satisface a la teoría $\Xi(Q,\otimes)^*$ pero no a φ^*.*

Prueba: Debido al hecho que la verdad en un mundo de las fórmulas condicionales es equivalente a la validez en el modelo, la idea de la prueba pasará por trasladar los valores de verdad en un mundo de un modelo de Kripke a una interpretación multivaluada y viceversa.

Supongamos ahora que $\not\models_\Sigma \varphi$. Entonces existe un modelo de Kripke aproximado $M = (\Omega, R, \models_M)$ tal que $\not\models_M \varphi$ y por lo tanto habrá un mundo $\omega \in \Omega$ tal que $\models_M (\omega,\varphi) < 1$. Luego tomado $\forall \psi \in \mathcal{FL}_{\mathcal{I}}^k$: $\mathbf{e}(\psi^*) = \models_M (\omega,\psi)$ obtenemos una interpretación multivaluada que por el Teorema 3.8 satisface a la teoría $\Xi(Q,\otimes)^*$ y que por definición no satisface a φ^*.

Para el sentido inverso, asumamos que tenemos una interpretación multivaluada $\mathbf{e}$ que satisface a la teoría $\Xi(Q,\otimes)^*$ pero no a φ^*. Tomemos entonces el modelo de Kripke $M_{\mathbf{e}} = (\Omega, R_{\mathbf{e}}, \models_{M_{\mathbf{e}}})$ dónde $R_{\mathbf{e}}(\omega,\omega') = \mathbf{e}(P_{\bar{\omega},\bar{\omega}'})$. Por la proposición anterior $M_{\mathbf{e}} \in \Sigma$ y claramente $\not\models_{M_{\mathbf{e}}} \varphi$. □

Con todos los ingredientes presentados podemos formular el resultado importante de esta subsección.

Teorema 3.10 *Los siguientes resultados de completitud en el estilo Pavelka pueden ser enunciados:*

- *Si* $||\varphi||_{\Sigma^{\Re}_{0f}} = 1$ *entonces* $|\varphi|_{\mathbf{FCSI}} = 1$.
- *Si* $||\varphi||_{\Sigma^{\Re}_{2f}} = 1$ *entonces* $|\varphi|_{\mathbf{FCSI\cdot T}} = 1$.
- *Si* $||\varphi||_{\Sigma^{\Re}_{3f}} = 1$ *entonces* $|\varphi|_{\mathbf{FCSI\cdot TB}} = 1$.
- *Si* $||\varphi||_{\Sigma^{\Re}_{4f}} = 1$ *entonces* $|\varphi|_{\mathbf{FCSI\cdot S4}} = 1$.
- *Si* $||\varphi||_{\Sigma^{\Re}_{\otimes f}} = 1$ *entonces* $|\varphi|_{\mathbf{FCSI\cdot S5}} = 1$.

Y respectivamente puede repetirse la enumeración para las clases de modelos estrictos $\Sigma^{\Re+}_{if}$ *con* $i = 2, 3, 4$ *o* $\otimes$ *respecto a los correspondientes sistemas estrictos (que son cerrados por la regla* **ESC***)* $\mathbf{FCSI}\cdot\#^{+}(Q, \otimes)$*, dónde* $\# = \mathbf{T}, \mathbf{TB}, \mathbf{S4}, \mathbf{S5}$.

Prueba: La demostración consiste en seguir el diagrama planteado más arriba, cuyas equivalencias fueron demostradas con anterioridad. Al respecto vale la pena comentar que la hipótesis de finitud que rige este capítulo justifica la posibilidad de operar con m.e.c.'s y en el caso del sistema racional de Gödel es necesaria para establecer la equivalencia (2), dado que el resultado de completitud fuerte en ese caso sólo es válido para teorías finitas. □

3.2.2 Lógica Condicional multivaluada de proximidad

En esta subsección presentaremos una lógica condicional que caracterizará a la noción de operador de consecuencia de proximidad.

Los siguientes serán los axiomas que utilizaremos para describir nuestras lógicas de condicionales multivaluadas, dónde p y q son fórmulas del lenguaje proposicional $\mathcal{L}_k$.

$\otimes$**– T**:	$(p \gg q) \to ((q \gg s) \to (p \gg s))$.
Res:	$((\top \gg p) \to (\top \gg q)) \to (p \gg q)$.
OI:	$(p \vee q) \gg r \leftrightarrow (p \gg r) \wedge (q \gg r)$.
OD:	$(s \gg p \vee q) \leftrightarrow (s \gg p) \vee (s \gg q)$.
IJ:	$\top \gg q \to p \gg q$.
Rfx:	$p \to \top \gg p$.

Las reglas de inferencia que utilizaremos en la descripción de nuestros sistemas lógicos serán las siguientes:

RK:	De	$p \to q$	inferir	$p \gg q$
ESC:	De	$p \gg q$	inferir	$p \to q$

Notar que **IJ** es una consecuencia directa de **Res** teniendo en cuenta $\top \gg q \to (\top \gg p \to \top \gg q)$. Otro hecho importante a resaltar es que a partir de los axiomas $\otimes$**-T** y **Res** podemos deducir que:

$$p \gg q \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\top \gg p \to \top \gg q)$$

Definición 3.8 *El sistema de lógica condicional de proximidad multivaluada básica* $\mathbf{FCSJ}(Q, \otimes)$ *corresponde al mínimo subconjunto de fórmulas de* $\mathcal{FL}_{\mathcal{J}}{}^{k}$ *que contenga a los axiomas:* **BL**, $\mathbf{A}_{\otimes}$, **rc1**, **rc2**, **Bool**, **OI**, **OD**, $\otimes$**-T** *y* **Res** *(dónde* $\mathbf{A}_{\otimes}$ *es Ł o* **G** *o* $\{\mathbf{\Pi 1}, \mathbf{\Pi 2}\}$*) y que sea cerrado tan sólo por las reglas de inferencia* **MP** *y* **RK** *si la t-norma es Gödel o Łukasiewicz y que en*

el caso de la t-norma producto estará además clausurado por **RI**. *Sus extensiones serán la lógica condicional multivaluada de proximidad autoreferente que incorpora el axioma* **Rfx** *a los anteriores y las correspondientes versiones estrictas consistirán en clausurar las anteriores por la regla* **ESC**.

Es interesante volver a remarcar que la regla **RK** ya no es la garante de reflexividad sino que aquí juega más el rol de una regla de necesitación. Por otra parte también es interesante señalar que el sistema lógico recién definido tiene una presentación mucho más sintética como se propone a continuación.

Proposición 3.4 *Los axiomas* **OI**, **OD**, $\otimes$**-T** *y* **Res** *son equivalentes a:*

OD′: $(\top \gg p \vee q) \leftrightarrow (\top \gg p) \vee (\top \gg q)$.
Def: $(p \gg q) \leftrightarrow ((\top \gg p) \rightarrow (\top \gg q))$.

en presencia de los axiomas **BL**.

Prueba: Primero comentemos que la inclusión de los axiomas **BL** nos permiten tener todas las propiedades para la implicación tales como: transitividad, distributividad respecto del $\vee$ en el consecuente y extracción de un $\vee$ en el antecedente como un $\wedge$. Después digamos que es obvio que axiomas originales implican los nuevos y por lo tanto únicamente es relevante probar la otra dirección. Para ello notemos que el axioma **Def** oficia de definición entre un condicional general en términos de aquellos que tienen en el antecedente una tautología. Por lo tanto en presencia de **Def** podemos reemplazar la forma general por esa particular en cada uno de los axiomas a deducir. Así por ejemplo $\otimes$**-T** queda como:

$$((\top \gg p) \rightarrow (\top \gg q)) \rightarrow (((\top \gg q) \rightarrow (\top \gg s)) \rightarrow ((\top \gg p) \rightarrow (\top \gg s)))$$

que resulta cierta por la transitividad de $\rightarrow$. De forma similar podemos reescribir **OD** y obtener:

$$((\top \gg s) \rightarrow (\top \gg (p \vee q))) \leftrightarrow (((\top \gg s) \rightarrow (\top \gg p)) \vee ((\top \gg s) \rightarrow (\top \gg q)))$$

Aplicado el axioma **OD′** y la distributividad del $\rightarrow$ sobre el $\vee$ del lado izquierdo obtenemos la expresión que aparece del lado derecho. En idéntica forma podemos transcribir **OI**

$$((\top \gg (p \vee q)) \rightarrow (\top \gg r)) \leftrightarrow (((\top \gg p) \rightarrow (\top \gg r)) \wedge ((\top \gg q) \rightarrow (\top \gg r)))$$

Nuevamente usando el axioma **OD′** y realizando la extracción del $\vee$ sobre el lado izquierdo obtenemos el lado derecho de la equivalencia. □

A partir de la prueba queda claro que el axioma $\otimes$**-T** surge de la propiedad de transitividad de la implicación residuada y que su inclusión no impondrá la $\otimes$-transitividad sobre la relación de accesibilidad en el *marco* asociado. Además de resaltar este hecho la equivalencia anterior nos facilitará las pruebas de correctitud y completitud. Para la obtención de esos dos resultados usaremos la misma estrategia de la subsección anterior, es decir seguiremos el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc}
\forall r < 1 : \mathbf{FCSJ} \vdash \bar{r} \rightarrow \varphi & \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} & \models_{\Sigma} \varphi \\
(2) \Updownarrow & & \Updownarrow (4) \\
\forall r < 1 : \mathbf{FCSJ^*} \vdash \bar{r} \rightarrow \varphi^* & \overset{(3)}{\Longleftrightarrow} & \mathbf{e}(\varphi^*) = 1 \ \forall \mathbf{e} : \models_{\mathbf{e}} \mathbf{FCSJ}^*
\end{array}$$

Como en el caso de los sistemas de lógicas condicionales aproximadas para probar la equivalencia (2) es necesario que toda fórmula condicional pase a ser una variable proposicional de la lógica racional, lo que a su vez conlleva a traducir todos los axiomas del sistema **FCSJ** a fórmulas

de la lógica racional que involucra esas "nuevas" variables proposicionales. Para hacer eso sistemáticamente volveremos a usar la función de traducción * que asocia a cada fórmula condicional $\varphi \gg \psi$ de $\mathcal{FL}_{\mathcal{J}}{}^k$, la variable proposicional (en la lógica racional) $P_{\varphi,\psi}$ y que se extiende a todo el lenguaje tal como lo hiciéramos en el caso de sistemas aproximados.

Utilizado esta traducción podemos transcribir los axiomas y reglas de inferencia de un sistema **FCSJ** para generar una teoría cerrada (respecto de esas reglas) de la lógica racional que notaremos como **FCSJ***. Así por ejemplo la teoría $\mathbf{FCSJ{\cdot}T}^+(Q,\otimes)^*$ contendría las siguientes fórmulas dónde φ, ψ y χ están en $\mathcal{L}_k$:

$$P_{\varphi,\psi} \leftrightarrow (P_{\top,\varphi} \to P_{\top,\psi}).$$

$$P_{\top,(\varphi\vee\psi)} \leftrightarrow P_{\top,\varphi} \vee P_{\top,\psi}.$$

$$\varphi \to P_{\top,\varphi}.$$

y estará cerrada por las reglas de inferencia:

De	$\varphi \to \psi$	inferir	$P_{\varphi,\psi}$.
De	$P_{\varphi,\psi}$	inferir	$\varphi \to \psi$.

Notar que debido a la forma de hacer la transcripción, las fórmulas que se infieren a través de las reglas **RK** o **ESC** son directamente incluídas, y las correspondientes pruebas en la lógica racional serán más cortas. Ahora podemos presentar la prueba de la equivalencia (2). La misma será no específica en el sentido que la enunciaremos y probaremos para un sistema genérico e iremos asumiendo en cada paso si un axioma o regla está presente.

Teorema 3.11 *Simbolizando con $\Xi(Q,\otimes)$ a uno cualquiera de los sistemas condicionales de proximidad presentados con anterioridad y tomando como $\Xi(Q,\otimes)^*$ a la teoría que surge de aplicar a este sistema la transformación *. Entonces:*

$$\vdash_{\Xi(Q,\otimes)} \varphi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Xi(Q,\otimes)^* \vdash_{R\otimes L} \varphi^*$$

Prueba: La prueba es idéntica a la presentada para el Teorema 3.7 y no será repetida aquí. □

Ahora el paso siguiente es demostrar la equivalencia (4). Lo primero, y más sencillo, es verificar que los axiomas son válidos en las pretendidas interpretaciones y que las reglas preservan esa validez. Eso es exactamente lo que se hace a continuación.

Teorema 3.12 *Sea $M = (W, R, \models)$ un modelo de Kripke de proximidad en $\Sigma^{\Re}_{0f}$. Entonces M satisface los axiomas:* **BL**, $\mathbf{A}_\otimes$, **rc1**, **rc2**, **Bool**, **OD′**, *y* **Def** *(dónde* $\mathbf{A}_\otimes$ *es Ł o* **G** *o* $\{\mathbf{\Pi 1}, \mathbf{\Pi 2}\}$ *según sea la t-norma subyacente). Además las reglas* **MP**, **RK** *y* **RI**, *preservan validez en M. Adicionalmente, si R fuera reflexiva (i.e. si $M \in \Sigma^{\Re}_{2f}$) entonces M satisfaría* **Rfx** *y si R fuera de separación entonces también la regla* **ESC** *preservaría validez en M.*

Prueba: Las demostraciones seguirán un esquema muy similar al planteado en el caso de la lógica multicondicional de proximidad y nuevamente su desarrollo será trasladado al final del capítulo. □

Teorema 3.13 *Dada la clase de modelos de Kripke Σ y su sistema condicional asociado $\Xi(Q,\otimes)$. Entonces una fórmula $\varphi \in \mathcal{FL}^k_{\mathcal{J}}$ no es válida en Σ si y sólo si existe un modelo multivaluado* **e** *que satisface a la teoría $\Xi(Q,\otimes)^*$ pero no a φ^*.*

Prueba: La idea de la prueba en este caso consistirá en trasladar los valores de verdad en un mundo de un modelo de Kripke a una interpretación multivaluada y viceversa.

Supongamos ahora que $\not\models_\Sigma \varphi$. Entonces existe un modelo de Kripke de proximidad $M = (\Omega, R, \models_M)$ tal que $\not\models_M \varphi$ y por lo tanto habrá un mundo $\omega \in \Omega$ tal que $\models_M (\omega, \varphi) < 1$. Luego

tomado $\forall\psi \in \mathcal{FL}^k_{\mathcal{J}}$: $\mathbf{e}(\psi^*) = \models_M (\omega, \psi)$ obtenemos una interpretación multivaluada que por el Teorema 3.8 satisface a la teoría $\Xi(Q, \otimes)^*$ y que por definición no satisface a φ^*.

En el sentido contrario, asumamos que tenemos una interpretación multivaluada $\mathbf{e}$ que satisface a la teoría $\Xi(Q, \otimes)^*$ pero no a φ^*. Puesto que para toda fórmula proposicional pura p es el caso que $\mathbf{e}(p \vee \neg p) = 1$, entonces existirá un único m.e.c. $\bar{\omega}$ tal que $\mathbf{e}(\bar{\omega}) = 1$. Tomemos entonces el modelo de Kripke $M_{\mathbf{e}} = (\Omega, R_{\mathbf{e}}, \models_{M_{\mathbf{e}}})$ dónde para todo $\omega' \in W$:

$$R_{\mathbf{e}}(\omega'', \omega') = \begin{cases} \mathbf{e}(P_{\top,\bar{\omega}'}) & si\, \omega'' = \omega \\ 1 & si\, \omega'' \neq \omega \text{ y } \omega'' = \omega' \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Claramente $M_{\mathbf{e}} \in \Sigma$ y $\not\models_{M_{\mathbf{e}}} \varphi$. Más aún, si **Rfx** estaba en $\Xi(Q, \otimes)$ entonces el modelo propuesto pertenecerá a la clase de modelos $\Sigma^{\Re}_{2f}$ y si $\Xi(Q, \otimes)$ estaba cerrada por **ESC** entonces el modelo propuesto está en $\Sigma^{\Re+}_{2f}$ (ver Proposición 3.3 para su justificación). □

Con todos los ingredientes presentados podemos formular el resultado importante de esta subsección.

Teorema 3.14 *Los siguientes resultados de completitud pueden ser enunciados:*

- *Si* $||\varphi||_{\Sigma^{\Re}_{0f}} = 1$ *entonces* $|\varphi|_{\mathbf{FCSJ}} = 1$.
- *Si* $||\varphi||_{\Sigma^{\Re}_{2f}} = 1$ *entonces* $|\varphi|_{\mathbf{FCSJ\cdot T}} = 1$.

Y respectivamente puede repetirse la enumeración para las clases de modelos estrictos $\Sigma^{\Re+}_{if}$ *con* $i = 0, 2$ *respecto a los correspondientes sistemas estrictos (que son cerrados por la regla* **ESC***)* $\mathbf{FCSJ}^+(Q, \otimes)$ *y* $\mathbf{FCSJ\cdot T}^+(Q, \otimes)$.

Prueba: La demostración consiste en seguir el diagrama planteado más arriba, cuyas equivalencias fueron demostradas con anterioridad. Al respecto vale la pena comentar que la hipótesis de finitud que rige este capítulo justifica la posibilidad de operar con m.e.c.'s y en el caso del sistema racional de Gödel es necesaria para establecer la equivalencia (2), dado que el resultado de completitud fuerte en ese caso sólo es válido para teorías finitas. □

3.3 Relación con los operadores de consecuencia

En esta sección describiremos cómo los operadores de consecuencia aproximada y de proximidad pueden ser representados en los diferentes sistemas lógicos introducidos en este capítulo. Primero recordemos que fijado un modelo $\mathcal{M} = (\Omega, R, \models_{\mathcal{M}})$ donde $\models_{\mathcal{M}}$ es un isomorfismo entre Ω y el conjunto de todas las interpretaciones booleanas del lenguaje finito $\mathcal{L}_k$ resulta que las siguientes equivalencias pueden ser establecidas directamente a partir de las definiciones de satisfactibilidad, tanto respecto de los operadores multimodales como de los multivaluados:

$$p \models^{\alpha}_{R,T} q \quad \text{si y sólo si} \quad \models_{\mathcal{M}} T \to p >_{\alpha} q \quad \text{si y sólo si} \quad \models_{\mathcal{M}} T \to (\alpha \to (p > q)).$$

$$p \models^{\alpha}_{R,T} q \quad \text{si y sólo si} \quad \models_{\mathcal{M}} T \to p \gg_{\alpha} q \quad \text{si y sólo si} \quad \models_{\mathcal{M}} T \to (\alpha \to (p \gg q)).$$

Hay dos abusos de notación en que hemos incurrido al mencionar estas equivalencias y que valen la pena aclarar. El primero corresponde al hecho de que el operador $\models_{\mathcal{M}}$ en la segunda y tercera columna no son exactamente el mismo, pues uno corresponde a una noción bivaluada y la otra a una multivaluada. El segundo "exceso", aparece cuando tomamos la teoría T que es un conjunto, y la incluimos como antecedente de una fórmula. Lo que estamos haciendo es llamar de la misma manera

al conjunto y a la fórmula que la representa (que existe puesto que a lo largo del presente capítulo hemos asumido que el lenguaje era finitamente generado por las proposiciones $p_1, p_2, \ldots, p_k$).

Como ya mencionamos, las equivalencias enunciadas son de carácter semántico. Si ahora deseáramos traducirlas a sus homólogas sintácticas a través de los respectivos teoremas de completitud sería necesario hacer un trabajo previo, dado que estos resultado establecen el vínculo entre un sistema lógico y una clase de modelos (y no un modelo en particular). Esencialmente para cada modelo $\mathcal{M}$ sería necesario construir una teoría $T_{\mathcal{M}}$ que capture a nivel sintáctico el modelo en cuestión (i.e. que el único modelo que la satisfaga sea $\mathcal{M}$). Así por ejemplo, para el caso de un modelo aproximado en Σ_{0f} la teoría en cuestión tendría las siguientes fórmulas:

$$\{\bar{\omega} \mid \omega \in \Omega\} \cup \{\bar{\omega} >_\alpha \bar{\omega}' \mid R(\omega,\omega') = \alpha : \forall \omega, \omega' \in \Omega\}$$

donde cada $\bar{\omega}$ corresponde al m.e.c. asociado a un mundo ω en el sentido que $\bar{\omega} = l_1 \wedge \cdots \wedge l_k$ si $\forall\, 1 \leq j \leq k : l_j = p_j$ cuando $\omega \models_{\mathcal{M}} p_j$ y en caso contrario será $\neg p_j$.

Sin embargo creemos que los resultados de este capítulo son más interesantes y relevantes cuando se busca independencia de un modelo particular (que corresponde a tener una descripción completa). En general, se tiene una caracterización parcial del escenario o situación que se busca describir lógicamente. Lo usual, es que sólo se pueda establecer el grado de consistencia o de implicación para algunas proposiciones y con ello un conjunto de restricciones para determinar la relación de similitud pero que no alcanzarán para dar una descripción total de la misma. En ese contexto, y a pesar de esta parcialidad, es deseable extraer las conclusiones disponibles. En nuestro formalismo eso es posible. Primero es necesario elegir el sistema formal que más se adecua a la ontología del escenario que buscamos describir, i.e. decidir si tendremos reflexividad, simertía o transitividad. El paso siguiente es integrar todo el conocimiento disponible en una teoría o fórmula. En el caso de los ejemplos planteados en el capítulo anterior esa teoría incluiría todos los casos y reglas de interpolación, respectivamente. A partir de esos elementos podemos utilizar el sistema lógico elegido para extraer conclusiones de la teoría propuesta.

Por otra parte el enfoque sintáctico aquí desarrollado puede ser utilizado para reproducir los patrones inferenciales que combinan los dos operadores de consecuencia. Para ello deberíamos generar nuevos sistemas lógicos **CSIJ** (o **FCSIJ**) donde se combinen los axiomas de las lógicas condicionales aproximadas y de proximidad de clases compatibles. Notar que no podemos combinar un sistema lógico de aproximación que contenga al axioma de reflexividad con uno de proximidad que no lo contenga porque perderíamos completitud. A este tipo de compatibilidad es que nos referíamos. Por supuesto es necesario incluir un axioma que establezca la relación entre ambos operadores. En el caso multicondicional este será: $\forall \alpha \in G : \top \gg_\alpha p \to \top >_\alpha p$. En el caso multivaluado será: $\top \gg p \to \top > p$.

Además en esos sistemas podremos probar propiedades metateóricas tales como que los sistemas **CSIJ·5** (i.e. que contiene los axiomas de reflexividad para $>$ y $\gg$, y simetría y transitividad para $>$) resulta probable que:

$$\vdash_{\mathbf{CSIJ\cdot 5}} p >_\alpha q \leftrightarrow p \gg_\alpha q$$

3.4 Demostraciones

Aquí transcribiremos las demostración de los teoremas 3.8 y 3.12.

Prueba: Las pruebas correspondientes al Teorema 3.8 son esencialmente equivalentes a las presentadas en el Teorema 3.1. En tal sentido, ésta será nuevamente referida a cada par ⟨ sistema lógico, clase de modelo ⟩. En cada caso se probará que los axiomas mencionados para una determinada lógica son válidos en la correspondiente clase y que el resto de los axiomas no lo son. En idéntica forma procederemos con las reglas de inferencia. Tanto los axiomas de la lógica BL, los axiomas Ł ó **G** ó $\{\mathbf{\Pi 1}, \mathbf{\Pi 2}\}$ y los **rc**'s, así como las reglas de modus ponens e infinitaria, no serán consideradas puesto que ésos son resultados conocidos. Como criterio general recordemos que una interpretación

$\models: \Omega \times \mathcal{FL}_{\mathcal{I}}{}^k \mapsto \Re$ valida una fórmula $\varphi \to \psi$ si para todo $\omega \in \Omega \models (\omega, \varphi \to \psi) = 1$ lo cual es equivalente a que $\models (\omega, \varphi) \leq \models (\omega, \psi)$. Además volvamos a remarcar que la interpretación $\models$ es especial en el sentido que a los fórmulas proposicionales puras (sin operadores condicionales) les asignará un valor de verdad estrictamente verdadero (1) o estrictamente falso (0).

$\langle$**FCSI**, $\Sigma_{0f}^{\Re}\rangle$

ST′: En esta oportunidad sólo es necesario señalar que por convención el supremo del conjunto vacío es 0. Por lo tanto si p es satisfactible entonces $I_R^M(\perp \mid p) = 0$.

ST": En esta ocasión basta notar que por convención el ínfimo del conjunto vacío es 1. Por lo tanto $I_R^M(p \mid \perp) = 1$.

OI: Nótese que por definición $\models_M (\omega, ((p \vee q > r) \leftrightarrow ((p > r) \wedge (q > r))) = 1$ si y sólo si, $I_R^M(r \mid p \vee q) = \min(I_R^M(r \mid p), I_R^M(r \mid q))$. Pero esa propiedad ya fue ya probada en el Capítulo 1.

OD: En este caso es suficiente probar que: $I_R^M(p \vee q \mid \bar{\omega}) = \max\{I_R^M(p \mid \bar{\omega}), I_R^M(q \mid \bar{\omega})\}$. Pero eso también ya fue probado en el Capítulo 1 al presentar las propiedades de esa medida de implicación. Nuevamente, es importante remarcar el valor del hecho de que una conjunción elemental maximal $\bar{\omega}$ tenga una relación biunívoca con un índice $\omega \in W$. Si éste no fuera el caso esta propiedad no se verificaría.

Contraejemplos: Para ver que tanto los axiomas $\otimes$**-T** y **Sim** no son válidos en la clase de modelos $\Sigma_{0f}^{\Re}$ basta elegir apropiadamente un modelo que sirva de contraejemplo. Para contra-argumentar la validez de $\otimes$**-T** consideramos fórmulas p, q y r lógicamente independientes y proponemos un modelo M tal que para todo p-mundo ω_1 y q-mundo ω_2 $R(\omega_1, \omega_2) = 1$ y para todo q-mundo ω_2 y r-mundo ω_3 $R(\omega_2, \omega_3) = 1$, pero que exista un $\neg p \wedge \neg q \wedge r$-mundo $\omega*$ tal que para todo p-mundo ω_1 $R(\omega_1, \omega*) = 0$. Así resulta que $I_R^M(q \mid p) = 1$ y $I_R^M(r \mid q) = 1$ pero $I_R^M(r \mid p) = 0 < (1 \otimes 1) = 1$.
Como contraejemplo para el axioma **Sim** en $\Sigma_{0f}^{\Re}$ podemos tomar en consideración el modelo M que tiene la particularidad de que la proximidad desde todos los p-mundos a todo los $\neg p$-mundos es igual a 1 pero que la proximidad desde todos los $\neg p$-mundos a todo los p-mundos es igual a 0. Luego para todo mundo ω, resulta que $\models_M (\omega, \bar{\omega}' > \bar{\omega}") = 1$ y $\models_M (\omega, \bar{\omega}" > \bar{\omega}') = 0$ si $\omega"$ es un p-mundo y ω' es un $\neg p$-mundo.
Para verificar que la regla **ESC** no preserva validez en la clase de modelos aquí analizados, basta con considerar un par de fórmulas p y q en $\mathcal{L}_k$ tal que $p \to q$ no sea tautología y un modelo M que sea irreflexivo (i.e. $R(\omega, \omega) < 1$), que contenga un $p \wedge \neg q$-mundo $\omega*$, y asegurando que para todo p-mundo ω exista otro q-mundo ω' distinto del primero tal que $R(\omega, \omega') = 1$. Esto nos asegura que $I_R^M(q \mid p) = 1$, y por lo tanto $\models_M (\omega*, p > q) = 1$ pero $\models_M (\omega*, p \to q) = 0 < 1$.

Finalmente para chequear que la regla de inferencia **RK** no preserva validez en la clase $\Sigma_{0f}^{\Re}$ basta hacer notar que en la familia de modelos $\mathcal{C} = \{M = (W, R, \models_M) \mid \forall \omega, \omega' \in W : R(\omega, \omega') \leq r < 1$ con r en los reales$\}$, $I_R^M(q \mid p) \leq r$ para todo par de fórmulas p y q. Luego el contra-argumento aparece teniendo en cuenta que la fórmula $p \to p$ es válida en la clase $\Sigma_{0f}^{\Re}$ pero no la fórmula $p > p$.

$\langle$**FCSI·T**, $\Sigma_{2f}^{\Re}\rangle$

RK: Para verificar que esta regla de inferencia preserva validez es sólo necesario considerar alguna tautología de la forma $p \to q$. Dado un modelo $M = (W, R, \models_M)$ en $\Sigma_{2f}^{\Re}$, i.e. con R reflexiva, el valor de:

$$I_R^M(q \mid p) = \inf_{\omega \models p} \sup_{\omega' \models q} R(\omega, \omega')$$

es igual a 1 puesto que para todo p-mundo $\omega \in W$ también es un q-mundo debido a que : $\models_M (\omega, p \to q) = 1$. Por lo tanto $p > q$ es una fórmula válida en M tal como deseábamos probar.

Contraejemplos: Para los axiomas **Sim** y $\otimes$**-T** sólo hace falta notar que los modelos que sirvieron como contraejemplos para esos mismos axiomas en la clase $\Sigma^{\Re}_{0f}$, ahora pueden ser reutilizados agregándoles la condidición que para todo mundo $\omega \in W : R(\omega, \omega) = 1$, la cual no interfiere con la contra-argumentación.

Para probar que la regla de inferencia **ESC** no preserva validez en la clase $\Sigma^{\Re}_{2f}$ es suficiente considerar el modelo $M = (W, R, \models_M)$ tal $R(\omega, \omega') = 1$ para todo par de mundos $\omega, \omega' \in W$. Así tomado, el modelo valida toda fórmula de la forma $p > q$, pero obviamente no toda fórmula $p \to q$ es una tautología.

$\langle$**FCSI·TB**, $\Sigma^{\Re}_{3f}\rangle$

Sim: Consideremos cualquier modelo $M = (W, R, \models_M)$ tal que R es reflexiva y simétrica. Por definición, en todo mundo ω sucede que $\models_M (\omega, (\bar{\omega}_1 > \bar{\omega}_2) \leftrightarrow (\bar{\omega}_2 > \bar{\omega}_1)) = 1$ si y sólo si $I^M_R(\bar{\omega}_2 \mid \bar{\omega}_1) = R(\omega_1, \omega_2)$ es igual a $I^M_R(\bar{\omega}_1 \mid \bar{\omega}_2) = R(\omega_2, \omega_1)$. Lo cual es cierto por simetría.

Contraejemplos: Para contra-argumentar sobre la validez de $\otimes$**-T**, consideremos las fórmulas p, q y r lógicamente independientes y un modelo $M = (W, R, \models_M)$ tal que R es reflexiva y simétrica y que para todo p-mundo ω_1 y q-mundo ω_2, $R(\omega_1, \omega_2) = R(\omega_2, \omega_1) = 1$ y para todo q-mundo ω_2 y r-mundo ω_3, $R(\omega_2, \omega_3) = R(\omega_3, \omega_2) = 1$, pero que exista un $\neg p \wedge \neg q \wedge r$-mundo $\omega*$ tal que para todo p-mundo ω_1, $R(\omega_1, \omega*) = R(\omega*, \omega_1) = 0$. Así resulta que $I^M_R(q \mid p) = 1$ y $I^M_R(r \mid q) = 1$ pero $I^M_R(r \mid p) = 0 < (1 \otimes 1) = 1$.

Para verificar que la regla **ESC** no es válida en la clase de modelos $\Sigma^{\Re}_{3f}$, sólo es necesario reconsiderar el contraejemplo anterior $M = (W, R, \models_M)$ tal $R(\omega, \omega') = 1$ para todo par de mundos $\omega, \omega' \in W$, el cual obviamente satisface reflexividad y simetría. Nuevamente este modelo valida toda fórmula de la forma $p > q$, pero obviamente no toda fórmula $p \to q$ es una tautología.

$\langle$**FCSI·4**, $\Sigma^{\Re}_{4f}\rangle$

$\otimes$**-T:** Para este caso tomemos en consideración un modelo $M = (W, R, \models_M)$ tal que R es reflexiva y $\otimes$-transitiva. Note que la interpretación del axioma $(p > q)\&(q > r) \to (p > r)$ corresponde a:

$$I^M_R(r \mid q) \otimes I^M_R(q \mid p) \leq I^M_R(r \mid p)$$

propiedad que ya fue probada en el Capítulo 1 para esa medida de implicación.

Contraejemplo: De nuevo el ejemplo planteado para el sistema anterior para corroborar la invalidez de **ESC** sigue siendo plausible en este sistema.

La insatisfactibilidad del axioma **Sim** es la clase $\Sigma^{\Re}_{4f}$ puede ser verificada considerando el modelo $M = (W, R, \models_M)$ tal que R es reflexiva y representa un orden total estricto entre los elementos $\omega \in W$. Más específicamente enumeramos los elementos de W desde 1 a 2^{2^k} dónde k es el número de variables proposicionales y tomamos la relación R como sigue: $\forall \omega_i \in W : R(\omega_i, \omega_i) = 1$ y $\forall \omega_i, \omega_j \in W i < j : R(\omega_i, \omega_j) = 1$ y $R(\omega_j, \omega_i) = 0$. Claramente para cualquier n, es el caso que $\models_M (\omega_n, \bar{\omega}_i > \bar{\omega}_j) = 1$ y $\models_M (\omega_n, \bar{\omega}_j > \bar{\omega}_i) = 0$ si $i < j$.

$\langle$**FCSI·5**, $\Sigma^{\Re}_{\otimes f}\rangle$

Contraejemplo: Para comprobar que **ESC** no es válida en la clase de modelos $\Sigma^{\Re}_{\otimes f}$, consideremos otra vez el modelo $M = (W, R, \models_M)$ tal $R(\omega, \omega') = 1$ para todo par de mundos $\omega, \omega' \in W$, el cual obviamente satisface reflexividad, simetría y $\otimes$-transitividad. Nuevamente este modelo valida toda fórmula de la forma $p > q$, pero obviamente no toda fórmula $p \to q$ es una tautología.

$\langle$**FCSI**$\cdot\#^+, \Sigma_{if}^{\Re+}\rangle$

ESC: Nosotros probaremos ahora que el axioma ESC es válido en toda clase de modelos tal que la relación de accesibilidad satisface la propiedad de separación. Eso probará que todos los sistemas lógicos mencionados con anterioridad que son cerrados por la regla de inferencia **RK**, **FCSI**$\cdot\#$, extendidos con el axioma **ESC** son correctos respecto $\Sigma_{if}^{\Re+}$ dónde $\# = \mathbf{T}, \mathbf{TB}, \mathbf{S4}, \mathbf{S5}$ y $i = 2, 3, 4, \otimes$, respectivamente. Para eso consideremos un modelo $M = (W, R, \models_M)$ en cualquiera de dichas clases $\Sigma_{if}^{\Re+}$, i.e. $R(\omega, \omega') = 1 \leftrightarrow \omega = \omega'$. Supongamos que para todo $\omega \in W : \models_M (\omega, p > q) = 1$ y por definición esto sucede si y sólo si

$$I_R^M(q \mid p) = \inf_{\omega \models p} \sup_{\omega' \models q} R(\omega, \omega') = 1$$

Lo cual es equivalente a afirmar que para todo $\omega \models p : \sup_{\omega' \models q} R(\omega, \omega') = 1$. Puesto que W es finito la último expresión puede ser enunciada como: para todo $\omega \models p$ existe un $\omega' \models q$ tal que $R(\omega, \omega') = 1$. Pero como la R satisface la propiedad de separación entonces para todo $\omega \models p$ debe ser $\omega' = \omega$ y por lo tanto $\omega \models q$.

□

Prueba: Las demostraciones del Teorema 3.12 seguirán un esquema muy similar al planteado en el caso de la lógica multicondicional de proximidad.

OD′: En este caso es suficiente probar que: $J_{R,\bar{\omega}}^M(\varphi \vee \psi \mid \top) = \max\{J_{R,\bar{\omega}}^M(\varphi \mid \top), J_{R,\bar{\omega}}^M(\psi \mid \top)\}$. Pero eso ya fue probado en el capítulo anterior al presentar las propiedades de esta medida de implicación.

Def: Por definición de satisfactibilidad resulta que $\models_M (\omega, \varphi \gg \psi) = J_{R,\bar{\omega}}^M(\varphi \mid \psi)$. Eso es igual a: $I_R^M(\varphi \mid \bar{\omega}) \to I_R^M(\psi \mid \bar{\omega})$. Puesto que siempre $I_R^M(\varphi \mid \bar{\omega}) \leq I_R^M(\top \mid \bar{\omega})$, la implicación anterior es equivalente a: $(I_R^M(\top \mid \bar{\omega}) \wedge I_R^M(\varphi \mid \bar{\omega})) \to I_R^M(\psi \mid \bar{\omega})$. Dado que estamos tratando con t-normas continuas podemos reemplazar equivalentemente el antecedente de esta última expresión para obtener:
$(I_R^M(\top \mid \bar{\omega}) \otimes (I_R^M(\top \mid \bar{\omega}) \to I_R^M(\varphi \mid \bar{\omega}))) \to I_R^M(\psi \mid \bar{\omega})$. Lo cual es equivalente por los axiomas de **BL** a: $(I_R^M(\top \mid \bar{\omega}) \to I_R^M(\varphi \mid \bar{\omega})) \to (I_R^M(\top \mid \bar{\omega}) \to I_R^M(\psi \mid \bar{\omega}))$. Pero esta última expresión corresponde al valor de verdad: $\models_M (\omega, (\top \gg \varphi) \to (\top \gg \psi))$, tal como deseábamos probar.

RK: Para verificar que esta regla de inferencia preserva validez es sólo necesario considerar alguna tautología de la forma $\varphi \to \psi$. Dado un modelo $M = (W, R, \models_M)$ en $\Sigma_{0f}^{\Re}$, el valor de $\models_M (\omega, \varphi \gg \psi)$ es:

$$I_R^M(\varphi \mid \bar{\omega}) \otimes\!\to I_R^M(\psi \mid \bar{\omega})$$

igual a 1 puesto que todo φ-mundo también es un ψ-mundo.

Contraejemplos: Sea $M = (W, R, \models_M)$ un modelo serial en $\Sigma_{1f}^{\Re}$ tal que para todo mundo ω : $R(\omega, \omega_\psi) < 0.9$ para todo ψ-mundo ω_ψ. Luego si $\varphi \to \psi$ es una tautología y $\models_M (\omega, \varphi) = 1$, resulta que $\models_M (\omega, \top \gg \varphi) = 0.9$. Por lo tanto M es un contra-modelo de **Rfx**.

El modelo $M = (W, R, \models_M)$ que revoca la preservación de validez de la regla **ESC**, en la clase de modelos $\Sigma_{2f}^{\Re}$ puede ser aquel que para todo mundo ω hay un ψ-mundo ω_ψ tal que $R(\omega, \omega_\psi) \geq R(\omega, \omega_\varphi)$ todo φ-mundo ω_φ. Eso hace que para todo mundo ω $J_{R,\bar{\omega}}^M(\psi \mid \varphi) = 1$. Pero obviamente eso no quiere decir que $\varphi \to \psi$ fuera una tautología.

Rfx: Sea $M = (W, R, \models_M)$ un modelo reflexivo, i.e. en $\Sigma_{2f}^{\Re}$ y sea $\omega \in W$ tal que $\models_M (\omega, \varphi) = 1$. Pero entonces

$$\models_M (\omega, \top \gg \varphi) = J_{R,\bar{\omega}}^M(\varphi \mid \top) = I_R^M(\top \mid \bar{\omega}) \otimes\!\to I_R^M(\varphi \mid \bar{\omega})$$

lo cual es igual a 1 por reflexividad.

$\square$

Capítulo 4

Lógicas multimodales bivaluadas

4.1 Introducción

Como ya fuera mencionado en la introducción, uno de los objetivos de nuestro trabajo es estudiar las posibles lógicas asociadas al razonamiento basado en similitud, considerándolo en el sentido dado en el Capítulo 1. En el presente capítulo propondremos un enfoque que podría considerarse como más "clásico". Partiendo de nuestro supuesto óntico acerca de que los modelos de razonamiento por similitud deben ser sustentados por una comparación entre estados o situaciones y no por comparar proposiciones, tomaremos como herramienta para formalizar esa noción de comparabilidad, una relación borrosa R entre interpretaciones. Así pues, si esta relación es interpretada como una medida de proximidad entre situaciones, parecería intuitivo enunciar que el grado de verosimilitud de una fórmula φ en una situación particular es mayor o igual que un valor α si hay otra situación (eventualmente la misma) donde φ es cierta y cuyo grado de proximidad sea mayor o igual al valor dado. Más formalmente sería:

$$\omega \models_R^\alpha \varphi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{existe un } \varphi\text{-mundo } \omega' \text{ tal que } R(\omega, \omega') \geq \alpha,$$

Claramente, esta expresión formaliza la idea de que aún cuando una fórmula puede ser falsa en una situación ω, ella puede ser cercanamente verdadera en algún grado, p.ej. α. En particular, es de esperar que si en ω, φ ya fuera cierta entonces ese grado de cercanía alcance el valor 1. Bajo ese precepto es que insistiremos en que la relación borrosa debe ser al menos reflexiva.
Ahora podríamos preguntarnos cuál es la relación entre esta última noción de consecuencia y las presentadas en el Capítulo 2. Es sencillo comprobar que, en el caso de finitud del conjunto de interpretaciones (situaciones) o del rango G de la relación R, la expresión precedente coincide con la noción de consecuencia aproximada definida en 2.5.1

$$\Gamma \models_R^\alpha \varphi \qquad \Longleftrightarrow \qquad I_R(\varphi \mid \Gamma) \geq \alpha$$

puesto que tomando Γ igual a $\widehat{\omega}$, el conjunto de todas las fórmulas verdaderas en ω [1] , resulta que

$$I_R(\varphi \mid \widehat{\omega}) = \sup_{\omega' \models \varphi} R(\omega, \omega') \tag{4.1}$$

y debido a la hipótesis de finitud el supremo corresponderá a un máximo y en tal caso existirá un φ-mundo $\omega*$ tal que $R(\omega, \omega*) \geq \alpha$.
Sin embargo, en el caso general de lenguajes infinitos recursivamente enumerables ambas definiciones no son completamente equivalentes puesto que, si bien siempre vale que la existencia garantiza que el supremo supera el valor propuesto, la conversa no es necesariamente cierta.
A causa de este hecho, dos diferentes (pero cercanos) enfoques pueden ser planteados.

[1] Notar que $\widehat{\omega}$ es muy diferente al $\overline{\omega}$ del capítulo anterior, puesto que el primero representa a un conjunto de fórmulas y el segundo corresponde a una única fórmula.

1. Uno más "clásico", elaborado a partir de tomar en consideración que cada medida de proximidad R sobre W define dos familias de relaciones de accesibilidad anidadas R^c_α y R^o_α en $W \times W$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} R^c_\alpha(\omega,\omega') & \Longleftrightarrow & R(\omega,\omega') \geq \alpha \\ R^o_\alpha(\omega,\omega') & \Longleftrightarrow & R(\omega,\omega') > \alpha \end{array}$$

para $\omega, \omega' \in W$. Por lo tanto, para cada α, podemos dar dos nuevos operadores modales $\langle\ \rangle^c_\alpha$ y $\langle\ \rangle^o_\alpha$, con la siguiente semántica standard correspondiente a R^c_α y R^o_α respectivamente:

$$\begin{array}{ccc} \omega \models \langle q \rangle^c_\alpha & \Longleftrightarrow & \exists \omega' \in W : \omega' \models q \ \text{ y } \ R^c_\alpha(\omega,\omega'), \\ \omega \models \langle q \rangle^o_\alpha & \Longleftrightarrow & \exists \omega' \in W : \omega' \models q \ \text{ y } \ R^o_\alpha(\omega,\omega'). \end{array}$$

2. El otro enfoque tendrá en cuenta que, dado un arbitrario conjunto de mundos posibles W, una relación borrosa R sobre W induce, para cada mundo $\omega \in W$, una medida de implicación de proposiciones que estará dada por la expresión (4.1). Dicha medida puede ser usada para definir, para cada α, otros dos operadores $\Diamond^c_\alpha$ y $\Diamond^o_\alpha$, cuya semántica corresponde a:

$$\begin{array}{ccc} \omega \models \Diamond^c_\alpha p & \Longleftrightarrow & I_R(p \mid \widehat{\omega}) \geq \alpha \\ \omega \models \Diamond^o_\alpha p & \Longleftrightarrow & I_R(p \mid \widehat{\omega}) > \alpha \end{array}$$

desde las cuales pueden proponerse las siguientes equivalencias usando la noción standard de consecuencia lógica:

$$\begin{array}{ccc} p \models \Diamond^c_\alpha q & \Longleftrightarrow & I_R(q \mid p) \geq \alpha \\ p \models \Diamond^o_\alpha q & \Longleftrightarrow & I_R(q \mid p) > \alpha \end{array}$$

las que reeditan sintácticamente la relación básica entre medidas de implicación y consecuencia graduada.

En los casos de finitud ya mencionados, los operadores abiertos $\langle\ \rangle^o$ y $\Diamond^o$ pueden ser definidos a partir de los operadores cerrados $\langle\ \rangle^c$ y $\Diamond^c$, respectivamente. Más aún, teniendo en cuenta esto y el comentario hecho anteriormente en el caso de finitud, es claro que ambos enfoques son equivalentes.

En el caso general, si bien $\langle\ \rangle^o_\alpha$ es semánticamente equivalente a $\Diamond^o_\alpha$, eso no sucede para $\langle\ \rangle^c_\alpha$ y $\Diamond^c_\alpha$ y sólo las siguientes relaciones pueden ser establecidas:

$$\begin{array}{ccc} \omega \models \langle p \rangle^c_\alpha & \Longrightarrow & \omega \models \Diamond^c_\alpha p \\ \omega \models \Diamond^c_\alpha p & \Longrightarrow & \omega \models \langle p \rangle^c_\beta, \text{ para } \beta < \alpha. \end{array}$$

Otro aspecto que marca la diferencia entre uno y otro enfoque corresponde al hecho que en general las lógicas generadas bajo la primer semántica serán compactas mientras las segundas no. Por ejemplo, si tomamos como nuestro G a un subconjunto de los racionales de $[0,1]$ igual a $\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in I\!N\}$, entonces el conjunto infinito de fórmulas $\{\Diamond^c_\alpha \varphi \mid \alpha \in G\} \cup \{\neg \Diamond^c_1 \varphi\}$ no es satisfactible en ningún modelo, mientras que cualquier subconjunto finito claramente lo es en algún modelo. En cambio el conjunto infinito $\{\langle \varphi \rangle^c_{1-\frac{1}{n}}\}_{n \in I\!N} \cup \{\neg \langle \varphi \rangle^c_1\}$ es satisfactible (y por lo tanto todo subconjunto finito). Para más detalles de la semántica existencial ver [RGG95b] y [Suz97].

En este capítulo sólo nos ocuparemos del último enfoque, debido a nuestra intención de formalizar las nociones de consecuencia de proximidad y aproximada. Sin embargo creemos que el análisis que hemos terminado de presentar, justifica aún más nuestra propuesta de incluir tales operadores de consecuencia en el contexto de modelos de razonamiento por verosimilitud.

4.2 Lenguaje y Sistemas Lógicos

El lenguaje de lógica modal graduada que presentaremos en este capítulo tendrá como elementos constitutivos a:

1. Un conjunto enumerable de variables proposicionales: $p_0, p_1, p_2, ...$
2. Un conjunto enumerable $G \subseteq [0,1]$ tal que $0, 1 \in G$.
3. Dos conectivas: $\neg, \rightarrow$.
4. Operadores modales: $\Diamond^c_\alpha$, $\Diamond^o_\alpha$, para cada α en G.

Definición 4.1 *El lenguaje multimodal es definido como el mínimo conjunto $\mathcal{L}_\Diamond$ satisfaciendo las siguientes condiciones:*

1. $p_n \in \mathcal{L}_\Diamond$ *para* $n \geq 0$.
2. *Si* $\varphi \in \mathcal{L}_\Diamond$ *entonces* $\neg\varphi \in \mathcal{L}_\Diamond$.
3. *Si* $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_\Diamond$ *entonces* $\varphi \rightarrow \psi \in \mathcal{L}_\Diamond$
4. *Si* $\varphi \in \mathcal{L}_\Diamond$ *entonces* $\Diamond^c_\alpha\varphi, \Diamond^o_\alpha\varphi \in \mathcal{L}_\Diamond$, *para cada* $\alpha \in G$.

En la forma usual, tomaremos las definiciones standard de las conectivas de conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$) y equivalencia ($\leftrightarrow$) en términos de $\neg$ y $\rightarrow$. Los operadores $\Box^c_\alpha$ y $\Box^o_\alpha$ serán utilizados para denotar los operadores modales duales de $\Diamond^c_\alpha$ y $\Diamond^o_\alpha$ respectivamente, i.e. $\Box^c_\alpha\varphi$ abreviará $\neg\Diamond^c_\alpha\neg\varphi$ y $\Box^o_\alpha\varphi$ corresponderá a $\neg\Diamond^o_\alpha\neg\varphi$. También utilizaremos los símbolos $\top$ y $\bot$ para representar en forma genérica a las fórmulas lógicamente equivalentes a $\varphi \vee \neg\varphi$ y $\varphi \wedge \neg\varphi$, respectivamente.

La noción de modelo de Kripke coincidirá con la presentada al final del capítulo 2, aunque aquí, a diferencia de la utilizada en el capítulo anterior, no nos restringiremos a modelos cuyo conjunto de mundos coincida exactamente con el de todas las interpretaciones proposicionales Ω. Esta visión más general nos autorizaría a dar resultado de completitud respecto a *marcos*. Nosotros no lo haremos porque escapa a nuestro interés de caracterizar operadores de consecuencia de proximidad.

Las condiciones de satisfactibilidad de una fórmula multimodal en tales modelos es formalizada como sigue:

Definición 4.2 *Sea ω un mundo en un modelo $\mathcal{M} = \langle W, S, \models\rangle$ entonces:*

1. $(\mathcal{M},\omega) \models \neg\varphi$ *si y sólo si* $(\mathcal{M},\omega) \not\models \varphi$
2. $(\mathcal{M},\omega) \models \varphi \rightarrow \psi$ *si y sólo si* $(\mathcal{M},\omega) \models \varphi$ *implica* $(\mathcal{M},\omega) \models \psi$.
3. $(\mathcal{M},\omega) \models \Diamond^c_\alpha\varphi$ *si y sólo si* $I^{\mathcal{M}}_R(\varphi \mid \widehat{\omega}) \geq \alpha$.
4. $(\mathcal{M},\omega) \models \Diamond^o_\alpha\varphi$ *si y sólo si* $I^{\mathcal{M}}_R(\varphi \mid \widehat{\omega}) > \alpha$.

donde $\widehat{\omega}$ representa el conjunto de fórmulas satisfactibles en el mundo ω, que en el caso finito es equivalente (pero no igual) a $\bar{\omega}$.

Nótese que dado que en el lenguaje multimodal $\mathcal{L}_\Diamond$ permitimos el anidamiento de operadores, la noción de satisfactibilidad previamente enunciada requiere de una definición de medida de implicación para fórmulas modales. Esa extensión consiste simplemente en permitir esa clase de fórmulas en su definición. Así, por ejemplo:

$$I^{\mathcal{M}}_R(\Diamond_\alpha\varphi \mid \widehat{\omega}) = \sup_{\omega' \models \Diamond_\alpha\varphi} R(\omega,\omega') = \sup\{R(\omega,\omega') \mid I^{\mathcal{M}}_R(\varphi \mid \widehat{\omega}') \geq \alpha\}$$

Como ha sido mencionado en párrafos anteriores, $\Diamond^o_\alpha$ es un operador modal normal en el sentido que su condición de satisfactibilidad está asociada a la relación de accesibilidad R^o_α con la semántica de Kripke standard:

$$(\mathcal{M},\omega) \models \Diamond^o_\alpha \varphi \Longleftrightarrow (\mathcal{M},\omega') \models \varphi \text{ para algún } \omega' \text{ tal que } (\omega,\omega') \in R^o_\alpha,$$

Ese no es el caso para el operador $\Diamond^c_\alpha$, i.e. no tienen, en general, una relación de accesibilidad que la defina en la forma standard. Sin embargo, eso es posible si el valor del sup que aparece en la definición de $I^{\mathcal{M}}_R(\varphi \mid \omega)$ es alcanzable por algún φ-mundo, i.e. cuando $I^{\mathcal{M}}_R(\varphi \mid \widehat{\omega})$ se transforma en $max_{(\mathcal{M},\omega')\models\varphi} R(\omega,\omega')$. En particular, ese es el caso cuando ya sea el rango G o el conjunto de mundos posibles W es finito. En estos casos también tendremos que

$$(\mathcal{M},\omega) \models \Diamond^c_\alpha \varphi \text{ si y sólo si existe } \omega' \text{ tal que } (\omega,\omega') \in R^c_\alpha \text{ y } (\mathcal{M},\omega) \models \varphi$$

Las condiciones de validez en un modelo y en una clase de modelos serán las usuales.

Definición 4.3 *Una fórmula φ es válida en un modelo $\mathcal{M}$, denotado como $\mathcal{M} \models \varphi$, si y sólo si para todo mundo ω en $\mathcal{M}$ sucede que $(\mathcal{M},\omega) \models \varphi$. Una fórmula φ es válida en una clase de modelos $\mathcal{C}$, representado por $\models_{\mathcal{C}} \varphi$, si es válida en todo modelo $\mathcal{M} \in \mathcal{C}$.*

También en el sentido usual, diremos que un conjunto de fórmulas Γ es verdadero en un mundo $(\mathcal{M},\omega)$ (válido en un modelo $\mathcal{M}$, válido en una clase de modelos $\mathcal{C}$) si cada proposición perteneciente a Γ lo es. Escribiremos $(\mathcal{M},\omega) \models \Gamma$, $\mathcal{M} \models \Gamma$ y $\models_{\mathcal{C}} \Gamma$ para representar la verdad en un mundo, la validez en un modelo y en una clase, respectivamente.

Puesto que en el contexto modal tenemos las nociones de verdad en un mundo y validez en un modelo, podemos introducir dos nociones diferentes de consecuencia modal de la siguiente manera.

Definición 4.4 *Sean Γ, φ y $\mathcal{M}$ un conjunto de proposiciones, una proposición y un modelo, respectivamente. Definimos:*

1. *$\Gamma \models_d \varphi$ si y sólo si, para todo $\omega \in \mathcal{M}$, si $(\mathcal{M},\omega) \models \Gamma$ entonces $(\mathcal{M},\omega) \models \varphi$*
2. *$\Gamma \models_f \varphi$ si y sólo si, si $\mathcal{M} \models \Gamma$ entonces $\mathcal{M} \models \varphi$*

La primera definición corresponde a una noción de consecuencia lógica dentro de un modelo, también llamada local o débil. En contraposición, la segunda definición es llamada global o fuerte. Es sencillo comprobar que estas dos nociones no son equivalentes, si se tiene en cuenta que la segunda definición es "cerrada" por la regla de necesidad (en el sentido que si $\gamma \in \Gamma$ entonces $\Gamma \models_f \Box_1\gamma$) y la primera no lo es. Estas definiciones son aplicables a una clase de modelos $\mathcal{C}$ en la forma obvia.
También es muy fácil verificar que usando la primera parte de la definición se tiene que

$$\varphi \models_d \Diamond^c_\alpha \psi \text{ si y sólo si } I^{\mathcal{M}}_R(\psi \mid \varphi) \geq \alpha.$$

Volveremos sobre este punto al final del capítulo. Ahora, presentaremos resultados de completitud para diferentes clases de modelos, pero estaremos especialmente interesados en la clase de modelos de similitud, definidos por una relación borrosa de $\otimes$-similitud, para una previamente determinada t-norma $\otimes$, con valores en un $G \subseteq [0,1]$ y tal que $0,1 \in G$. Recordemos que dicha familia se denota como $\Sigma^G_\otimes$ y que para la subfamilia de estos modelos que poseían la particularidad de tener un conjunto finito de mundos posibles W, usamos la notación $\Sigma^G_{\otimes f}$.

Obsérvese que, en particular, si se considera el caso $\otimes = \min$, las relaciones de accesibilidad serán min-transitiva y por lo tanto, para cada α, R^o_α es una relación de equivalencia. Esto significa que $(\Box^o_\alpha, \Diamond^o_\alpha)$ son operadores modales duales del tipo $S5$.

Proposición 4.1 *Los siguientes esquemas de fórmulas son válidos en la clase Σ^G_0, para cualquier rango G:*

K^c**:** $\Box^c_\alpha(\varphi \to \psi) \to (\Box^c_\alpha \varphi \to \Box^c_\alpha \psi)$, $\forall \alpha \in G$

K^o: $\Box^o_\alpha(\varphi \to \psi) \to (\Box^o_\alpha\varphi \to \Box^o_\alpha\psi)$, $\forall\alpha \in G$

N^c: $\Box^c_\alpha\varphi \to \Box^c_\beta\varphi$, *para* $\beta \geq \alpha$,

EX^c: $\Diamond^c_0\varphi$,

EX^o: $\neg\Diamond^o_1\varphi$,

CO: $\Box^c_\alpha\varphi \to \Box^o_\alpha\varphi$, *para* $\alpha < \beta$

OC: $\Box^o_\alpha\varphi \to \Box^c_\beta\varphi$, *para* $\alpha < \beta < 1$,

Además, las reglas de inferencia:

RN^c: *Desde* φ *inferir* $\Box^c_\alpha\varphi$, *para* $\alpha > 0$

RN^o: *Desde* φ *inferir* $\Box^o_\alpha\varphi$, $\forall\alpha \in G$

preservan validez en Σ^G_0.

Prueba: Tomemos un modelo $\mathcal{M} = \langle W, R, \models\rangle \in \Sigma^G_0$ y probemos que en $\mathcal{M}$ los esquemas mencionados son válidas y las reglas de inferencia preservan validez. Para simplificar la lectura, escribiremos $\omega \models \varphi$ en lugar de $(\mathcal{M}, \omega) \models \varphi$. En general presentaremos las demostraciones para operadores modales cerrados y no las repetiremos para los abiertos cuando las pruebas de éstos sean una mera repetición de aquellas.

K^c: Asumamos que $\omega \models \Box^c_\alpha(\varphi \to \psi)$ y que $\omega \models \Box^c_\alpha\varphi$. Eso significará que $I^{\mathcal{M}}_R(\neg(\varphi \to \psi) \mid \widehat{\omega}) < \alpha$ y $I^{\mathcal{M}}_R(\neg\varphi \mid \widehat{\omega}) < \alpha$. Recordando que (como fue probado en el Capítulo 1) la medida de implicación $I^{\mathcal{M}}_R$ verifica:

1. $I^{\mathcal{M}}_R(C \mid \widehat{\omega}) \leq I^{\mathcal{M}}_R(D \mid \widehat{\omega})$, si $C \to D$ es válida en $\mathcal{M}$, y
2. $I^{\mathcal{M}}_R(C \vee D \mid \widehat{\omega}) = max(I^{\mathcal{M}}_R(C \mid \widehat{\omega}), I^{\mathcal{M}}_R(D \mid \widehat{\omega}))$.

Entonces el caso $I^{\mathcal{M}}_R(\neg\psi \mid \widehat{\omega}) < \alpha$ se sigue fácilmente del hecho que $\neg\psi \to (\neg\varphi \vee \neg(\varphi \to \psi))$ es una tautología. Así obtenemos que $\omega \models \Box^c_\alpha\psi$.

N^c: Este caso es obvio pues sólo significa que si $I^{\mathcal{M}}_R(\neg\varphi \mid \widehat{\omega}) < \alpha$ entonces $I^{\mathcal{M}}_R(\neg\varphi \mid \widehat{\omega}) < \beta$ cuando $\beta \geq \alpha$.

EX^c: Aquí debemos considerar dos casos. Si la fórmula φ es satisfactible en $\mathcal{M}$ entonces puesto que la relación de accesibilidad es mayor o igual a 0 para todo par de mundos, resulta claro que para cualquier $\omega \in W$ $\sup_{\omega' \models \varphi} R(\omega, \omega') \geq 0$ y esto es equivalente a decir que $\omega \models \Diamond_0\varphi$. Si en cambio la fórmula φ es insatisfactible en $\mathcal{M}$ entonces por definición de supremo $\sup\emptyset = 0$ luego en este caso también $\omega \models \Diamond_0\varphi$.

EX^o: En esta oportunidad sólo es necesario hacer notar que por definición decir que $\omega \models \neg\Diamond^o_1\varphi$ es equivalente a $I^{\mathcal{M}}_R(\neg\varphi \mid \widehat{\omega}) \leq 1$. Si nuevamente separamos en los casos en que φ es satisfactible o no, llegaremos a la verificación buscada.

CO: En este caso es necesario hacer notar que si $\alpha < \beta$ entonces $I^{\mathcal{M}}_R(\neg\varphi \mid \widehat{\omega}) \leq \alpha < \beta$.

OC: Esta propiedad es fácilmente verificable considerando que si $I^{\mathcal{M}}_R(\neg\varphi \mid \widehat{\omega}) < \alpha$ entonces también $I^{\mathcal{M}}_R(\neg\varphi \mid \widehat{\omega}) \leq \alpha$.

RN^o: Ahora, sea φ tal que $\omega \models \varphi$ para todo $\omega \in W$. Entonces el conjunto $\{R(\omega, \omega') \mid \omega' \models \neg\varphi\}$ es vacío, y que por lo tanto $I^{\mathcal{M}}_R(\neg\varphi \mid \widehat{\omega}) = 0$, y así $\omega \models \Box^o_\alpha\varphi$, para todo $\alpha \in G$.

Es relativamente sencillo comprobar que algunos otros teoremas son también válidos en Σ^G_0 como por ejemplo:

N^o: $\Box^o_\alpha\varphi \to \Box^o_\beta\varphi$, para $\beta \geq \alpha$

M^*: $\Box^*_\alpha(\varphi \wedge \psi) \equiv (\Box^*_\alpha\varphi \wedge \Box^*_\alpha\psi)$ con $* = o$ ó $* = c$.

Los esquemas y reglas hasta aquí presentados conformarán lo que más tarde definiremos formalmente como sistema básico. Ahora presentaremos otros axiomas y probaremos su validez en ciertas clases de modelos que luego comprobaremos que los caracterizan.

Proposición 4.2 *Los siguientes esquemas:*

T^c: $\Box^c_\alpha\varphi \to \varphi$, $\forall\alpha \in G$

B^o: $\varphi \to \Box^o_\alpha\Diamond^o_\alpha\varphi$, $\forall\alpha \in G$

$4^c_\otimes$: $\Box^c_{\alpha\otimes\beta}\varphi \to \Box^c_\beta\Box^c_\alpha\varphi$, $\forall\alpha \in G$

son válidos en un modelo $\mathcal{M} = \langle W, R, \models\rangle$ si respectivamente R es: reflexiva, simétrica o transitiva.

Prueba: Consideremos un modelo $\mathcal{M} = \langle W, R, \models\rangle$ y veamos cada caso.

T^c: Suponiendo R reflexiva, sólo probaremos el caso $\omega \models \Box^c_1\varphi \to \varphi$ puesto que el resto se infiere usando N^c. Asumamos que $\omega \models \Box^c_1\varphi$. Eso significa que $Sup_{\omega'\models\neg\varphi}R(\omega,\omega') < 1$, lo que a su vez implica que $R(\omega,\omega') < 1$ para todo ω' tal que $\omega' \models \neg\varphi$. En otra palabras, si $R(\omega,\omega') = 1$ entonces necesariamente $\omega' \models \varphi$. En particular, si $\omega' = \omega$ tenemos que $\omega \models \varphi$.

B^o: Suponiendo R simétrica, tomemos un mundo $\omega \in W$ tal que $\omega \models \varphi$ y probemos que también es el caso que $\omega \models \Box^o_\alpha\Diamond^o_\alpha\varphi$. Reescribiendo el operador de necesidad $\Box^o_\alpha$ por su equivalente en términos de posibilidad, resulta que lo que debemos probar es que $\omega \models \neg\Diamond^o_\alpha\neg\Diamond^o_\alpha\varphi$ lo cual es equivalente a $\omega \not\models \Diamond^o_\alpha\neg\Diamond^o_\alpha\varphi$. Lo que usando la definición de satisfactibilidad resulta igual a $I^{\mathcal{M}}_R(\neg\Diamond^o_\alpha\varphi \mid \widehat{\omega}) \leq \alpha$.
Puesto que $I^{\mathcal{M}}_R(\neg\Diamond^o_\alpha\varphi \mid \widehat{\omega}) = \sup\{R(\omega,\omega') \mid \omega' \models \neg\Diamond^o_\alpha\varphi\}$. Luego resulta que $I^{\mathcal{M}}_R(\neg\Diamond^o_\alpha\varphi \mid \widehat{\omega}) \leq \alpha$ si y sólo si $\forall\omega'(\omega' \models \neg\Diamond^o_\alpha\varphi \to R(\omega,\omega') \leq \alpha)$ o equivalentemente $\forall\omega'(I^{\mathcal{M}}_R(\varphi \mid \widehat{\omega}') \leq \alpha \to R(\omega,\omega') \leq \alpha)$. Lo que usando el contrarecíproco tenemos homologamente que $\forall\omega'(R(\omega,\omega') > \alpha \to I^{\mathcal{M}}_R(\varphi \mid \widehat{\omega}') > \alpha)$. Pero esta última expresión siempre es cierta cuando R es simétrica puesto que en los casos que $R(\omega,\omega') > \alpha$ con $\omega \models \varphi$, en $I^{\mathcal{M}}_R(\varphi \mid \widehat{\omega}') = \sup\{R(\omega',\omega'') \mid \omega'' \models \varphi\}$ podemos considerar el caso $\omega'' = \omega$.

$4^c_\otimes$: Considerando un modelo con R transitiva, podemos equivalentemente probar que, para cualquier $\omega \in W$, $\omega \models \Diamond^c_\alpha\Diamond^c_\beta\varphi \to \Diamond^c_{\alpha\otimes\beta}\varphi$. Asumamos que $\omega \models \Diamond^c_\alpha\Diamond^c_\beta\varphi$, i.e.

$$I^{\mathcal{M}}_R(\Diamond^c_\beta\varphi \mid \widehat{\omega}) = Sup\{R(\omega,\omega'') \mid \omega'' : I^{\mathcal{M}}_R(\varphi \mid \widehat{\omega}'') \geq \beta\} \geq \alpha.$$

ó, puesto en otros términos,

$$Sup_{\omega''\in D_{\varphi,\beta}}R(\omega,\omega'') \geq \alpha,$$

donde $D_{\varphi,\beta} = \{\omega'' \in W \mid I^{\mathcal{M}}_R(\varphi \mid \widehat{\omega}'') \geq \beta\}$. Ahora deberíamos probar que $I^{\mathcal{M}}_R(\varphi \mid \widehat{\omega}) \geq \alpha\otimes\beta$. Pero $I^{\mathcal{M}}_R(\varphi \mid \widehat{\omega}) = Sup_{\omega'\models\varphi}R(\omega,\omega') \geq Sup_{\omega'\models\varphi}[R(\omega,\omega'')\otimes R(\omega'',\omega')]$, para cualquier ω'', por la propiedad transitiva de R. Entonces, tenemos la siguiente derivación:

$$\begin{array}{rcl}
I^{\mathcal{M}}_R(\varphi \mid \widehat{\omega}) & \geq & Sup_{\omega''\in W}[Sup_{\omega'\models\varphi}(R(\omega,\omega'')\otimes R(\omega'',\omega'))] \\
& = & Sup_{\omega''\in W}[R(\omega,\omega'')\otimes(Sup_{\omega'\models\varphi}R(\omega'',\omega'))] \\
& = & Sup_{\omega''\in W}[R(\omega,\omega'')\otimes I^{\mathcal{M}}_R(\varphi \mid \omega'')] \\
& \geq & Sup_{\omega''\in D_{\varphi,\beta}}[R(\omega,\omega'')\otimes I^{\mathcal{M}}_R(\varphi \mid \omega'')], \\
& \geq & Sup_{\omega''\in D_{\varphi,\beta}}[R(\omega,\omega'')\otimes\beta] \\
& = & [Sup_{\omega''\in D_{\varphi,\beta}}R(\omega,\omega'')]\otimes\beta \\
& = & I^{\mathcal{M}}_R(\Diamond^c_\beta\varphi \mid \widehat{\omega})\otimes\beta \geq \alpha\otimes\beta.
\end{array}$$

□

Es fácil verificar que algunos otros teoremas también son válidos en ciertas clases de modelos. Por ejemplo:

T^o**:** $\Box^o_\alpha\varphi \to \varphi$, para $\alpha < 1$

es válido en Σ^G_2.

Nótese que a priori podría inducirse a partir de los pares K^o-K^c, T^o-T^c, N^o-N^c, y EX^o-EX^c que si un esquema con operadores abiertos es válido su homónimo con operadores cerrados también lo es. Sin embargo ése no es el caso para los esquemas B^c y $4^o_\otimes$ que son válidos sólo si nos restringimos a ciertas clases de modelos. A continuación damos cuenta de éste y otros casos de validez en modelos "especiales".

Proposición 4.3 *Los esquemas*

B^c**:** $\varphi \to \Box^c_\alpha\Diamond^c_\alpha\varphi$, $\forall\alpha \in G$

C^c**:** $\varphi \to \Box^c_1\varphi$,

son válidos en $\Sigma^{G*}_{\otimes,f}$ *y también en* $\Sigma^{G*}_\otimes$ *si* G *es finito. Además, el esquema*

$4^o_\otimes$**:** $\Box^o_{\alpha\otimes\beta}\varphi \to \Box^o_\beta\Box^o_\alpha\varphi$, $\forall\alpha \in G$

es válido en $\Sigma^G_\otimes$ *si* $\otimes$ *es fuertemente monótona*[2]*. Finalmente el esquema*

$4^o_{\otimes_{\mathbf{Ł}}}$**:** $\Box^o_{\alpha\otimes_Ł\beta}\varphi \to \Box^o_\beta\Box^o_\alpha\varphi$, $\alpha \otimes_Ł \beta > 0$

es válido en $\Sigma^G_{\otimes_Ł}$*, donde* $\otimes_Ł$ *es la t-norma de Łukasiewicz.*

Prueba:

C^c El esquema C^c en concurrencia con el axioma T^c determinan que el operador $\Box^c_1$ colapse con la lógica proposicional. Así ese axioma es válido sólo en el caso que $R^c_1(\omega,\omega') = 1 \Longleftrightarrow \omega = \omega'$. Esto es similar a lo que sucede en el caso clásico cuando se incluye en la lógica T el axioma $\varphi \to \Box\varphi$, sólo que en nuestro caso el efecto de la redundancia queda circunscripta al operador $\Box_1$.

B^c En el caso del esquema B^c la prueba es en su primera parte idéntica a la de B^o. Así, tomemos un mundo $\omega \in W$ tal que $\omega \models \varphi$ y probemos que también es el caso que $\omega \models \Box^c_\alpha\Diamond^c_\alpha\varphi$. Reescribiendo el operador de necesidad $\Box^c_\alpha$, resulta que debe ser el caso que $\omega \models \neg\Diamond^c_\alpha\neg\Diamond^c_\alpha\varphi$ lo cual es equivalente a $\omega \not\models \Diamond^c_\alpha\neg\Diamond^c_\alpha\varphi$. Y usando la definición de satisfactibilidad resulta que $I^{\mathcal{M}}_R(\neg\Diamond^c_\alpha\varphi \mid \widehat{\omega}) < \alpha$. O equivalentemente que $\sup\{R(\omega,\omega') \mid \omega' \models \neg\Diamond^c_\alpha\varphi\} < \alpha$.
Ahora asumiendo la hipótesis de finitud en cualquiera de los dos casos considerados, resulta que α tiene una antecesor inmediato β, i.e. $\forall\alpha\exists\beta$ con $\beta < \alpha$ tal que para cualquier otro $\beta' < \alpha$ tenemos que $\beta' < \beta$.
Volviendo a la demostración, tenemos que si β es el antecesor inmediato de α la última desigualdad es equivalente a: $\forall\omega'(\omega' \models \neg\Diamond^c_\alpha\varphi \to R(\omega,\omega') \leq \beta)$ y a $\forall\omega'(R(\omega,\omega') > \beta \to I^{\mathcal{M}}_R(\varphi \mid \widehat{\omega}') > \alpha)$. Pero dado que β es el antecesor inmediato de α entonces $R(\omega,\omega') > \beta \Leftrightarrow R(\omega,\omega') \geq \alpha$. Así, cuando R es simétrica si $R(\omega,\omega') \geq \alpha$ con $\omega \models \varphi$, resulta que $I^{\mathcal{M}}_R(\varphi \mid \widehat{\omega}') = \sup\{R(\omega',\omega'') \mid \omega'' \models \varphi\}$ es mayor o igual a α al considerar $\omega'' = \omega$.

[2]Por *fuertemente monótona* entenderemos que si $\alpha_1 > \alpha_2$ y $\beta_1 > \beta_2$ entonces $\alpha_1 \otimes \beta_1 > \alpha_2 \otimes \beta_2$.

$4^o_\otimes$ Para ver que $4^o_\otimes$ es válida en $\Sigma^G_\otimes$ si $\otimes$ es fuertemente monótona, tomemos un mundo ω tal que $\omega \models \Diamond_\alpha \Diamond_\beta \varphi$ y probemos que debe ser el caso que $\omega \models \Diamond_{\alpha\otimes\beta}\varphi$. Bajo nuestra hipótesis debe ser el caso que $I^{\mathcal{M}}_R(\Diamond_\beta\varphi \mid \widehat{\omega}) > \alpha$, o sea que $\sup\{R(\omega,\omega') \mid \omega' \models \Diamond_\beta\varphi\} > \alpha$. Luego debe existir un ω' tal que $\omega' \models \Diamond_\beta\varphi$ y $R(\omega,\omega') > \alpha$. Lo cual es equivalente a decir que existe ω' tal que $I^{\mathcal{M}}_R(\varphi \mid \widehat{\omega}') > \beta$ y $R(\omega,\omega') > \alpha$. Lo que es lo mismo que enunciar que existen ω'' y ω' tal que $\omega'' \models \varphi$, y $R(\omega',\omega'') > \beta$ y $R(\omega,\omega') > \alpha$. Usando la monotonía fuerte de $\otimes$ deber ser $R(\omega',\omega'') \otimes R(\omega,\omega') > \alpha \otimes \beta$.
Por otra parte, $\omega \models \Diamond_{\alpha\otimes\beta}\varphi$ si y sólo si $I^{\mathcal{M}}_R(\varphi \mid \widehat{\omega}) > \alpha \otimes \beta$, o sea que $\sup\{R(\omega,\omega''') \mid \omega''' \models \varphi\} > \alpha \otimes \beta$. Igual que antes, debe existir un $\omega''' \models \varphi$ tal que $R(\omega,\omega''') > \alpha \otimes \beta$. Pero esa existencia está garantizada considerando al ω'' anterior y usando transitividad.

$4^o_{\otimes\mathbf{Ł}}$ En este caso sólo es necesario señalar que la t-norma de Łukasiewicz es fuertemente monótona para todo para de valores α y β cuando está garantizado que $\alpha \otimes_{\mathbf{Ł}} \beta > 0$.

□

Los esquemas K^*, T^*, B^* y $4^*_\otimes$, con $* = c$ o $* = o$, son una contraparte directa, para los operadores modales graduados, de los bien conocidos axiomas de *normalidad, reflexividad, simetría y transitividad* en las lógicas modales clásicas. El esquema C^c corresponde al hecho que, en las condiciones de finitud mencionadas (i.e. el rango G finito o el conjunto de mundos W finito), $I^{\mathcal{M}}_R(\varphi \mid \widehat{\omega}) = 1$ sólo si φ es verdadero en ω. El esquema N^* establece la propiedad de anidamiento de los operadores modales graduados. El esquema EX^o establece que el límite superior del rango G de R corresponde al valor 1, mientras que el axioma EX^c determina al cero como su cota inferior. Observe que este último axioma no es válido bajo una interpretación existencial, por ejemplo, cuando $\varphi = \bot$. Lo que no es de extrañar, puesto que el axioma en cuestión estaría capturando la idea que dos mundos cualesquiera son accesibles al menos en grado cero, o sea es una condición de universalidad que ya se saber no se corresponde con ningún axioma modal (ver [Van84]). Esto marca otra diferencia entre uno y otra semántica.
Finalmente, los axiomas OC y CO dan las condiciones obvias que interrelacionan operadores abiertos y cerrados. Todos esos esquemas, excepto B^* y $4^*_\otimes$, ya aparecían en [LL92].

A continuación vamos a definir los sistemas lógicos multimodales que serán de nuestro interés estudiar. Aquí también seguiremos la convención de Lemmon y Scott.

Definición 4.5 *La lógica multimodal básica* $\mathbf{MK}(G)$ *(o* $\mathbf{MK}$ *para abreviar) corresponde al mínimo conjunto de fórmulas que contiene a los axiomas de la lógica proposicional clásica PL más los axiomas $K^c + K^o + N^c + EX^c + EX^o + CO + OC$, y cerrado por las reglas de inferencia MP y RN^o.*

Sus extensiones serán los sistemas lógicos que adiciona a $\mathbf{MK}$ *los axiomas que mencionaremos en cada caso a continuación:*

serial: $\mathbf{MKD}(G) = \mathbf{MK}(G) + \mathbf{D}$,

reflexivo: $\mathbf{MKT}(G) = \mathbf{MK}(G) + \mathbf{T^c}$,

simétrico: $\mathbf{MKB}(G) = \mathbf{MK}(G) + \mathbf{B^o} + \mathbf{B^c}$,

transitivo: $\mathbf{MK4}(G,\otimes) = \mathbf{MK}(G) + \mathbf{4^o_\otimes} + \mathbf{4^c_\otimes}$,

de similitud: $\mathbf{MS5}(G,\otimes) = \mathbf{MKB}(G) + \mathbf{4^o_\otimes} + \mathbf{4^c_\otimes}$.

Además denotaremos $\mathbf{M}*^+(G)$ *(con* $* = \mathbf{K}, \mathbf{D}, \mathbf{T}, \mathbf{B}, \mathbf{4}$ *o cualquiera de sus combinaciones) a las respectivas casos estrictos que surgen de incluir el axioma C^c en las lógicas enunciadas previamente.*

Obviamente estos sistemas de axiomas no son minimales en el sentido que algunos axiomas y reglas pueden ser redundantes. Por ejemplo, el esquema T^c podría ser reducido a la forma $\Box^c_1\varphi \to \varphi$

como así también la regla de necesidad RN^o que podría ser restringida al caso: desde φ inferir $\Box^o_0\varphi$.

Puesto que los teoremas de un sistema lógico Ξ son sólo las sentencias que pertenecen a él, escribiremos $\vdash_\Xi \varphi$ para significar que φ es un teorema de Ξ. En nuestro caso Ξ será alguno de los sistemas ya mencionados. Con el objetivo de simplificar la notación y siempre que se desprenda claramente del contexto, omitiremos indicar como subíndice de $\vdash$ el sistema al que nos referimos.

En términos de teoremas, podemos caracterizar las nociones de deducibilidad y consistencia. Dado un sistema Ξ, una sentencia φ es Ξ-deducible a partir de un conjunto de sentencias Γ, lo cual se representa como $\Gamma \vdash_\Xi \varphi$, si y sólo si Ξ contiene un teorema de la forma

$$\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \rightarrow \varphi$$

donde la conjunción φ_i $(i = 1, ..., n)$ del antecedente son sentencias en Γ.
Por otra parte, diremos que un conjunto de sentencias Γ es consistente en Ξ, denotado como $Con_{Xi}\Gamma$, sólo cuando la sentencia $\perp$ no es Ξ-deducible desde Γ. Así pues, Γ es inconsistente en Ξ, siempre y cuando $\Gamma \vdash_\Xi \perp$. Formalmente estas definiciones son:

Definición 4.6 $\Gamma \vdash_\Xi \varphi$ *si y sólo* $\exists\ \varphi_1, ..., \varphi_n \in \Gamma (n \geq 0)$ *tal que* $\vdash_\Xi \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \rightarrow \varphi$

Definición 4.7 $Con_\Xi\Gamma$ *si y sólo si* $\Gamma \nvdash_\Xi \perp$

De aquí en más nos dedicaremos casi exclusivamente a trabajar con el sistema $\mathbf{MS5}(G, \otimes)$ (y su estricto $\mathbf{MS5}^+(G, \otimes)$). La razón de esta decisión, que a priori podría resultar arbitraria, se revelará al presentar los resultados de completitud. Puesto que en ese momento aparecerá con claridad la interacción entre axiomas y propiedades de la relación de accesibilidad. Allí veremos que, en el contexto de los axiomas de $\mathbf{MK}(G)$, la reflexividad R dependerá de la satisfactibilidad del axioma T^c, y que a su vez la propiedad de simetría de R está relacionada con los axiomas B^c y B^o, y finalmente que la $\otimes$-transitividad de R está ligada a la presencia de $4^c_\otimes$ y $4^o_\otimes$. Por lo tanto las pruebas de completitud para G y $\otimes$ en las condiciones que aquí presentaremos para $\mathbf{MS5}(G, \otimes)$, pueden ser restringidas apropiadamente para obtener los resultados de completitud del resto de los sistemas mencionados arriba. Primero veamos algunos teoremas de este sistema.

Lema 4.1 *Los esquemas*

T^o**:** $\Box^o_\alpha\varphi \rightarrow \varphi$, *para* $\alpha < 1$

N^o**:** $\Box^o_\alpha\varphi \rightarrow \Box^o_\beta\varphi$ *: con* $\beta \geq \alpha$

son teoremas de $\mathbf{MS5}(G, \otimes)$, *y*

RN^c**:** *Desde* φ *inferir* $\Box^c_\alpha\varphi$, *para* $\alpha > 0$

es una regla de inferencia derivada en $\mathbf{MS5}(G, \otimes)$.

Prueba: Inmediato desde OC y T^o, N^o y RN^o respectivamente.

La Proposición 4.1 claramente determina que $\mathbf{MS5}(G, \otimes)$ es correcto con respecto a la clase de estructuras $\Sigma^G_\otimes$, para cualquier G y $\otimes$. La cuestión de si, en general, $\mathbf{MS5}(G, \otimes)$ es también completa se mantendrá abierta. Sin embargo nos será posible obtener completitud para ciertos casos particulares. La próxima sección se la dedicaremos a mostrar que el sistema $\mathbf{MS5}(G, \otimes)$, es completo con respecto a la clase de modelos $\Sigma^G_\otimes$ cuando el rango G es finito.

4.3 Completitud para G finito

En esta sección, considerando un rango finito $G_f = \{\alpha_1 = 0 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n = 1\}$ y una arbitraria t-norma $\otimes$ cerrada sobre G_f. Probaremos la completitud de los sistemas $\mathbf{MS5}(G_f, \otimes)$ con respecto a la clase $\Sigma_{\otimes}^{G_f}$ de estructuras de similitud.

El punto clave al considerar relaciones de similitud finitamente valuadas es que en tales circunstancias la lógica multimodal tendrá un conjunto finito de operadores modales y con la interpretación standard de Kripke, i.e. las condiciones de satisfactibilidad de la posibilidad graduada será existencial. Más aún, el sistema puede ser simplificado por la aplicación de los axiomas CO y OC, puesto que $\Box^o_{\alpha_i}\varphi$ es equivalente a $\Box^c_{\alpha_{i+1}}\varphi$, para $i = 0, \ldots, n$. Por lo tanto, para simplificar la notación, podemos tomar en consideración únicamente los operadores cerrados y redefinir al sistema $\mathbf{MS5}(G_f, \otimes)$ como el más pequeño conjunto de fórmulas que contiene todas las instancias de los siguientes axiomas y es cerrado por las reglas de modus ponens y de necesidad:

PL**:** Todas las tautologías de la lógica proposicional,

K**:** $\Box_\alpha(\varphi \to \psi) \to (\Box_\alpha\varphi \to \Box_\alpha\psi)$,

T**:** $\Box_\alpha\varphi \to \varphi$,

B**:** $\varphi \to \Box_\alpha\Diamond_\alpha\varphi$,

$4_\otimes$**:** $\Box_{\alpha\otimes\beta}\varphi \to \Box_\beta\Box_\alpha\varphi$,

C**:** $\varphi \to \Box_1\varphi$,

N**:** $\Box_\alpha\varphi \to \Box_\beta\varphi$, con $\beta \geq \alpha$,

EX**:** $\Diamond_0\varphi$,

donde hemos escrito $\Box_\alpha$ en lugar de $\Box^c_\alpha$

La noción de prueba, consistencia y de otros conceptos relacionados son análogos a los presentados en la sección previa. Aquí usaremos el símbolo $\vdash_{(G_f,\otimes)}$ para denotar la noción de demostrabilidad en $\mathbf{MS5}(G_f, \otimes)$.

Debido a las proposiciones 4.1 y 4.3, $\mathbf{MS5}(G_f, \otimes)$ es obviamente correcto con respecto a $\Sigma_{\otimes}^{G_f}$. Para probar completitud usaremos la técnica standard de construir un modelo canónico. Para ello primeramente recordemos que un conjunto maximal consistente es aquel que contiene la mayor cantidad de fórmulas posibles sin volverse inconsistente. En adelante escribiremos $Max_{(G_f,\otimes)}\Gamma$ para representar que Γ es $\mathbf{MS5}(G_f, \otimes)$-maximal. Ahora por un momento volveremos a hablar en forma genérica de sistema lógico Ξ con el fin de que quede claro que el tomar como objeto de estudio el sistema $\mathbf{MS5}(G_f, \otimes)$ es suficientemente representativo.

Definición 4.8 *$Max_\Xi\Gamma$ si y sólo si (i) Γ es $Con_\Xi\Gamma$, y (ii) para toda fórmula φ, si $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es $Con_\Xi\Gamma$ entonces $\varphi \in \Gamma$.*

Aquí también el resultado standard de que todo conjunto consistente de fórmulas puede ser extendido a un maximal, puede ser aplicado.

Lema 4.2 *Todo conjunto consistente de fórmulas Δ puede ser extendido a uno Ξ maximal consistente Γ, teniendo Γ las siguientes propiedades:*

1. *$\varphi \in \Gamma$ si y sólo si $\Gamma \vdash_\Xi \varphi$.*
2. *$\Xi \subseteq \Gamma$.*
3. *$\neg\varphi \in \Gamma$ si y sólo si $\varphi \notin \Gamma$.*

Prueba: La usual (ver anexo).

Definición 4.9 *El conjunto de maximales de una fórmula φ relativo a un sistema Ξ, denotado por $\mid \varphi \mid_\Xi$, es el conjunto de conjuntos Ξ-maximales de fórmulas conteniendo a φ, i.e.*

$$\mid \varphi \mid_\Xi = \{\Gamma \mid Max_\Xi \Gamma, \varphi \in \Gamma\}.$$

Esa definición extiende en forma natural la idea de conjunto de pruebas de una fórmula o conjunto de fórmulas.

Lema 4.3 *Sea Γ y φ un conjunto de sentencias y una sentencia, respectivamente. Entonces resulta que:*

$$\Gamma \vdash_\Xi \varphi \text{ si y sólo si } \varphi \in \Delta \text{ para todo } \Delta \in \mid \Gamma \mid_\Xi$$

Prueba: La usual (ver [Che80]).

Ahora consideremos el conjunto $W^* = \{\Gamma : Max_\Xi \Gamma\}$ de todos los conjuntos maximales de Ξ, y definimos, de la manera usual en lógica modal clásica, para cada $\alpha \in G_f$, la siguiente relación binaria R^*_α sobre W^*:

$$(\omega, \omega') \in R^*_\alpha \Longleftrightarrow \{\varphi : \Box_\alpha \varphi \in \omega\} \subseteq \omega', \tag{4.2}$$

para ω y ω' en W^*. Es sencillo verificar que una alternativa, pero equivalente, definición de las relaciones R^*_α podría haber sido: $(\omega, \omega') \in R^*_\alpha$ si y sólo si $\{\Diamond_\alpha \varphi : \varphi \in \omega'\} \subseteq \omega$. La siguiente proposición revela importantes propiedades de la relaciones R^*_α.

Proposición 4.4 *Si Ξ es un sistema de lógica multimodal con grados G_f, W^* es el conjunto de los maximales consistentes en Ξ y $\{R^*_\lambda\}_{\lambda \in G_f}$ la familia de relaciones de accesibilidad definida previamente. Entonces las siguientes condiciones se verifican.*

1. *Si N está en Ξ entonces $R^*_\alpha \subseteq R^*_\beta$, para $\beta \leq \alpha$, y α y β en G_f.*
2. *Si EX está en Ξ entonces $R^*_0 = W^* \times W^*$.*
3. *Si T está en Ξ entonces R^*_α es reflexiva, para cada $\alpha \in G_f$.*
4. *Si C y T están en Ξ entonces R^*_α es de separación, para cada $\alpha \in G_f$.*
5. *Si B está en Ξ entonces R^*_α es simétrica, para cada $\alpha \in G_f$*
6. *Si $4_\otimes$ está en Ξ entonces la familia de relaciones $\{R^*_\lambda\}_{\lambda \in G_f}$ es $\otimes$-transitiva, i.e. si $(\omega, \omega') \in R^*_\alpha$ y $(\omega', \omega'') \in R^*_\beta$, entonces $(\omega, \omega'') \in R^*_{\alpha \otimes \beta}$*

Prueba:

1. Tomemos $(\omega, \omega') \in R^*_\alpha$, esto es, $\{\varphi \mid \Box_\alpha \varphi \in \omega\} \subseteq \omega'$, y sean $\alpha, \beta \in G_f$ tal que $\beta \leq \alpha$. Puesto que el axioma N está en Ξ, si $\Box_\beta \varphi \in \omega$, entonces $\Box_\alpha \varphi \in \omega$ también, y así, $\{\varphi \mid \Box_\beta \varphi \in \omega\} \subseteq \{\varphi \mid \Box_\alpha \varphi \in \omega\}$. Por lo tanto, sucede que $(\omega, \omega') \in R^*_\beta$.
2. Este caso bajo la hipótesis que $EX \in \Xi$, resulta que el conjunto $\{\varphi \mid \Box_0 \varphi \in \omega\}$ es vacío para cualquier $\omega \in W^*$. Dado que el conjunto vacío tiene pertenencia universal tenemos R^*_0 es la relación universal.
3. Del hecho que el axioma $T \in \Xi$ resulta que para cualquier α : $\{\varphi : \Box_\alpha \varphi \in \omega\} \subseteq \omega$.
4. Bajo el supuesto que T y $C \in \Xi$ resulta que $\varphi \leftrightarrow \Box_1 \varphi$ es un teorema en Ξ y por lo tanto $(\omega, \omega') \in R^*_1$ si y sólo si $\omega = \omega'$.

5. Si $B \in \Xi$, entonces, para toda fórmula φ, la fórmula $\Diamond_\alpha \Box_\alpha \varphi \to \varphi$ estará en todo maximal consistente de W^*. Para verificar que R^*_α es simétrica, asumamos que $(\omega,\omega') \in R^*_\alpha$. Entonces $\{\varphi : \Box_\alpha \varphi \in \omega\} \subseteq \omega'$. Supongamos que $(\omega',\omega) \notin R^*_\alpha$. Sea pues ψ una fórmula tal que $\psi \in \omega'$ pero $\psi \notin \omega$. Al estar $\Diamond_\alpha \Box_\alpha \psi \to \psi$ en ω, también lo estará su recíproco. Luego, por propiedad 4 del lema 4.2, tenemos que $\Diamond_\alpha \Box_\alpha \psi$ no pertenece a ω y así para todo ω'' tal que $(\omega,\omega'') \in R^*_\alpha$, $\Box_\alpha \psi \notin \omega''$. Por lo tanto, puesto que $(\omega,\omega') \in R^*_\alpha$, tendremos que $\Box_\alpha \psi \notin \omega'$, pero esto es absurdo.

6. Supongamos que $4_\otimes \in \Xi$ y sean $(\omega,\omega') \in R^*_\alpha$ y $(\omega',\omega'') \in R^*_\beta$. Por definición tenemos que $\{\varphi \mid \Box_\alpha \varphi \in \omega\} \subseteq \omega'$ y $\{\varphi \mid \Box_\beta \varphi \in \omega'\} \subseteq \omega''$. Ahora, sea $\delta = \alpha \otimes \beta$. Si $\Box_\delta \varphi \in \omega$, necesariamente $\Box_\alpha \Box_\beta \varphi \in \omega$ por $4_\otimes$. Pero si $\Box_\alpha \Box_\beta \varphi \in \omega$, tenemos $\Box_\beta \varphi \in \omega'$ puesto que $(\omega,\omega') \in R^*_\alpha$, y análogamente, $\varphi \in \omega''$, dado que $(\omega',\omega'') \in R^*_\beta$. Por lo tanto, hemos probado que $\{\varphi \mid \Box_\delta \varphi \in \omega\} \subseteq \omega''$, i.e. $(\omega,\omega'') \in R^*_\delta$, como deseábamos.

A partir del teorema precedente y de las proposiciones (4.1), (4.2) y (4.3), es inmediato reconocer que la inclusión de ciertos axiomas en un sistema determinan propiedades de la familia de relaciones de accesibilidad. Este hecho es el que nos autoriza a considerar como caso de estudio el análisis de la completitud del sistema $\mathbf{MS5}(G_f,\otimes)$ y dejar de lado el resto. Así pues a partir de aquí volveremos a centrar nuestras descripciones a dicho sistema.
Como es usual, para probar su completitud será suficiente demostrar que si una fórmula φ es $\mathbf{MS5}(G_f,\otimes)$-consistente entonces será satisfactible en algún modelo de clase $\Sigma^{G_f}_\otimes$. Ahora, propondremos la forma de construir tal modelo. Para ello, comenzaremos mostrando que siempre podemos definir una relación de similitud borrosa R^* sobre W^* (el conjunto de maximales consistentes en $\mathbf{MS5}(G_f,\otimes)$), para la cual la familia de relaciones de accesibilidad $\{R^*_\alpha\}_{\alpha \in G_f}$ se corresponde con la familia de sus α-cortes.

Lema 4.4 *Sea $R^* : W^* \times W^* \to G_f$ definida por*

$$R^*(\omega,\omega') = max\{\alpha \in G_f \mid (\omega,\omega') \in R^*_\alpha\}^3.$$

Entonces resulta que R^* así definida es una relación de $(G_f,\otimes)$-similitud y $R^*(\omega,\omega') \geq \alpha$ si y sólo si $(\omega,\omega') \in R^*_\alpha$, para toda $\alpha \in G_f$ y toda $\omega,\omega' \in W^*$.

Prueba: Primero verifiquemos que R^* es una $(G_f,\otimes)$-similitud, i.e. R^* es reflexiva, simétrica, $\otimes$-transitiva y con rango en G_f.

1. R^* es reflexiva. Esto es claro por la reflexividad de cada uno de los elementos de la familia $\{R^*_\alpha\}_{\alpha \in G_f}$.

2. R^* es simétrica. Esto es también una directa consecuencia de la simetría de los elementos R^*_α.

3. R^* es $\otimes$-transitiva. Nótese que, $R^*(\omega,\omega') \otimes R^*(\omega',\omega'') = max\{\alpha \in G_f \mid (\omega,\omega') \in R^*_\alpha\} \otimes max\{\beta \in G_f \mid (\omega',\omega'') \in R^*_\beta\} = max\{\alpha \otimes \beta \mid (\omega,\omega') \in R^*_\alpha \text{ y } (\omega',\omega'') \in R^*_\beta\} \leq$ (por propiedad 6 de la Proposición 4.4) $\leq max\{\alpha \otimes \beta \mid (\omega,\omega'') \in R^*_{\alpha\otimes\beta}\} \leq R^*(\omega,\omega'')$.

Finalmente, es inmediato chequear que α-cortes de R^* son justamente las relaciones R^*_α.

Rápidamente ese lema puede ser extendido para el sistema $\mathbf{MS5}^+(G_f,\otimes)$ que adiciona el axioma C. En ese contexto también sucede que $R^*(\omega,\omega') = 1$ si y sólo si $\omega = \omega'$, debido a la propiedad 3 de la Proposición 4.4.

Ahora definiremos nuestra noción de modelo canónico, el cual tendrá como conjunto de mundos a todos los nombres de todos los conjuntos maximales consistentes y por relación de accesibilidad a la relación borrosa R^*.

[3] Nótese que, para cualesquiera $\omega,\omega' \in W^*$, el conjunto $\{\alpha \in G_f \mid (\omega,\omega') \in R^*_\alpha\}$ nunca es vacío puesto que, por construcción, al menos el cero pertenece al conjunto.

Definición 4.10 *El modelo canónico de* **MS5**$(G_f, \otimes)$ *es la estructura* $\mathcal{M}^* = \langle W^*, R^*, \models^* \rangle$ *donde* W^* *y* R^* *corresponde a las definiciones ya dadas anteriormente, y*

$$\models^* (\omega, p_i) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \omega \in \mid p_i \mid_{(G_f,\otimes)}$$

para toda variable proposicional p_i *con* $i \geq 0$.

Es claro que $\mathcal{M}^*$ pertenece a la clase de modelos $\Sigma_{\otimes}^{G_f}$. Ahora probaremos la verdad en este modelo se corresponde con la pertenencia en los maximales consistentes. Este resultado establece el vínculo necesario entre sintaxis y semántica.

Teorema 4.1 *Para todo* ω *en* $\mathcal{M}^*$ *y para toda fórmula* φ *en* **MS5**$(G_f, \otimes)$*:*

$$(\mathcal{M}^*, \omega) \models^* \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi \in \omega$$

Prueba: La prueba es por inducción en la complejidad de la fórmula φ. Es suficiente considerar los casos en los cuales φ es (1) una variable proposicional p_n, (2) a negación $\neg\psi$, (3) un condicional $\psi \to \xi$, (4) una de necesidad, $\Box_\alpha \psi$, con $\alpha > 0$, y finalmente (5) $\Box_0 \psi$

Caso base Es inmediato por Definición 4.10, puesto que de allí resulta que $(\mathcal{M}^*, \omega) \models^* p_n$ si y sólo si $\omega \in \mid p_n \mid_{(G_f,\otimes)}$ y por Definición 4.9 eso ocurre si y sólo si $p_n \in \omega$. Así obtenemos el resultado para el caso base cuando φ es una fórmula atómica.

Caso general Aquí asumiremos la hipótesis que el teorema es cierto para toda subfórmula (que tienen complejidad menor a la) de φ y consideraremos los siguiente casos:

1. $(\mathcal{M}^*, \omega) \models^* \neg\psi$ si y sólo si $(\mathcal{M}^*, \omega) \not\models^* \psi$ si y sólo si (por hipótesis inductiva) $\psi \notin \omega$ lo que equivale a $\neg\psi \in \omega$. Así el teorema sucede cuando φ es una negación.
2. $(\mathcal{M}^*, \omega) \models^* \psi \to \xi$ si y sólo si siempre que $(\mathcal{M}^*, \omega) \models^* \psi$ resulta que $(\mathcal{M}^*, \omega) \models^* \xi$ y eso si y sólo si (por hipótesis inductiva) si $\psi \in \omega$ entonces $\xi \in \omega$ si y sólo si $\psi \to \xi \in \omega$. Así el teorema es cierto en el caso que φ es un condicional material.
3. Sea $\alpha > 0$. Entonces, $(\mathcal{M}^*, \omega) \models^* \Box_\alpha \psi$ si y sólo si, por definición, $I_{R^*}^{\mathcal{M}^*}(\neg\psi \mid \widehat{\omega}) < \alpha$, pero esa condición es equivalente a: $(\mathcal{M}^*, \omega') \models^* \psi$ para todo mundo ω' en $\mathcal{M}^*$ tal que $(\omega, \omega') \in R_\alpha^*$, y equivalentemente (por hipótesis inductiva), si y sólo si para todo mundo ω' en $\mathcal{M}^*$ tal que $(\omega, \omega') \in R_\alpha^*$, resulta $\psi \in \omega'$, que a su vez es equivalente a decir que (por definición de R_α^*) para todo mundo $\omega' \in W^*$ tal que $\{\varphi \mid \Box_\alpha \varphi \in \omega\} \subseteq \omega'$ sucede que $\psi \in \omega'$. A partir de esa equivalencia probaremos por separado las dos direcciones de la doble implicación del teorema:
   i) Si $\Box_\alpha \psi \in \omega$, entonces por Definición 4.2, ψ debe pertenecer a todo ω' el cual sea un $MS5$-maximal extensión del conjunto $\{\varphi \mid \Box_\alpha \varphi \in \omega\}$. Luego aplicando la hipótesis inductiva sobre los ω' y la definición de R_α^*, tenemos demostrada la dirección que va de derecha a izquierda.
   ii) Para la otra dirección, si ψ pertenece a todo ω' el cual sea una **MS5**-maximal extensión del conjunto $\{\varphi : \Box_\alpha \varphi \in \omega\}$ entonces, por lema 4.3, $\{\varphi \mid \Box_\alpha \varphi \in \omega\} \vdash_{(G_f,\otimes)} \psi$. Eso significa que hay sentencias $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ en ese conjunto, tal que $\vdash_{(G_f,\otimes)} (\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \to \psi$. Debido a que **MS5**$(G_f, \otimes)$ es cerrado por la regla de necesidad, y haciendo uso del esquema K, tenemos que $\vdash_{(G_f,\otimes)} (\Box_\alpha \varphi_1 \wedge ... \wedge \Box_\alpha \varphi_n) \to \Box_\alpha \psi$ es un teorema de este sistema. Pero ω tiene por elemento a cada $\Box_\alpha \varphi_1, ..., \Box_\alpha \varphi_n$, así por modus ponens debe ser que $\Box_\alpha \psi \in \omega$.
4. Si φ es $\Box_0 \psi$, entonces, por un lado, resulta que $(\mathcal{M}^*, \omega) \not\models^* \Box_0 \psi$, puesto que nunca es el caso que $I_{S^*}^{\mathcal{M}^*}(\neg\psi \mid \widehat{\omega}) < 0$, y por otro lado, gracias al axioma EX, tenemos que $\neg\Box_0 \psi \in \omega$, y así, $\Box_0 \psi \notin \omega$.

Corolario 4.1 *Para cualquier rango finito* G_f*, el sistema* **MS5**$(G_f, \otimes)$ *es completo con respecto a la clase de modelos* $\Sigma_{\otimes}^{G_f}$.

Prueba: Supongamos que φ no es demostrable en $\mathbf{MS5}(G_f, \otimes)$, i.e. $\nvdash_{(G_f,\otimes)} \varphi$. Luego $\neg\varphi$ deber ser consistente, y entonces existirá un conjunto maximal consistente $\omega_0 \in W^*$ que lo contenga. Entonces $\neg\varphi$ es verdadera en $(\mathcal{M}^*, \omega_0)$ y así φ será insatisfactible en $\mathcal{M}^*$.

Observación 4.1 *En el teorema anterior, el axioma K juega un papel fundamental para demostrar que puedo pasar de la noción sintáctica de pertenencia a la de validez. Como veremos en otros capítulos, cuando dicho axioma no es válido las demostraciones se complican significativamente.*

4.4 Completitud cuando G es denso y $\otimes = \min$

La generalización de los resultados de completitud para los casos en que G no es finito no es una cuestión inmediata, puesto que, la construcción del modelo canónico que se hiciera en la sección anterior no lo es. Por ejemplo, en el caso de G infinito numerable, la correspondencia entre la familia de R^*_α y R^* no es directa en el sentido que cada R^*_α no necesariamente es ya el α-corte de R^*. Una técnica usual para salvar este inconveniente es probar que el sistema lógico en cuestión tiene la propiedad de modelos finitos, i.e. demostrar que alcanza con mirar estos modelos para determinar validez. Esa técnica no es de utilización automática y aquí sólo la aplicaremos al caso de la t-norma *minimum*, i.e. $\alpha \otimes \beta = \min(\alpha, \beta)$ (que en algunas oportunidades también notaremos con $\alpha \wedge \beta$), y para un rango G denso, i.e. un subconjunto recursivamente enumerable de $[0, 1]$ tal que para cualquier $\alpha, \beta \in G$, si $\alpha < \beta$, siempre existe $\delta \in G$ tal que $\alpha < \delta < \beta$. En este contexto, extenderemos las pruebas de completitud dadas en [LL92] para sistemas multimodal con relaciones de accesibilidad borrosas que son alternativamente reflexivas y seriales. Como ya fue mencionado anteriormente nuestro interés está focalizado en sistemas lógicos que caractericen las familias de modelos con relaciones borrosas que son simultáneamente simétricas y $\otimes$-transitivas. Técnicamente, la principal dificultad radica en el hecho que en ambos esquemas aparecen modalidades anidadas. Esto nos lleva a tener cadenas de operadores modales que pueden ser arbitrariamente largas. A priori, tanto en la técnica de filtración como en la que consideremos aquí, requiere que se construyan conjunto de fórmulas que sean cerrados por modalidades. Luego, a menos que podamos probar que la familia de modalidades lógicamente no equivalente (i.e. las cadenas de operadores anidados irreducibles) son de cardinalidad finita, no tendremos ninguna oportunidad de dar una prueba de la propiedad de modelos finitos.
Nosotros hemos encontrado condiciones suficientes para garantizar clases de equivalencias finitas de modalidades que puedan ser utilizadas en la adaptación del método dado por Liau y Lin. Básicamente los requerimientos son dos: que $\otimes$ debe ser cerrado en cualquier finito subconjunto de G, y que G sea denso.

Consideremos el sistema que se obtiene por incluir en $\mathbf{MS5}(G, \min)$ los axiomas

$$\begin{array}{ll} B^c: & \varphi \to \Box^c_\alpha \Diamond^c_\alpha \varphi, \text{ para } \alpha > 0 \\ C^c: & \varphi \to \Box^c_{\mathrm{i}} \varphi, \text{ y} \\ 4^o_\otimes: & \Box^o_{\alpha\wedge\beta}\varphi \to \Box^o_\beta \Box^o_\alpha \varphi, \forall \alpha \in G, \end{array}$$

Como ya fuera referido en los párrafos precedentes a la Proposición 4.3, estos axiomas no son correctos en toda estructura de modelo de similitud, pero si en la subclase $\Sigma^{G*}_{min,f}$ con conjunto finito de mundos y relación de similitud min-transitiva (ver Proposición 4.3 y nótese que $\wedge$ es fuertemente monótona).

El resultante sistema multimodal será identificado como $\mathbf{MS5}^{++}(G, \min)$.

Definición 4.11 *Dado un rango G, el sistema* $\mathbf{MS5}^{++}(G, \min)$ *es el más pequeño conjunto de sentencias conteniendo toda instancia de los siguientes esquemas de axiomas y cerrado por las últimas dos reglas de inferencia:*

PL: *Tautologías proposicionales.*

K^c: $\Box^c_\alpha(\varphi \to \psi) \to (\Box^c_\alpha\varphi \to \Box^c_\alpha\psi)$, $\forall\alpha \in G$

K^o: $\Box^o_\alpha(\varphi \to \psi) \to (\Box^o_\alpha\varphi \to \Box^o_\alpha\psi)$, $\forall\alpha \in G$

T^c: $\Box^c_\alpha\varphi \to \varphi$, $\forall\alpha \in G$

B^c: $\varphi \to \Box^c_\alpha\Diamond^c_\alpha\varphi$, *para* $\alpha > 0$

B^o: $\varphi \to \Box^o_\alpha\Diamond^o_\alpha\varphi$, $\forall\alpha \in G$

$4^c_\otimes$: $\Box^c_{\alpha\wedge\beta}\varphi \to \Box^c_\beta\Box^c_\alpha\varphi$, $\forall\alpha,\beta \in G$

$4^o_\otimes$: $\Box^o_{\alpha\wedge\beta}\varphi \to \Box^o_\beta\Box^o_\alpha\varphi$, $\forall\alpha,\beta \in G$

C^c: $\varphi \to \Box^c_1\varphi$

N^c: $\Box^c_\alpha\varphi \to \Box^c_\beta\varphi$, *para* $\beta \geq \alpha$,

EX^c: $\Diamond^c_0\varphi$,

EX^o: $\neg\Diamond^o_1\varphi$,

CO: $\Box^c_\alpha\varphi \to \Box^o_\alpha\varphi$, $\forall\alpha \in G$

OC: $\Box^o_\alpha\varphi \to \Box^c_\beta\varphi$, *para* $\alpha < \beta$,

RN^o: *De* φ *inferir* $\Box^o_\alpha\varphi$, *para toda* $\alpha \in G$,

MP: *De* φ *y* $\varphi \to \psi$ *inferir* ψ

Antes de proseguir, debemos comentar sobre los grados de modalidades y su teorema de reducción en $\mathbf{MS5}^{++}(G, \min)$. El grado de modalidad en una fórmula modal es el número de operadores modales anidados. Sobre este punto hay que remarcar la distinción entre anidamiento e iteración. En el primer caso nos referimos a secuencia contínua de operadores modales y con el segundo término remitimos a la idea de operadores que están bajo al alcance de otros. Para nuestros fines será importante determinar el grado de modalidad de una lógica, i.e. la cardinalidad del conjunto de secuencia de operadores modales que no son lógicamente equivalentes. Por ejemplo, en la lógica clásica $S5$ cada secuencia de operadores modales es reducible a un único operador. En $\mathbf{MS5}^{++}(G, \min)$ ese resultado no es válido, aunque las leyes de reducción de $S5$ son aplicables para cada α particular. En lo que sigue, probaremos que en $\mathbf{MS5}^{++}(G, \min)$ los sub-índices de modalidades irreducibles forman un secuencia no decreciente con a lo sumo dos sub-índices iguales.

Primero replantearemos un axioma y una regla de $\mathbf{MS5}^{++}(G, \min)$ que nos serán útiles en las demostraciones.

$$\Box^*_\alpha\varphi \to \varphi, \quad si \quad \alpha \neq 1 \quad o \quad * = c \tag{4.3}$$

$$De \quad \varphi \quad inferir \quad \Box^*_\alpha\varphi, \quad si \quad \alpha \neq 0 \quad o \quad * = o \tag{4.4}$$

Ahora probaremos las reglas de reducción ya mencionadas. Argumentando sólo razones de claridad, dividiremos la prueba en dos proposiciones.

Proposición 4.5 *En* $\mathbf{MS5}^{++}(G, \min)$ *las siguientes equivalencias entre modalidades suceden:*

$$\Box^*_\alpha\Box^+_\beta \equiv \begin{cases} \Box^c_0 & si\ \alpha = 0, * = c \\ \Box^o_1 & si\ es \begin{cases} \alpha = 1, * = o, \ or \\ \beta = 1, \alpha \neq 0, + = o, o \\ \beta = 1, + = * = o \end{cases} \\ \Box^\#_{min(\alpha,\beta)} & en\ cualquier\ otro\ caso, \end{cases}$$

$$\textit{donde } *, + \in \{o, c\},\ y\ \# = \begin{cases} *, & si\ \alpha < \beta \\ +, & si\ \alpha > \beta \\ o, & si\ \alpha = \beta, * = + = o \\ c, & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

Prueba: Tomemos en cuenta los siguientes casos:

- Asumamos que $\alpha = 0$ y $* = c$. Por lo tanto $\neg\Box_0^c\varphi$ será un axioma, y entonces $\Box_0^c\Box_\beta^+\varphi \leftrightarrow \Box_0^c\varphi$ será un teorema.
- Supongamos que $\alpha = 1$ y $* = o$. A partir del axioma EX^o, resulta que $\Box_1^o\Box_\beta^+\varphi$ y $\Box_1^o\varphi$ son teoremas. Así, $\Box_1^o\Box_\beta^+\varphi \leftrightarrow \Box_1^o\varphi$ es probado.
- Bajo la hipótesis que $\beta = 1$ y $+ = o$ y $\alpha \neq 0$ o $* = o$, tenemos que $\Box_1^o\varphi$ es un teorema y, usando la regla de necesidad, $\Box_\alpha^*\Box_1^o\varphi$ también lo es. Así, $\Box_\alpha^*\Box_1^o\varphi \leftrightarrow \Box_1^o\varphi$ es un teorema.
- Si ($\alpha \neq 0$ o $* = o$) y ($\alpha \neq 1$ o $* = c$), y ($\beta \neq 1$ o $+ = c$). Entonces, a partir de (4.3) y (4.4), obtenemos que $\Box_\alpha^*(\Box_\beta^+\varphi \to \varphi)$ es un teorema y, usando los axiomas K^c y K^o y aplicando modus ponens, $\Box_\alpha^*\Box_\beta^+\varphi \to \Box_\alpha^*\varphi$ resulta ser un teorema.

  Por otro lado, usando (4.3), resulta que $\Box_\alpha^*\Box_\beta^+\varphi \to \Box_\beta^+\varphi$ es un teorema. Por lo tanto, $\Box_\alpha^*\Box_\beta^+\varphi \to \Box_{min(\alpha,\beta)}^\#\varphi$ también lo será.
  Para probar la otra implicación, i.e. $\Box_{min(\alpha,\beta)}^\#\varphi \to \Box_\alpha^*\Box_\beta^+\varphi$, debemos considerar los siguientes subcasos:

  - Si $\alpha = \beta$ y $* = + = o$. Entonces por el axioma 4^c resulta lo buscado.
  - Si $\alpha = \beta$, y $* \neq o$ ó $+ \neq o$. Entonces por los axiomas 4^c y 4°, tenemos que $\Box_\alpha^c\varphi \longrightarrow \Box_\alpha^c\Box_\alpha^c\varphi$. Por lo tanto, tomando en consideración los axiomas CO, K^c, K^o y (4.4), resulta que $\Box_\alpha^c\Box_\alpha^c\varphi \to \Box_\alpha^*\Box_\alpha^+\varphi$ es un teorema. Así, $\Box_\alpha^c\varphi \to \Box_\alpha^*\Box_\alpha^+\varphi$ es cierta.
  - Si $\alpha < \beta$. Desde los axiomas 4^c y 4°, concluimos que $\Box_\alpha^*\varphi \to \Box_\alpha^*\Box_\alpha^*\varphi$ es teorema. Usando axiomas CO, OC, K^c, K^o y (4.4), resulta que $\Box_\alpha^*\Box_\alpha^*\varphi \to \Box_\alpha^*\Box_\beta^+\varphi$ lo es también. Así, $\Box_\alpha^*\varphi \to \Box_\beta^+\Box_\alpha^*\varphi$ es probado.
  - Finalmente, para el caso la $\alpha > \beta$ la prueba se repite.

  Así, la equivalencia $\Box_\alpha^*\Box_\beta^+\varphi \leftrightarrow \Box_{min(\alpha,\beta)}^\#\varphi$ es demostrada para todo α y β salvo cuando ($\alpha = 0$ y $* = c$), o ($\alpha = 1$ y $* = o$), o ($\beta = 1$ y $+ = o$).

$\Box$

Observación 4.2 *Nótese que dualmente, las correspondientes leyes de reducción para modalidades de tipo $\Diamond_\alpha^*\Diamond_\beta^+$ y $\Diamond_\alpha^*\Box_\beta^+$ también se verifican.*

Proposición 4.6 *En* $\mathbf{MS5}^{++}(G, \min)$ *las siguientes equivalencias entre modalidades también suceden:*

$$\Box_\alpha^*\Diamond_\beta^+ \equiv \begin{cases} \Box_0^c & si\ \alpha = 0, * = c\ \ (1) \\ \Box_1^o & si\ \alpha = 1, * = o\ \ (2) \\ \Diamond_\beta^+ & si\ \text{es} \left\{ \begin{array}{l} \beta = 1, + = o, ó \\ \beta\ <\ \alpha, ó \\ \alpha = \beta, + = c, ó \\ \alpha = \beta, + = * = c, \end{array} \right\} y\ no\ es\ el\ caso\ que\ (1)\ ó\ (2) \end{cases}$$

Prueba: Consideremos los siguientes casos:

- Supongamos ($\alpha = 0$ y $* = c$) ó ($\alpha = 1$ y $* = o$). Entonces la prueba es similar a la previa.
- Si ($\alpha \neq 0$ ó $* = o$) y ($\alpha \neq 1$ ó $* = c$). Entonces por (4.3) $\Box^*_\alpha \Diamond^+_\beta \varphi \to \Diamond^+_\beta \varphi$ es un teorema.
  Por otra parte, usando B^o y B^c tenemos que $\Diamond^+_\beta \varphi \to \Box^*_\alpha \Diamond^*_\alpha \Diamond^+_\beta \varphi$. Usando la demostración anterior obtenemos que $\Diamond^*_\alpha \Diamond^+_\beta \varphi \leftrightarrow \Diamond^+_\beta \varphi$ es un teorema si $\beta < \alpha$, o ($\alpha = \beta$ y $+ = c$), o ($\alpha = \beta$ y $+ = * = c$) o ($\beta = 1$ y $+ = o$). Así, $\Diamond^+_\beta \varphi \to \Box^*_\alpha \Diamond^+_\beta \varphi$ es un teorema y la proposición resulta probada.

$\Box$

Podríamos preguntarnos si estas leyes de reducción son todavía válidoas para otras t-normas $\otimes$ distintas de min. Ciertamente la mayoría de ellas lo seguirán siendo, pero el punto crucial corresponde al caso $\Box^*_\alpha \Diamond^+_\beta \equiv \Box^\#_{(\alpha \otimes \beta)}$. Para nosotros es un problema abierto el determinar en que otros casos es posible dar leyes de este tipo que nos garanticen cardinalidades finitas de modalidades.

A esta altura, es importante hacer notar que hay algunas modalidades de orden dos que no fueron incluidas en la Proposición 4.6. Ellas son:

- $\Diamond^c_\alpha \Box^o_\beta$ y $\Box^c_\alpha \Diamond^o_\beta$ si $\alpha \leq \beta < 1$
- $\Diamond^o_\alpha \Box^c_\beta$, $\Box^o_\alpha \Diamond^c_\beta$, $\Box^c_\alpha \Diamond^c_\beta$ y $\Diamond^c_\alpha \Box^c_\beta$ si $\alpha < \beta$
- $\Box^o_\alpha \Diamond^o_\beta$ y $\Diamond^o_\alpha \Box^o_\beta$ si $\alpha < \beta < 1$

En particular, la única modalidad de orden dos con el mismo sub-índice para la cual no hemos probado su reducibilidad son $\Diamond^c_\alpha \Box^o_\alpha$ y $\Box^c_\alpha \Diamond^o_\alpha$ con $\alpha < 1$. Por lo tanto, cualquier modalidad no reducible[4] es una cadena de operadores modales cuyos sub-índices forman una no creciente secuencia con a lo sumo dos sucesivos índices iguales. Así, cuando G es finito, el conjunto de modalidades irreducibles es finito y el mayor grado de modalidad en dicho conjunto es a lo sumo el doble de la cardinalidad de G.

El resto de la sección estará dedicada a probar que el sistema $\mathbf{MS5}^{++}(G, \min)$ es completo con respecto a la clase de modelos $\Sigma^G_{min,f}$. En contraste con la sección anterior, ahora, el sistema considerado $\mathbf{MS5}^{++}(G, \min)$ no será compacto (ese también es el caso en [BS95; LL92]). Por ejemplo, si tomamos los racionales de $[0, 1)$ como nuestro G, el conjunto infinito de fórmulas $\{\Diamond^c_\alpha \varphi \mid \alpha \in G\} \cup \{\neg \Diamond^c_1 \varphi\}$ no es satisfactible en ningún modelo pero cualquier subconjunto finito lo es claramente en algún modelo de $\Sigma^G_{min,f}$. Este hecho nos impide dar una prueba de completitud usando la técnica standard de modelo canónico tal como fuera utilizada en la sección previa.

La técnica que usaremos está parcialmente inspirada en la consumada en [LL92]. La idea básica consiste en construir, para cualquier fórmula consistente φ, una estructura de $(G, \min)$-similitud $\mathcal{M}_\varphi$ con un conjunto finito de mundos en los cuales φ será satisfactible. El mecanismo presentado en [LL92] consiste en construir un modelo a partir del conjunto $Sub(\varphi)$ de todas las subfórmulas de φ cerrado por negaciones. Sin embargo, ese método no resulta completamente útil a nuestro propósito debido a que no nos garantiza que la relación de accesibilidad que se obtiene de su aplicación sea una de similitud. Para alcanzar tal objetivo es necesario no sólo considerar conjuntos de fórmulas que sean cerrados por subfórmulas sino también que sean cerrados por modalidades. Ya vimos que si un conjunto de fórmulas es finito su clausura por subfórmula lo seguirá siendo. El inconveniente con la clausura por modalidades es que en general esto no es cierto. Por esa razón es que nos serán tan útiles las leyes de reducción, dado que nos aseguran que sólo una cantidad finita de tales modalidades no serán lógicamente equivalentes. Así cuando contamos con leyes de

[4] en el sentido de las reglas de reducción de las proposiciones 4.5 y 4.6

este tipo podremos verificar que la clausura por modalidades será finita si el conjunto original lo era.

Más formalmente, dada la fórmula φ denotaremos con $Sub(\varphi)$ el conjunto de todas las subfórmulas de ella cerrado por negaciones y con $G(\varphi)$ al conjunto de todos los índices de φ, i.e. $G(\varphi) = \{\alpha \in G \mid$ ó $\Box^c_\alpha\psi$, $\Box^o_\alpha\psi$, $\Diamond^c_\alpha\psi$, ó $\Diamond^o_\alpha\psi$ está en $Sub(\varphi)\} \cup \{0,1\}$. Obviamente, ambos $Sub(\varphi)$ y $G(\varphi)$ son finitos. Entonces, podemos definir la clausura de $Sub(\varphi)$ por las modalidades con índices en $G(\varphi)$ como sigue.

Definición 4.12 *Definimos el conjunto de fórmulas $ModSub(\varphi)$ como:*

1. *Si $\psi \in Sub(\varphi)$ entonces $\psi \in ModSub(\varphi)$*
2. *Si $\psi \in ModSub(\varphi)$ entonces $\Box^c_\alpha\psi, \Box^o_\alpha\psi, \Diamond^c_\alpha\psi, \Diamond^o_\alpha\psi \in ModSub(\varphi)$, para todo $\alpha \in G(\varphi)$*

Claramente el hecho que $G(\varphi)$ sea finito no nos garantiza que $ModSub(\varphi)$ lo sea. Más aún, de la propia definición surge que la cadena de modalidades puede ser arbitrariamente larga.

La construcción de un modelo $\mathcal{M}_\varphi = \langle W_\varphi, R_\varphi, \models_\varphi \rangle$ es realizada de acuerdo a la siguiente enumeración:

1. Tomamos $G(\varphi) = \{\alpha_1 = 0 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{n-1} < \alpha_n = 1\}$
2. Tomamos los $\upsilon \subseteq ModSub(\varphi)$ tal que υ es maximalmente consistente en $ModSub(\varphi)$, i.e. υ es $\mathbf{MS5}^{++}(G, \min)$ -consistente y $\upsilon \cup \{B\}$ es inconsistente para cualquier fórmula $\psi \in ModSub(\varphi)$ tal que $\psi \notin \upsilon$.
3. Definimos $W_\varphi = \{\upsilon \mid \upsilon$ es maximal consistente en $ModSub(\varphi)\}$
4. Definimos, para cada $\alpha \in G(\varphi)$ y $\upsilon \in W_\varphi$,

$$N^c(\upsilon, \alpha) = \{\psi \mid \Box^c_\alpha\psi \in \upsilon\}$$

$$N^o(\upsilon, \alpha) = \{\psi \mid \Box^o_\alpha\psi \in \upsilon\}$$

   es inmediato verificar que $N^c(\upsilon, \alpha) \subseteq N^o(\upsilon, \alpha)$, debido al axioma CO. Además, que debido a los axiomas T^c, C^c, B^c, B^o, $4^c_{\min}$ y $4^o_{\min}$, esos conjuntos satisfacen las siguientes propiedades.

   - $N^c(\upsilon, 1) \subseteq \upsilon'$ si y sólo si $\upsilon = \upsilon'$
   - $N^c(\upsilon, \alpha) \subseteq \upsilon'$ si y sólo si $N^c(\upsilon', \alpha) \subseteq \upsilon$
     $N^o(\upsilon, \alpha) \subseteq \upsilon'$ si y sólo si $N^o(\upsilon', \alpha) \subseteq \upsilon$, para $\alpha < 1$
   - $N^c(\upsilon, \alpha) \subseteq \upsilon'$ y $N^c(\upsilon', \beta) \subseteq \upsilon''$ implica que $N^c(\upsilon, \alpha \wedge \beta) \subseteq \upsilon'$
     $N^o(\upsilon, \alpha) \subseteq \upsilon'$ y $N^o(\upsilon', \beta) \subseteq \upsilon''$ implica que $N^o(\upsilon, \alpha \wedge \beta) \subseteq \upsilon'$, para $\alpha, \beta < 1$

5. Como en [LL92], cualquier relación de similitud sobre W_φ debería verificar que para todo $\alpha \in G(\varphi)$:

   - $R(\upsilon, \upsilon') \geq \alpha$ si y sólo si $N^c(\upsilon, \alpha) \subseteq \upsilon'$
   - $R(\upsilon, \upsilon') > \alpha$ si y sólo si $N^o(\upsilon, \alpha) \subseteq \upsilon'$

6. Definimos $H^c(\upsilon, \upsilon') = max\{\alpha \mid N^c(\upsilon, \alpha) \subseteq \upsilon'\}$ y $H^o(\upsilon, \upsilon') = max\{\alpha \mid N^o(\upsilon, \alpha) \subseteq \upsilon'\}$. Es inmediato que $H^c(\upsilon, \upsilon') \geq H^o(\upsilon, \upsilon')$, y que si $H^c(\upsilon, \upsilon') > H^o(\upsilon, \upsilon') = \alpha_i$, entonces $H^c(\upsilon, \upsilon') = \alpha_{i+1}$.
7. Definimos una función $R_\varphi : W_\varphi \times W_\varphi \to G$ como sigue:

   - $R_\varphi(\upsilon, \upsilon') = \alpha_{i+1}$ si $\alpha_{i+1} = H^c(\upsilon, \upsilon') > H^o(\upsilon, \upsilon') = \alpha_i$

- $R_\varphi(\upsilon, \upsilon') = \alpha_i^+$ si $H^c(\upsilon, \upsilon') = H^o(\upsilon, \upsilon') = \alpha_i$

donde α_i^+ es un elemento del intervalo abierto (α_i, α_{i+1}). Dicho elemento tiene garantizada su existencia debido a la hipótesis de densidad de G.

8. Comprobamos que R_φ así definida es una relación de min-similitud sobre W_φ. Prueba:

   - $R_\varphi(\upsilon, \upsilon') = 1$ si y sólo si $\upsilon = \upsilon'$. Es obvio que $H^c(\upsilon, \upsilon) = 1 > H^o(\upsilon, \upsilon)$ y resulta $R_\varphi(\upsilon, \upsilon) = 1$. Ahora, si $H^c(\upsilon, \upsilon') = 1$ entonces $N^c(\upsilon, 1) \subseteq \upsilon'$. Pero si $\psi \in \upsilon$, por el axioma C^c, también $\Box_1^c \psi \in \upsilon$, pero entonces $\psi \in \upsilon'$. Eso significa que $\upsilon \subseteq \upsilon'$, y puesto que υ es maximalmente consistente, debe ser $\upsilon = \upsilon'$.
   - $R_\varphi(\upsilon, \upsilon') = R_\varphi(\upsilon', \upsilon)$. Este caso también es obvio puesto que $N^c(\upsilon, \alpha) \subseteq \upsilon'$ si y sólo si $N^c(\upsilon', \alpha) \subseteq \upsilon$ y $N^o(\upsilon, \alpha) \subseteq \upsilon'$ si y sólo si $N^o(\upsilon', \alpha) \subseteq \upsilon$
   - min-transitividad. Consideremos los siguientes casos:
     (a) Caso: $R_\varphi(\upsilon, \upsilon') = \alpha_i, R_\varphi(\upsilon', \upsilon'') = \alpha_j$. En esta alternativa tenemos que $N^c(\upsilon, \alpha_i) \subseteq \upsilon'$ y $N^c(\upsilon', \alpha_j) \subseteq \upsilon''$, por lo tanto también se tiene $N^c(\upsilon, \alpha_i \wedge \alpha_j) \subseteq \upsilon''$. Así, $R_\varphi(\upsilon, \upsilon'') \geq \alpha_i \wedge \alpha_j = R_\varphi(\upsilon, \upsilon') \wedge R_\varphi(\upsilon', \upsilon'')$.
     (b) Caso: $R_\varphi(\upsilon, \upsilon') = \alpha_i^+, R_\varphi(\upsilon', \upsilon'') = \alpha_j^+$. En esta oportunidad tenemos $N^o(\upsilon, \alpha_i) \subseteq \upsilon'$ y $N^o(\upsilon', \alpha_j) \subseteq \upsilon''$, por lo tanto será $N^o(\upsilon, \alpha_i \wedge \alpha_j) \subseteq \upsilon''$. Así, $R_\varphi(\upsilon, \upsilon'') > \alpha_i \wedge \alpha_j$. Sea $\alpha_i \wedge \alpha_j = \alpha_i$. Entonces $R_\varphi(\upsilon, \upsilon'') \geq \alpha_i^+ = R_\varphi(\upsilon, \upsilon') \wedge R_\varphi(\upsilon', \upsilon'')$.
     (c) Caso: $R_\varphi(\upsilon, \upsilon') = \alpha_i, R_\varphi(\upsilon', \upsilon'') = \alpha_j^+$. Hay dos subcasos:
     (i) $\alpha_i < \alpha_j^+$. Con lo cual $\alpha_i \leq \alpha_j^+$, y por lo tanto $R_\varphi(\upsilon, \upsilon') \geq \alpha_i, R_\varphi(\upsilon', \upsilon'') \geq \alpha_j$ resultando que $R_\varphi(\upsilon, \upsilon'') \geq \alpha_i \wedge \alpha_j = \alpha_i = R_\varphi(\upsilon, \upsilon') \wedge R_\varphi(\upsilon', \upsilon'')$
     (ii) $\alpha_i > \alpha_j^+$. En estas condiciones $R_\varphi(\upsilon, \upsilon') > \alpha_{i-1}$ y todavía $\alpha_{i-1} \geq \alpha_j$. Entonces, desde $R_\varphi(\upsilon, \upsilon') > \alpha_{i-1}$ y $R_\varphi(\upsilon', \upsilon'') > \alpha_j$, implica que $R_\varphi(\upsilon, \upsilon'') > \alpha_{i-1} \wedge \alpha_j = \alpha_j$, así $R_\varphi(\upsilon, \upsilon'') \geq \alpha_j^+ = R_\varphi(\upsilon, \upsilon') \wedge R_\varphi(\upsilon', \upsilon'')$.
     (d) Caso: $R_\varphi(\upsilon, \upsilon') = \alpha_i^+, R_\varphi(\upsilon', \upsilon'') = \alpha_j$. Este caso es análogo al previo.

9. Finalmente definimos para toda variable proposicional p en φ, $\models_\varphi (\upsilon, p) = 1$ si y sólo si $p \in \upsilon$

Proposición 4.7 *El modelo $\mathcal{M}_\varphi = \langle W_\varphi, R_\varphi, \models_\varphi \rangle$, pertenece a la clase $\Sigma^G_{\min,f}$.*

Prueba: Si n es la cardinalidad de $G(\varphi)$, es claro que a partir de las proposiciones 4.5 y 4.6, una no reducible modalidad construída con los operadores modales $\Box^c_\alpha$, $\Box^o_\alpha$, $\Diamond^c_\alpha$ y $\Diamond^o_\alpha$ con $\alpha \in G(\varphi)$ tiene a lo sumo longitud $2n$. Por lo tanto, tomando en cuenta que $Sub(\varphi)$ es finito, el conjunto de fórmulas no equivalentemente probables de $Mod(Sub(\varphi))$ es también finito. Así W_φ debe ser finito porque todo maximalmente consistente conjunto de fórmulas de $ModSub(\varphi)$ es la unión de clases de equivalentemente probables fórmulas.

Ahora sólo resta probar que un lema de correspondencia para $\mathcal{M}_\varphi$. Pero antes es necesario dar el siguiente resultado.

Lema 4.5 *Sean Γ un subconjunto de fórmulas y ψ una fórmula de $ModSub(\varphi)$, respectivamente. Entonces, si $\psi \in \upsilon$ para todo $\upsilon \in W_\varphi$ tal que $\Gamma \subseteq \upsilon$, resulta necesariamente que en el sistema $MS5^{++}(G, \min)$ se da $\Gamma \vdash \psi$.*

Prueba: Supongamos que en $MS5^{++}(G, \min)$ no se da $\Gamma \nvdash \psi$. Entonces $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ es consistente. Puesto que $ModSub(\varphi)$ es cerrado por negaciones, $\neg\psi \in ModSub(\varphi)$. Por lo tanto, debe existir un $\upsilon' \in W_\varphi$ tal que $\Gamma \cup \{\neg\psi\} \subseteq \upsilon'$. Pero $\Gamma \subseteq \upsilon'$ y $\psi \notin \upsilon'$, contradicción.

Ahora ya estamos en condiciones que probar que la pertenencia a un conjunto maximal consistente se corresponde a la noción de verdad en un mundo del modelo propuesto.

Teorema 4.2 *Para todo υ en W_φ y toda fórmula $\psi \in ModSub(\varphi)$:*

$$(\mathcal{M}_\varphi, \upsilon) \models_\varphi \psi \quad \textit{si y sólo si} \quad \psi \in \upsilon$$

Prueba: La prueba es análoga a la dada para el teorema 4 haciendo uso del lema previo.

Corolario 4.2 *Para cualquier rango denso G, el sistema* $\mathbf{MS5}^{++}(G, \min)$ *es completo con respecto a la clase* $\Sigma^G_{\min,f}$.

Para cerrar esta sección corresponde analizar e interpretar los resultados obtenidos. Por un lado, y como consecuencia del corolario anterior, podemos afirmar que el sistema $\mathbf{MS5}^{++}(G, \min)$ tiene la propiedad de modelo finito, i.e. para cada fórmula φ que no es teorema de $\mathbf{MS5}^{++}(G, \min)$, existe un modelo finito de la clase $\Sigma^G_{\min}$ en el que φ no es verdadera. Además, puesto que la lógica en cuestión es recursivamente pero no finitamente axiomatizable, no será decidible. Para verificarlo tengamos en cuenta que las instancias del axioma $\Box_\alpha p \to p$ para una variable proposicional p serán teoremas de $\mathbf{MS5}^{++}(G, \min)$ si y sólo si $\alpha \in G$. Si supusíeramos que la lógica es decidible entonces deberíamos aceptar que G es recursivo. Puesto que dispondríamos de un algoritmo efectivo para determinar que instancia del axioma T están o no están en ella e indirectamente que α está o no en G. Pero G no es recursivo.
Tampoco nos será posible dar un resultado de completitud fuerte debido a la que la propiedad de compacidad no es satisfecha. Para remarcarlo, basta considerar una teoría $K = \{\Diamond^c_\alpha p \mid \alpha \in G \text{ y } G = \{1 - \frac{1}{n}\}_{n \in I\!N}\} \cup \{\neg \Diamond^c_1 p\}$ inconsistente en todo modelo de $\Sigma^G_{\min}$ con $I\!N$ el conjunto de los naturales, y una variable proposicional q distinta de p. Luego, puesto que K es inconsistente, q será válida en todo modelo que satisfaga la teoría, pero como todo subconjunto finito $K_f \subset K$ será consistente y puesto que p y q son variables proposicionales independientes no podremos deducir q a partir de K_f.

4.5 Consecuencia Aproximada y de Proximidad

Hasta aquí nos hemos dedicado a desarrollar una herramienta sintáctica que permita dar cuenta de algunos aspectos del razonamiento basado en similitud. Ahora es tiempo de plantear la relación entre los sistema de lógicas multimodales y las nociones de consecuencia aproximada y de proximidad. Primero debemos hacer notar que nuestro lenguaje multimodal es mucho mas expresivo que lo necesario para formalizar estas nociones de consecuencia, puesto que dichas relaciones de consecuencia sólo se establecen entre fórmulas no modales. En este sentido, a pasar que no hemos establecido la limitación sobre la iteración y anidamiento de los operadores modales, en los hechos, estas "libertades" expresivas no serán utilizadas en la caracterización de las nociones de consecuencia. Una las cuales fue ya adelantada en la introducción del presente capítulo. Cuando dada una relación de $\otimes$-similitud R definida sobre el conjunto de interpretaciones booleanas Ω del lenguaje $\mathcal{L}$, y en el caso que p y q eran fórmulas no modales, se estableció que

$$p \models^\alpha_R q \text{ si y sólo si } \models_{\mathcal{M}_\mathcal{L}} p \to \Diamond^c_\alpha q$$

donde $\mathcal{M}_\mathcal{L} = \langle \Omega, S, || \, || \rangle$.

Esta expresión puede ser generalizada en el caso de contar con cierto conocimiento previo o de contexto representado por un conjunto de fórmulas K para obtener la noción de consecuencia aproximada como sigue:

consecuencia aproximada $p \models^\alpha_{R,K} q$ si y sólo si $K \models_{\mathcal{M}_\mathcal{L}} p \to \Diamond^c_\alpha q$

En el caso del operador de consecuencia de proximidad, deberíamos poder representar el hecho que $J_{R,K}(q \mid p) \geq \alpha$ si y sólo si, para cualquier $\beta \in G$ y cualquier modelo booleano ω, $I_R(p \mid \widehat{\omega}) \geq \beta$ implica que $I_R(q \mid \widehat{\omega}) \geq \beta \otimes \alpha$. Cuando el rango G es finito, tenemos la posibilidad de escribir esa condición en nuestro lenguaje multimodal en forma relativamente sencilla.

consecuencia de proximidad caso G finito
$p \models^\alpha_{R,K} q$ si y sólo si $K \models_{\mathcal{M}_\mathcal{L}} \bigwedge_{\beta \in G} \Diamond^c_\beta p \to \Diamond^c_{\alpha \otimes \beta} q$

Obviamente, si G no fuera finito, esta expresión no nos es útil. Con el fin de cubrir este caso, propondremos introducir en el lenguaje modal una nueva familia de operadores modales binarios $[\,|\,]_\alpha$ con la siguiente semántica: una fórmula $[\psi \mid \varphi]_\alpha$, con φ y ψ en $\mathcal{L}_\Diamond$, es verdadera en un mundo ω de un modelo de Kripke de similitud $\mathcal{M} = \langle W, R, \models\rangle$ si la implicación condicional $J_{R,\widehat{\omega}}(\psi \mid \varphi)$ es mayor o igual a α. Formalmente:

$$(\mathcal{M},\omega) \models [\psi \mid \varphi]_\alpha \text{ si y sólo si } I_R^{\mathcal{M}}(\varphi \mid \widehat{\omega}) \otimes\!\!\rightarrow I_R^{\mathcal{M}}(\psi \mid \widehat{\omega}) \geq \alpha$$

De esa manera, ahora podemos describir la noción de consecuencia de proximidad como:

$$p \models^{\alpha}_{R,K} q \quad \text{si y sólo si} \quad K \models_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}}} [q \mid p]_\alpha.$$

Indudablemente, este planteo meramente semántico debe ser completado sintácticamente para mantener la coherencia de nuestra presentación. Eso puede ser hecho extendiendo al sistema $\mathbf{MS5}^{++}(G, \min)$ con el siguiente axioma y regla de inferencia infinitesimal:

U**:** $[q \mid p]_\alpha \wedge \Diamond^c_\beta p \rightarrow \Diamond^c_{\alpha\otimes\beta} q$, $\beta \in G$.

RP**:** Si para todo $\beta \in G : \Diamond^c_\beta p \rightarrow \Diamond^c_{\alpha\otimes\beta} q$, entonces inferir $[q \mid p]_\alpha$.

Es muy sencillo verificar que el axioma U es correcto en la clase $\Sigma^G_{\min}$ bajo la interpretación semántica para la familia de operadores $\{[\,|\,]_\alpha\}_{\alpha\in G}$, enunciada anteriormente y que la regla RP preserva validez en esa misma clase de modelos. Más aún, esta regla preserva verdad y puede ser usada en forma local (mundo), contrariamente a lo que sucede con, por ejemplo, la regla de necesidad.

Nuevamente, un resultado de completitud genérico, no es sencillo de probar. Aunque para los casos analizados en las secciones anteriores es inmediata. En el caso G finito, el axioma U y la regla RP es equivalente a introducir la definición:

$$[q \mid p]_\alpha = \bigwedge_{\beta\in G} \Diamond^c_\beta p \rightarrow \Diamond^c_{\alpha\otimes\beta} q$$

Y así la demostración de completitud ya presentada no se ve afectada.

Algo similar podemos decir en el caso $\otimes = \min$ y G es denso. Dado que esa lógica posee la propiedad de modelo finito y nuevamente en esos casos la nueva regla y el nuevo axioma se reducen a introducir una definición que no afecta completitud.

4.6 Relación con la Lógica Posibilística

En esta sección estudiaremos la relación existente entre lo que podríamos llamar en forma genérica la lógica multimodal y la lógica posibilística. La conclusión a la que arribaremos es que la segunda puede ser considerada un "reducto" de la primera bajo una noción de consecuencia local.
En [EGG94b] una primer vínculo entre la lógica multimodal basada en similitud y la lógica posibilística (PL) fue establecida. En esta sección, completaremos y extenderemos esos resultados.
Los rasgos básico de la Lógica Posibilística[5] [DLP94] son los siguientes. El lenguaje está formado por pares ordenados cuya primer componente es una fórmula proposicional clásica y cuya segunda componente es un elemento del $[0,1]$[6] representando a un límite inferior de la medida de necesidad o posibilidad de la fórmula de la precedente coordenada. Así, el lenguaje de la lógica posibilística sobre un lenguaje proposicional $\mathcal{L}$ es $\mathcal{L}_{PL} = \{(p, \Pi_\alpha), (p, N_\alpha) \mid p \in \mathcal{L}, \alpha \in [0,1]\}$. Los modelos

[5] Aunque la Lógica Posibilística ha sido desarrollada desde múltiples facetas, aquí nos referiremos a su fragmento monótono

[6] En forma más general suele pedirse que pertenezca a un reticulado completo y acotado

se corresponderán con distribuciones de posibilidad normalizadas $\pi : \Omega \to [0,1]$, donde Ω es el conjunto de todas las interpretaciones clásicas del lenguaje proposicional $\mathcal{L}$. Las condiciones de satisfactibilidad son definidas como:

$$\pi \models_{PL} (p, \Pi_\alpha) \quad \text{si y sólo si} \quad Pos_\pi(p) = \sup\{\pi(\omega) \mid \omega \models p\} \geq \alpha,$$
$$\pi \models_{PL} (p, N_\alpha) \quad \text{si y sólo si} \quad Nec_\pi(p) = 1 - Pos_\pi(\neg p) \geq \alpha,$$

La noción de consecuencia en PL es definida en la forma usual: una fórmula posibilística φ es una consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas posibilísticas Γ, representado por $\Gamma \models_{PL} \varphi$, si para toda distribución de posibilidad normalizada π tal que $\pi \models_{PL} \psi$, para toda $\psi \in \Gamma$, entonces es el caso que $\pi \models_{PL} \varphi$.

Recordemos ahora algunas conexiones ya establecidas en [EGG94b] entre las relaciones de similitud borrosas y las distribuciones de posibilidad. Primero dos definiciones:

1. Dada una relación de similitud borrosa R y un subconjunto A de Ω, es posible definir una distribución de posibilidad de la siguiente manera:

$$\pi_{\{R,A\}}(\omega') = \sup\{R(\omega, \omega') \mid \omega \in A\}$$

2. Dada una distribución de posibilidad π, podemos construir la relación de similitud $R_\pi^\otimes$ a partir de π utilizando el teorema de representación de Valverde (mencionado ya en el Capítulo 2) [Val85] en la siguiente forma:

$$R_\pi^\otimes(\omega, \omega') = \min(\pi(\omega) \otimes\!\to \pi(\omega'), \pi(\omega') \otimes\!\to \pi(\omega))$$

siendo $\otimes\!\to$ la implicación residuada asociada a la t-norma $\otimes$.

Lema 4.6 ([EGG94b]) *Las siguientes relaciones suceden:*
(i) *Si $R = R_\pi^\otimes$ y $A \subseteq Core(\pi) = \{\omega \mid \pi(\omega) = 1\}$, entonces $\pi_{\{R,A\}} = \pi$.*
(ii) *Si R' es la relación de similitud definida a partir de $\pi_{\{R,A\}}$, siendo A un subconjunto de Ω, entonces $R' \geq R$ y $R'(\omega, \omega') = 1$ para todo $\omega, \omega' \in A$.*

En orden a relacionar las lógicas multimodal y posibilística, necesitamos realizar algunos comentarios preliminares. Dado que los modelos posibilísticos están definidos sobre el conjunto Ω de interpretaciones clásicas del lenguaje $\mathcal{L}$, en esta sección sólo consideramos los modelos aproximados de Kripke donde el conjunto de mundos es justamente Ω, i.e. modelos del tipo $\mathcal{M}_R = \langle \Omega, R, \models \rangle$, donde R es una relación borrosa sobre Ω, y se satisface que $(\mathcal{M}_R, \omega) \models p$ si y sólo si $\omega(p) = 1$, para toda variable proposicional p de $\mathcal{L}$.
Además, deberemos establecer algún mecanismo para transformar una fórmula posibilística en una multimodal y viceversa. Las siguientes proposiciones establecen la base para ese cometido.

Proposición 4.8 *Dado un modelo de Kripke aproximado $\mathcal{M}_R = \langle \Omega, R, \models \rangle$, y una fórmula no modal $p \in \mathcal{L}$, tenemos que, para toda $\omega \in \Omega$, las siguientes equivalencias suceden:*
(i) $(\mathcal{M}_R, \omega) \models \Diamond_\alpha^c p$ *si y sólo si* $\pi_{\{R,\omega\}} \models_{PL} (p, \Pi_\alpha)$,
(ii) $(\mathcal{M}_R, \omega) \models \Box_\alpha^o p$ *si y sólo si* $\pi_{\{R,\omega\}} \models_{PL} (p, N_{1-\alpha})$.

Prueba: Remarquemos primeramente que la posibilidad

$$Pos_{\pi_{\{R,\omega\}}}(p) = \sup_{\omega' \models p} \pi_{\{R,\omega\}}(\omega')$$

es equivalente a $I_R(p \mid \widehat{\omega})$. A partir de esta observación es inmediata la primera equivalencia planteada. Para (ii) observemos que

$$Nec_{\pi_{\{R,\omega\}}}(p) = 1 - Pos_{\pi_{\{R,\omega\}}}(\neg p) = 1 - I_R(\neg p \mid \widehat{\omega})$$

Luego $Nec_{\pi_{\{R,\omega\}}}(p) \geq 1 - \alpha$ si y sólo si $I_R(\neg p \mid \widehat{\omega}) \leq \alpha$. Lo que es equivalente a decir que $(\mathcal{M}_R, \omega)$ se satisface $\Box_\alpha^o p$. $\Box$

Es importante remarcar que para garantizar que la distribución de posibilidad $\pi_{\{R,\omega\}}$ resulte normalizada es necesario y suficiente requerir que la relación de accesibilidad borrosa R sea serial. En el sentido inverso también podemos dar un resultado similar.

Proposición 4.9 *Dada una distribución de posibilidad π y definiendo R_π como $R_\pi(\omega,\omega') = \pi(\omega')$. Entonces para cualquier $p \in \mathcal{L}$ y $\alpha \in [0,1]$, las siguientes equivalencias resultan:*

(i) $\pi \models_{PL} (p, \Pi_\alpha)$ *si y sólo si, para todo* ω, $(\mathcal{M}_{R_\pi}, \omega) \models \Diamond^c_\alpha p$,

(ii) $\pi \models_{PL} (p, N_{1-\alpha})$ *si y sólo si, para todo* ω, $(\mathcal{M}_{R_\pi}, \omega) \models \Box^o_\alpha p$.

Prueba: La prueba es análoga a la presentada para la proposición anterior.

Vale la pena hacer notar que R_π resultará ser serial si la distribución π es normalizada.

Como consecuencia inmediata de las dos proposiciones anteriores, tenemos que la natural función de transformación $\mathbf{T}$ de una fórmula del lenguaje $\mathcal{L}_{PL}$ de la lógica posibilística a una del lenguaje $\mathcal{L}_\Diamond$ de la lógica multimodal es definible como:

$$\mathbf{T}(p, \Pi_\alpha) = \Diamond^c_\alpha p \quad \text{y} \quad \mathbf{T}(p, N_{1-\alpha}) = \Box^o_\alpha p.$$

Es interesante remarcar que $\mathbf{T}$ es una aplicación inyectiva pero no suryectiva puesto que

$$\mathcal{L}' = \mathbf{T}(\mathcal{L}_{PL}) = \{\Diamond^c_\alpha p, \Box^o_\alpha p \mid p \in \mathcal{L}, \alpha \in [0,1]\}$$

es un estricto sublenguaje de $\mathcal{L}_\Diamond$.

Ahora que ya disponemos de un mecanismo que nos permite traducir fórmula preservando verdad, podemos plantearnos la búsqueda de una interrelación más profunda. En ese sentido, Liau y Lin prueban en [LL95] que la noción de consecuencia posibilística coincide con la relación de consecuencia global bajo la clase de modelos de Kripke aproximados seriales Σ_1. Por supuesto, restringiendo el lenguaje multimodal a las fórmulas que son la imagen de una posibilística vía $\mathbf{T}$, i.e. fórmulas del tipo $\Diamond^c_\alpha p$ y $\Box^o_\alpha p$, siendo p una proposición clásica.

Ahora, extenderemos ese resultado para la noción de consecuencia local.

Teorema 4.3 *Sea Σ_1 la clase de los modelos de Kripke aproximados seriales. Entonces para cualquier $p \in \mathcal{L}$ y $\alpha \in [0,1]$, las siguientes equivalencia son válidas:*

(i) $\Gamma \models_{PL} (p, \Pi_\alpha)$ *si y sólo si* $\mathbf{T}(\Gamma) \models_{l\Sigma_1} \Diamond^c_\alpha p$ *si y sólo si* $\mathbf{T}(\Gamma) \models_{g\Sigma_1} \Diamond^c_\alpha p$,

(ii) $\Gamma \models_{PL} (p, N_{1-\alpha})$ *si y sólo si* $\mathbf{T}(\Gamma) \models_{l\Sigma_1} \Box^o_\alpha p$ *si y sólo si* $\mathbf{T}(\Gamma) \models_{g\Sigma_1} \Box^o_\alpha p$.

Prueba: La demostración es una inmediata consecuencia de las proposiciones 4.8 y 4.9, considerando que $R_\pi(\omega,\omega') = \pi(\omega')$, i.e. R_π es independiente de su primera variable. Como consecuencia de ello la satisfactibilidad de una fórmula modal en un mundo ω de un modelos $\mathcal{M}_{R_\pi}$ no depende de éste sino del modelo $\mathcal{M}_{R_\pi}$ como un todo. Esto implica que, en el contexto planteado, la noción de consecuencia global y local para fórmulas de $\mathbf{T}(\mathcal{L}_{PL})$ con respecto a los modelos seriales, coinciden. □

Observación 4.3 . *A partir de la Proposición 4.8, y como es remarcado en [LL95], es obvio que los modelos seriales pueden ser caracterizados por medio de una distribución de posibilidad π_ω para cada mundo $\omega \in W$, i.e. R y la familia de π_ω están relacionados por la ecuación $R(\omega,\omega') = \pi_\omega(\omega')$. En ese mismo sentido podemos identificar la relación de consecuencia aproximada en Σ_1 con una familia de consecuencias posibilísticas locales puesto que para cada mundo ω podemos pensar en una distribución de posibilidad diferente (local) π_ω. Pero sorprendentemente, la relación de consecuencia con respecto a la clase de modelos seriales coincide con la relación de consecuencia posibilística. Este resultado parece indicar que la idea de una " lógica posibilística local" no tiene sentido dado que coincide (desde el punto de vista inferencial) con la lógica posibilística usualmente conocida (ver [BS97]).*

A continuación, fijaremos nuestra atención en las nociones de consecuencia lógica derivadas de las clases de modelos Σ_i y Σ_i^* con $i \in \{2, 3, 4, \otimes\}$.

Teorema 4.4 *Para cualquier $p \in \mathcal{L}$ y $\alpha \in [0, 1]$, las siguientes equivalencias son válidas:*
(i) $\Gamma \models_{PL} (p, \Pi_\alpha)$ *si y sólo si* $\mathbf{T}(\Gamma) \models_{l\Sigma_i} \Diamond^c_\alpha p$,
(ii) $\Gamma \models_{PL} (p, , N_{1-\alpha})$ *si y sólo si* $\mathbf{T}(\Gamma) \models_{l\Sigma_i} \Box^o_\alpha p$

Prueba: Reescribamos lo que pretendemos demostrar, i.e.

$$\forall \mathcal{M} \in \Sigma_i \text{ y } \forall \omega \in \Omega((\forall \phi \in \Gamma : (\mathcal{M}, \omega) \models \phi) \Rightarrow (\mathcal{M}, \omega) \models \Diamond^c_\alpha p) \Longleftrightarrow ((\forall \phi \in \Gamma : \pi \models \phi) \Rightarrow \pi \models (p, \Pi_\alpha))$$

Ahora, demostraremos la primera equivalencia (la otra es similar). La dirección de derecha a izquierda, podemos probarla utilizando el contrarecíproco. Asumamos que existe un modelo $\mathcal{M}*$ y un mundo ω en Ω tal que todas las fórmulas de $\mathbf{T}(\Gamma)$ son verdaderas pero no lo es $\Diamond^c_\alpha p$. Luego por Proposición 4.8 la distribución de posibilidad $\pi_{\{R,\omega\}}$ satisface todas las fórmulas de Γ pero no (p, Π_α).
La dirección opuesta será probada para la clase $\Sigma_\otimes$ y el resto surgirán como casos particulares. Supongamos que $\mathbf{T}(\Gamma) \models_{l\Sigma_\otimes} \Diamond^c_\alpha p$, esto es, para todo modelo $\mathcal{M}$ en $\Sigma_\otimes$ y para todo ω de Ω, si $(\mathcal{M}, \omega) \models \mathbf{T}(\phi)$, para todo ϕ de Γ, entonces $(\mathcal{M}, \omega) \models \Diamond^c_\alpha p$. Tomemos una distribución de posibilidad normalizada π tal que $\pi \models_{PL} \Gamma$ (i.e. $\pi \models_{PL} \phi$, para toda $\phi \in \Gamma$). Por lema 4.6, existe $R = R^\otimes_\pi$ y $\omega \in Core(\pi)$ tal que $\pi = \pi_{\{R,\omega\}}$. Luego aplicando (i) de la Proposición 4.8, resulta que para toda $\phi \in \Gamma$ es el caso que $(\mathcal{M}_R, \omega) \models \mathbf{T}(\phi)$ y debido a nuestra hipótesis $(\mathcal{M}_R, \omega) \models \Diamond^c_\alpha p$, nuevamente por (i) de la Proposición 4.8, eso es equivalente a decir que $\pi \models_{PL} (p, \Pi_\alpha)$. De esta manera, hemos probado que $\Gamma \models_{PL} (p, \Pi_\alpha)$. La prueba para las otras clases se obtiene considerando que todas ellas contienen a la clase $\Sigma_\otimes$.

La segura equivalencia de la presente proposición puede ser demostrada en similar forma utilizando la condición (ii) de la Proposición 4.8.

□

A diferencia del Teorema 4.3, las equivalencias (i) y (ii) del teorema anterior no pueden ser establecidas respecto a una relación de consecuencia global. El siguiente contraejemplo lo prueba.

Contraejemplo 1. Sea $p \in \mathcal{L}$ tal que p y $\neg p$ son satisfactibles y $\alpha \in (0, 1)$. Entonces existirá al menos un mundo ω tal que $\omega \models \neg p$ y así, para todo relación reflexiva R, tendremos $I_R(\neg p \mid \widehat{\omega}) = 1$. Por lo tanto, para cualquier relación de aproximación R, $(\Omega, R, \models)$ no satisface a $\Box^o_\alpha p$. Sin embargo, para cualquier proposición q, la siguiente consecuencia global se verificará trivialmente:

$$\Box^o_\alpha p \models_{g\Sigma} \Box^o_\alpha (p \wedge q),$$

donde Σ representa indistintamente a Σ_2 o Σ_3 o $\Sigma_\otimes$. Pero esa consecuencia lógica obviamente no es verdadera en el sentido local. Es sencillo comprobar que la correspondiente translación de la noción de consecuencia posibilística

$$(p, N_{1-\alpha}) \models_{LP} (p \wedge q, N_{1-\alpha})$$

tampoco es en general verdadera. □

Finalmente, los siguientes contraejemplos probarán que el Teorema 4.4 no sucede para ninguna de las clases de modelos Σ_i^* con $i \in \{2, 3, 4, \otimes\}$, correspondientes a relaciones borrosas que satisfacen la propiedad de separación (además de reflexividad, simetría y $\otimes$-transitividad, según el caso).

Contraejemplo 2. Sea $p \in \mathcal{L}$ que no es una tautología, i.e. $\neg p$ es satisfactible. Un sencillo análisis muestra que la siguiente consecuencia lógica local tiene lugar:

$$\{\Diamond^c_1 p, \Diamond^c_1 \neg p\} \models_{l\Sigma^*} \Diamond^c_1 \bot$$

donde Σ^* representa a cualquiera de las clases Σ_1^* , Σ_2^*, Σ_3^*, Σ_4^* o $\Sigma_\otimes^*$. La razón para este comportamiento debe encontrarse en la propiedad de separación. Ningún modelo en Σ^* satisface el lado izquierdo del contraejemplo puesto que éste viene a decir que en un mundo se satisface p y $\neg p$, ya que el único mundo accesible en grado 1 es él. Así la relación de consecuencia se verifica trivialmente para el par de fórmulas propuesto. Obviamente esto no es cierto en los modelos no estrictos. Por ejemplo si tomamos R como la relación universal, i.e. $R(\omega, \omega') = 1$ para todo los mundos ω, ω' en Ω.
Más aún en los modelos posibilísticos, la validez de la traducción del antecedente se utiliza para representar la ignorancia sobre la verdad de p y no por ello el sistema se vuelve inconsistente.

□

También es posible dar un contraejemplo para mostrar que las nociones de consecuencia local y global tampoco coinciden el los modelos estrictos.

Contraejemplo 3. Sean $p, q, r \in \mathcal{L}$ tres diferentes proposiciones tal que ninguna de ellas es tautología. Un sencillo análisis muestra que las siguientes consecuencias lógicas locales tienen lugar:

$$\{\Diamond_1^c p, \Diamond_1^c q\} \models_{g\Sigma^*} \Diamond_1^c r,$$

donde Σ^* representa a cualquiera de las clases estrictas. Nuevamente el lado izquierdo es vacuo, puesto que por hipótesis siempre habrá un mundo donde no se satisfaga $p \wedge q$. Obviamente, ese no será el caso en una visión localista, ya que si un mundo satisface $p \wedge q$ no necesariamente tiene que satisfacer r.

□

El siguiente esquema, resume las relaciones consideradas a lo largo de esta sección. Como fue usual, Γ y φ denotan una conjunto de fórmulas posibilísticas y una fórmula posibilística, respectivamente, y $\mathbf{T}(\Gamma)$ y $\mathbf{T}(\varphi)$ representan las correspondiente fórmulas de $\mathcal{L}' = \mathbf{T}(\mathcal{L}_{LP})$.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{T}(\Gamma) \models_{\Sigma_1} \mathbf{T}(\varphi) & \Leftrightarrow & \mathbf{T}(\Gamma) \models_{l\Sigma} \mathbf{T}(\varphi) & \Rightarrow_2 & \mathbf{T}(\Gamma) \models_{l\Sigma^*} \mathbf{T}(\varphi) \\
\Updownarrow & & \Downarrow_1 & & \Downarrow_3 \\
\Gamma \models_{PL} \varphi & \Rightarrow & \mathbf{T}(\Gamma) \models_{g\Sigma} \mathbf{T}(\varphi) & \Rightarrow & \mathbf{T}(\Gamma) \models_{g\Sigma^*} \mathbf{T}(\varphi)
\end{array}$$

donde Σ representa a cualquiera de las clases Σ_2, Σ_3, Σ_4 o $\Sigma_\otimes$, y Σ^* representa a las correspondientes clases Σ_2^*, Σ_3^*, Σ_4^* o $\Sigma_\otimes^*$, respectivamente. Además, $\models_{\Sigma_1}$ significa que la consecuencia es verdadera tanto en el sentido local como global. Por otro parte, los subíndices en las flechas deben ser interpretadas como indicando el contraejemplo para el cual se comprueba que la dirección inversa no sucede.

Podemos agregar las siguientes relaciones de orden entre las nociones de consecuencia:

$$\models_{g\Sigma_1} \subset \models_{g\Sigma_2} \subset \models_{g\Sigma_3}, \models_{g\Sigma_4} \subset \models_{g\Sigma_\otimes}$$

Por supuesto esas condiciones se repiten para las clases estricta Σ_i^* para $i \in \{1, 2, 3, 4, \otimes\}$.

Para terminar, remarquemos que bajo la restricción de lenguaje para el sistema multimodal a $\mathcal{L}'$, estamos en condiciones de concluir que la noción de consecuencia posibilística es sólo un reducto de la noción de consecuencia global en la clase Σ_1 y de la noción de consecuencia local de las clases Σ_i con $i \in \{1, 2, 3, 4, \otimes\}$.

Capítulo 5

Lógicas modales multivaluadas

En este capítulo estamos interesados en extender los resultados de los anteriores, al formalizar razonamiento basado en similitud donde ahora las proposiciones podrán ser borrosas. Desde un punto de vista técnico necesitamos de una lógica borrosa como base para poder tratar con proposiciones borrosas y también necesitamos de modalidades para dar cuenta de la noción de cercanía o próximidad. Con lo cuál propondremos aquí, una lógica borrosa modal con semántica basada en una estructura de Kripke, dónde las relaciones de accesibilidad son dadas en términos de relaciones de similitudes.

5.1 Introducción

Como fuera ya mencionado en el Capítulo 1 los modelos de razonamiento aproximado son más flexibles que aquéllos que ofrece la lógica clásica en el sentido que permiten tratar con conocimiento imperfecto. En ese sentido, vaguedad e incertidumbre son dos de las imperfecciones básicas con la que este tipo de modelos tiene que lidiar. Es por eso que es necesario hacer una clara distinción entre ellos para poder combinarlos sin confundirlos. Ya dijimos que siguiendo la propuesta de Hájek, entenderemos el término de incertidumbre como el grado de creencia acerca de la verdad de una proposición, usualmente clásica pero no necesariamente; y reservaremos el término de vaguedad para denotar el grado de verdad de una proposición la cual puede ser borrosa. En esa misma línea, afirmaremos que si bien tanto los grados de creencia como los grados de verdad suelen ser representados por números reales en el intervalo [0,1] ellos son manejados de una manera bien diferente. Así la incertidumbre, como creencia, es inherentemente intensional (i.e., no veritativo funcional) y por lo tanto el grado de creencia de una proposición compleja no puede ser determinado, en general, a partir de los grados de creencia de sus componentes. En contraste, nada impide que los grados de verdad sean determinados en forma completamente funcional. Desde un punto de vista lógico, los sistemas formales correspondientes a incertidumbre están relacionados con diferentes variantes de la lógica modal, en cambio los sistemas lógicos correspondientes a vaguedad son las lógicas multivaluadas.

En la práctica además de distinguir estos concepto es necesario combinarlos y para ello será imprescindible contar con sistemas formales donde ellos puedan convivir sin confundirse. Una forma de obtener tales sistemas es tomar alguno de los modelos modales para formalizar la incertidumbre y permitir interpretaciones multivaluadas en lugar de booleanas. El inconveniente de este método es que no es modular en el sentido que los cambios semánticos a nivel proposicional producen cambios en la definición de satisfacción de una fórmula modal. Otra alternativa, que sí es modular, es partir de una lógica borrosa e integrar los operadores modales. Este último enfoque es el que toman Hájek, Godo y Esteva en [HGE00]. Ellos han propuesto describir las lógicas probabilísticas, posibilíticas y de funciones de creencias en el contexto de una multivaluada. Para eso, ellos asocian el grado de incertidumbre de una proposición φ con el grado de verdad de la proposición modal

$P\varphi$. Esencialmente esas lógicas consisten en reductos estrictamente modales de alguna extensión de la lógica RPL (i.e. las fórmulas atómicas están precedidas por un operador modal seguidas por una fórmula de la lógica infinito valuada de Łukasiewicz con constantes de verdad). Si relajamos esa propuesta, permitiendo que las fórmulas atómicas también puedan ser no modales, obtenemos una lógica híbrida que permite combinar representación de conocimiento vago e incierto.

Como sostuvimos en el Capítulo 1, otra importante noción que juega un rol destacado en diferentes patrones de razonamiento aproximado es la que corresponde a la idea de expresar que una proposición "está cercana a", o "en la vecindad de", otra proposición que es tomada como verdadera. Esa noción de "parecido a la verdad" difiere de aquellas dos mencionadas en el párrafo anterior. Esta tercera noción de "imperfección" es denominada verosimilitud. Las definiciones más modernas de este concepto están basadas en el de similitud y la idea es que el grado de verosimilitud de una sentencia ϕ dependa de la similitud entre las "situaciones" que admiten a ϕ como verdadera y aquellas que representan el estado de situación del mundo real. Intuitivamente hablando, una afirmación es verosímil si ésta es "parecida a la verdad" o "similar a la verdad" sin significar por ellos que es verdadera o aún probable. Esa idea de verosimilitud da sustento a un tipo de razonamiento aproximado denominado razonamiento basado en similitud (un buen resumen de ese tópico es presentado por Dubois y Prade en [DP94a]). La clase de patrones que son cubiertos por los modelos basados en similitud responden al siguiente esquema "Si ϕ es verdadera entonces ψ es cercana a la verdad", en el sentido que aunque ψ pueda ser falsa (o no probable), conociendo que ϕ es verdadera podemos concluir que ψ es semánticamente cercana o similar a otra proposición que si es verdadera. Siguiendo las ideas planteadas por Hájek et al. propondremos asociar a cada proposición ψ de un lenguaje $\mathcal{L}$ una nueva proposición "borrosa" $\Delta\psi$ leída como "aproximadamente ψ". Lo cual remite a tomar cuán cercano es ψ a la verdad equivalente a cuán verdadero es "aproximadamente ψ". Otra vez, la noción de verdad de esta sentencia no será composicional o funcional en el sentido que, dada una interpretación multivaluada e en general tenemos que

$$\begin{aligned} e(\triangle(\neg\psi)) &\neq 1 - e(\triangle(\psi)) \\ e(\triangle(\varphi\&\psi)) &\neq e(\triangle(\varphi)) \otimes e(\triangle(\psi)) \end{aligned}$$

dónde $\otimes$ es la t-norma que interpreta la conjunción. Mas aún, en este capítulo extenderemos esas ideas para que a diferencia de las lógicas presentadas en el Capítulo 3, aquí podamos considerar proposiciones borrosas en lugar de clásica. En este sentido, formalizaremos lo que significa que una proposición borrosa este cercana a la verdad. Técnicamente, combinaremos una lógica multivaluada (para modelar vaguedad) y una lógica modal (para modelar similitudes). Este enfoque será diferente de uno propuesto por Gabbay en [Gab96] y [Gab97]. Allí, él propone un método que denomina fibrado, para combinar dos lógicas cualesquiera como por ejemplo una lógica infinitamente valuada de Łukasiewicz's con la lógica modal K. El resultado de la aplicación de ese método de fibrado es una apropiada semántica para la nueva lógica, pero que sin embargo no provee de un mecanismo (al menos directamente) para obtener una axiomatización para la lógica resultante. Así, por ejemplo, el mencionado artículo de Gabbay no comenta acerca del hecho de que la lógica resultante $Ł_\infty(K(Ł_\infty))$ (la cual es la lógica modal con interpretaciones multivaluadas y relaciones de accesibilidad borrosas) no es norma (i.e. el axioma **K** no es válido). Otro diferente antecedente a nuestro trabajo se encuentran en el artículo de Ying ([Yin88]) Allí, el autor presenta un modelo estándar de lógica modal borrosa salvo que la interpretación de la implicación material es tomada como

$$e(\varphi \to \psi) = e(\neg\varphi \vee \psi) = \max(e(\neg\varphi), e(\psi))$$

y de esa manera la lógica subyacente es normal. Alternativamente, nosotros utilizaremos la operación residuada de una t-norma continua para interpretar tal conectiva lógica. Más precisamente, definiremos lógicas modales sobre la lógica básica (BL) y sus extensiones. De esa manera resultarán sistemas modales multivaluados, que en el caso de utilizar una relación de similitud borrosa como relación de accesibilidad obtendremos la contraparte multivaluada del sistema modal clásico S5. La

semántica consistirá en fijar una $\mathcal{C}$-álgebra L y definir un L-modelo de Kripke como la estructura $\langle W, R, \models\rangle$, en la cual W es un conjunto de mundos posibles, $\models$ representa una L-evaluación y R es una relación L-borrosa sobre W, i.e. a función $R : W \times W \mapsto L$. La relación R será la encargada de capturar la noción de proximidad (o indistinguibilidad) entre mundos posibles, correspondiendo el valor $\bar{1}$ a la identidad de mundos y el valor $\bar{0}$ a la ignorancia total, i.e., que el conocimiento sobre un mundo no provee ninguna información sobre cuales proposiciones son verdaderas en el otro. Con esa semántica trataremos de cubrir patrones de inferencia tales como:

Desde "Si A entonces B" y A', entonces es plausible, en al menos cierta magnitud, concluir B', siempre que B' sea l menos tan cercano a B como A' lo es a A

donde A, B, A' y B' son proposiciones borrosas. La medida de cercanía entre dos proposiciones borrosas es obtenida a través de la medida de similitud entre sus modelos multivaluados. Otros autores, como Klawonn y Castro en [KC95], han trabajado sobre patrones de razonamiento basados en similitud pero no han presentado un modelo axiomático que lo sustente.

El capítulo es organizado de la siguiente manera. Después de esta breve introducción, haremos una presentación resumida de la lógica modal universal tal como fuera presentada por Hájek en el Capítulo 8 de [Háj98]. En las secciones siguientes presentaremos nuestros sistemas lógicos que corresponden a extensiones sintácticas y semánticas de las previamente mencionadas. Además, daremos las pruebas de correctitud y algunos resultados de pseudo-completitud.

5.2 Las lógicas $S5(\mathcal{C})$

La idea de estudiar las lógicas modales que surgen de extender las diferentes lógicas proposicionales multivaluadas tiene numerosos antecedentes. Aquí reproduciremos la síntesis y aportes realizados por Hájek en su libro. Él considera las extensiones de una $\mathcal{C}$-lógica (siendo los casos mas importante aquellos en que $\mathcal{C}$ es $BL, Ł, G$ ó Π) al incorporar a su lenguaje (que consiste en un conjunto recursivamente enumerable de variables proposicionales: $Prop = \{p_0, p_1, p_2, ...\}$, dos conectivas $\{\&, \rightarrow\}$, una constante de verdad $\bar{0}$)y dos operadores modales $\Box$ y $\Diamond$. A partir de ese vocabulario el construye el conjunto de fórmulas bien formadas de la manera usual (tal como lo hemos hecho en capítulos anteriores) y que notaremos como $\mathcal{F}L_{\Box}$. Dada una $\mathcal{C}$-álgebra L, Hájek presenta la noción de $L\Box$-modelo como $\mathcal{M} = \langle W, \models\rangle$ donde W es un conjunto no vacío y $\models: Prop \times W \longmapsto L$ una L-evaluación para cada índice $\omega \in W$. El grado de verdad de un fórmula en un $L\Box$-modelo es definido en forma natural:

1. $\models(\overline{0}, \omega) = 0$.
2. $\models(\varphi \& \psi, \omega) = \models(\varphi, \omega) \otimes \models(\psi, \omega)$.
3. $\models(\varphi \rightarrow \psi, \omega) = \models(\varphi, \omega) \otimes\!\!\rightarrow \models(\psi, \omega)$.
4. $\models(\neg\varphi, \omega) = \models(\varphi, \omega) \otimes\!\!\rightarrow \overline{0}$.
5. $\models(\Box\varphi, \omega) = \inf_{\omega' \in W}\{\models(\varphi, \omega')\}$.
6. $\models(\Diamond\varphi, \omega) = \sup_{\omega' \in W}\{\models(\varphi, \omega')\}$.

donde $\otimes\!\!\rightarrow$ denota la implicación residuada de la operación $\otimes$ de la $\mathcal{C}$-álgebra L.

La lógica $S5(\mathcal{C})$ es definida como el subconjunto de fórmulas de $\mathcal{F}L_{\Box}$ que son válidas en la familia de todos los $\mathcal{C}\Box$-modelos. Antes de estudiar una posible axiomatización de cada una de esas lógicas, Hájek analiza la complejidad descriptiva de las mismas, asociando a cada fórmula modal proposicional una fórmula del cálculo de predicados. Esencialmente, él establece la correspondencia entre el lenguaje proposicional modal $\mathcal{F}L_{\Box}$ y un fragmento del cálculo de predicados multivaluados $\mathcal{C}\forall$ que sólo posee predicados unarios y que denotaremos $\mathcal{F}L^1_{\forall}$, a través de la siguiente definición:

Definición 5.1 *Fijada una variable x y asumiendo que $[x/y]$ representa el reemplazo de todas las ocurrencias de la variable libre x por y, se define la aplicación $* : \mathcal{F}L_\Box \longmapsto \mathcal{F}L^1_\forall$ que asigna a cada fórmula modal φ una fórmula de primer orden φ^* de la siguiente manera:*

1. p_i^* *es* $P_i(x)$.
2. $*$ *conmuta con las conectivas (i.e.* $(\varphi \to \psi)^*$ *es* $(\varphi^* \to \psi^*)$, $(\varphi \& \psi)^*$ *es* $(\varphi^* \& \psi^*)$, *etc.).*
3. $\bar{0}^*$ *es* $\bar{0}$.
4. $(\Box\varphi)^*$ *es* $\forall y(\varphi^*[x/y])$ *donde la variable y no ocurre en* $\varphi^*(x)$.
5. $(\Diamond\varphi)^*$ *es* $\exists y(\varphi^*[x/y])$.

Note que si una fórmula de primer orden φ^* es la traducción de una fórmula modal φ entonces x es la única posible variable libre en φ^*.

Observación 5.1 *La aplicación $*$ es inyectiva y podemos notar como $(\mathcal{F}L_\Box)^*$ al sublenguaje que resulta como imagen del conjunto $\mathcal{F}L_\Box$ por $*$.*

En el trabajo de referencia una correspondencia como la anterior es establecida a nivel semántico entre los $L\Box$-modelos y los modelos del cálculo de primer orden. La idea puede ser reflejada de la siguiente manera:

Definición 5.2 *Dado un $L\Box$-modelo $\mathcal{M} = \langle W, \models \rangle$ se define su modelo asociado de primer orden como la estructura $\mathcal{M}^* = \langle D, \Theta \rangle$ donde el dominio es $D = W$ y la función de interpretación Θ es definida como sigue:*

$\Theta(\bar{0}, \omega) = 0$

$\Theta(P_i(x)[x/\omega]) = \models(p_i, \omega)$

$\Theta(\varphi \sharp \psi) = \Theta(\varphi) \sharp \Theta(\psi)$, *siendo $\sharp$ una conectiva lógica,*

donde x es una variable y $[x/\omega]$ denota la instanciación de la variable x con el elemento del dominio ω.

Observación 5.2 *Bajo las consideraciones y definiciones anteriores, es sencillo comprobar que:*

$$\langle \mathcal{M}, \omega \rangle \models \varphi \quad \textit{si y sólo si} \quad \mathcal{M}^* \models \varphi^*(x)[x/\omega]$$

más aún, si $\mathcal{S}$ es una clase de $\mathcal{C}\Box$-modelos también sucede que:

$$\mathcal{S} \models \varphi \quad \textit{si y sólo si} \quad \forall \mathcal{M} \in \mathcal{S} : \mathcal{M}^* \models (\forall x)\varphi^*(x)$$

Haciendo uso de esta correspondencia uno a uno, Hájek prueba que el conjunto de $\mathcal{C}\Box$-tautologías es recursivamente enumerable basándose en el hecho que la correspondiente lógica de primer orden lo es. Ese resultado anima la búsqueda de una axiomatización de las lógicas $S5(\mathcal{C})$, aunque en ningún caso ha sido todavía encontrada. Por otra parte, es importante, por razones esencialmente prácticas, estudiar en particular las llamadas $t\Box$-tautologías de cada $\mathcal{C}$-álgebra estándar $[0,1]_\mathcal{C}$. Cada conjunto de esas $t\Box$-tautologías genera una nueva lógica que se simboliza con $S5([0,1]_\mathcal{C})$. Hájek en [Háj98] (capítulo 8 pág. 220) prueba que $S5([0,1]_G)$ es recursivamente enumerable usando el hecho que el conjunto de fórmulas de $G\forall$ coincide con el conjunto de tautologías del álgebra estándar $[0,1]_G\forall$. Sin embargo permanece abierta la cuestión de si son decidibles. En particular Hájek demuestra que $S5([0,1]_G)$ no satisface la propiedad de modelo finito que es la condición suficiente para probar decibilidad más usada en la literatura. En el caso de $S5([0,1]_{Ł})$, no es posible justificar su condición de ser recursivamente enumerable de la manera anterior, debido a

que el conjunto de Ł∀-tautologías pertenece a la clase Π_2 de la jerarquía de complejidad aritmética. Afortunadamente, la lógica $S5([0,1]_{Ł})$ satisface la propiedad de modelo finito y además coincide con $S5(Ł)$ (coincidencia que no ocurre entre $[0,1]_{Ł}\forall$ y Ł∀), lo que determina no sólo que la primera es recursivamente enumerable sino que ambas son decidibles. En los casos de las lógicas $S5([0,1]_{\Pi})$ y $S5([0,1]_{BL})$ queda abierto el interrogante de si son recursivamente enumerables. Sí se conoce que un argumento similar al dado para $S5(G)$ no puede ser enunciado en este caso. Eso es debido a que el conjunto de tautologías en $BL\forall$ y $\Pi\forall$ pertenecen a la jerarquía analítica (más general que la aritmética pues considera cuantificación de segundo orden para describir la jerarquía). Sin embargo no es descabellado suponer que tal como sucede con la lógica proposicional modal, ella, como las lógicas $S5(BL)$, $S5(G)$, y $S5(\Pi)$ correspondan a "retazos privilegiados" de la lógica de primer orden multivaluada.

A pesar que la axiomatización de estas lógicas es un tema abierto es posible conjeturar que los siguientes esquemas son candidatos a formar parte de ella:

$\Box 1)$ $\Box\varphi \to \varphi$.

$\Diamond 1)$ $\varphi \to \Diamond\varphi$.

$\Box 2)$ $\Box(\nu \to \varphi) \to (\nu \to \Box\varphi)$.

$\Diamond 2)$ $\Box(\varphi \to \nu) \to (\Diamond\varphi \to \nu)$.

$\Box 3)$ $\Box(\varphi \vee \nu) \to (\Box\varphi \vee \nu)$.

$\Diamond 3)$ $\Diamond(\varphi \& \varphi) \equiv (\Diamond\varphi \& \Diamond\varphi)$.

dónde ν debe ser una fórmula cuyo principal operador sea $\Box$ ó $\Diamond$. Es fácil identificar a cada uno de estos axiomas con otro de la correspondiente lógica de primer orden $\mathcal{C}\forall$ asociando el operador $\Box$ en el cuantificador universal $\forall$ y $\Diamond$ con el existencial $\exists$. Justamente, usando esa asociación es sencillo reconocer que $\Box$ y $\Diamond$ sólo son interdefinibles mediante la expresión $\Diamond = \neg\Box\neg$ en $S5(Ł)$. De hecho, en el caso de $S5([0,1]_{Ł})$ es factible ofrecer una axiomatización que si bien es elegante no es recursivamente enumerable, pues requiere extender el lenguaje con las constantes de verdad (con su consecuente cambio en la noción de fórmula bien formada) y cuyo resultado de completitud es presentado en el estilo Pavelka. La misma se denota como $RPL_{\Box}$ y consiste de los axiomas **BL** y Ł, los axiomas de bookeeping **rc1** y **rc2**, que se integran con los mencionados arriba $\Box 1 - \Box 3$ y $\Diamond 1 - \Diamond 3$ más los conocidos como axiomas de Fitting:

$\Box(\bar{r} \to \varphi) \equiv (\bar{r} \to \Box\varphi)$.

$\Diamond(\bar{r} \to \varphi) \equiv (\bar{r} \to \Diamond\varphi)$.

la cual resulta completa respecto de los $[0,1]_{Ł}$-modelos descritos anteriormente que satisfacen además la siguiente condición para cada constante de verdad

$\models(\bar{r}, \omega) = r$, para cada racional $r \in Q \cap [0,1]$.

Entonces el resultado de completitud se enuncia de la siguiente manera:

Teorema 5.1 *([Háj98],pág. 224) Para cada fórmula φ en $\mathcal{F}L_{\Box}$, φ es una Ł$\Box$-tautología si y sólo si para cada $r < 1$: $\vdash_{RPL_{\Box}} \bar{r} \to \varphi$.*

De acuerdo a nuestro interés de modelizar el razonamiento basado en similitud con la semántica de modelo de Kripke relacional, propondremos, en la siguiente sección, extensiones de las lógicas hasta aquí mencionadas.

5.3 Las lógicas FM($\mathcal{C}$) y su semántica

Como ya fuera anunciado, en este capítulo daremos una familia de sistemas lógicos que posean el suficiente poder expresivo para describir y combinar diferentes modelos de razonamiento aproximado. El lenguaje de la lógica modal multivaluada estará constituido por el correspondiente a una $\mathcal{C}\Box$-lógica (con $\mathcal{C} = BL, Ł, G$ o Π, entre otras) más un par de operadores modales: ∇ y Δ (que también en determinadas circunstancias, que precisaremos luego, puede ser definido por $\neg\nabla\neg$). El conjunto de fórmulas bien formadas será denotado por $\mathcal{FL}_\nabla$ y definido en la forma usual. Más aún, tomaremos las definiciones standard de las conectivas de negación ($\neg$), disyunción fuerte ($\underline{\vee}$) y equivalencia ($\leftrightarrow$) en términos de &, $\rightarrow$ y $\bar{0}$.

La noción de modelo de Kripke coincidirá con la presentada al final del Capítulo 1, salvo que, a diferencia de la utilizada en el Capítulo 3, aquí la valuación en cada mundo no será binaria (verdadero o falso) ni nos restringiremos a modelos cuyo conjunto de mundos coincida exactamente con el de todas las interpretaciones proposicionales Ω. Más precisamente:

Definición 5.3 *Dada una $\mathcal{C}$-álgebra L, un L-modelo de similitud de Kripke corresponde a la estructura $\mathcal{M} = \langle W, S, \models\rangle$ dónde:*

W : *es un conjunto no vacío de objetos que denominaremos mundos.*

$S : W \times W \longmapsto L$ *es una relación borrosa.*

$\models$: *$Prop \times W \longmapsto L$ es una función de valuación que asigna a cada variable proposicional p en $Prop$ y cada mundo ω en W un valor de verdad $\models(p,\omega)$. La valuación $\models$ es extendida a toda fórmula en $\mathcal{FL}_\nabla$ como en los $\mathcal{C}$-modelos de la sección anterior para los operadores &, $\rightarrow$, $\neg$, $\Box$ y $\Diamond$, y como sigue para los operadores nuevos:*

7. $\models(\nabla\varphi,\omega) = \inf_{\omega'\in W}\{S(\omega,\omega') \otimes\!\!\rightarrow \models(\varphi,\omega')\}$.
8. $\models(\Delta\varphi,\omega) = \sup_{\omega'\in W}\{S(\omega,\omega') \otimes \models(\varphi,\omega')\}$.

dónde L es una $\mathcal{C}$-álgebra y $\otimes\!\!\rightarrow$ sigue denotando la implicación residuada de $\otimes$.

Además, motivados por fines de representación, a veces restringiremos a que L sea una cadena en $[0,1]$ (i.e. $\{0,1\} \subseteq L \subseteq [0,1]$ e incluiremos en el lenguaje una constante de verdad por cada elemento de L y que cada modelos interpretará como sigue:

9. $\models(\overline{r},\omega) = r$, *para cada $r \in L$.*

en tales casos hablaremos de modelos y sistemas racionales.

Las nociones usuales de satisfactibilidad y validez son reflejadas por las siguientes definiciones:

Definición 5.4

1. *Sea ω un mundo en un modelo $\mathcal{M} = \langle W, S, \models\rangle$ entonces: $(\mathcal{M},\omega) \models \varphi$ iff $\models(\varphi,\omega) = 1$.*
2. *Una fórmula φ es válida en un modelo $\mathcal{M}$, y escribimos $\mathcal{M} \models \varphi$, si y sólo si para todo mundo ω en $\mathcal{M}$ sucede que $(\mathcal{M},\omega) \models \varphi$.*
3. *Una fórmula φ es válida en una clase de modelos Σ, y escribimos $\models_\Sigma \varphi$, si ella es válida en todo modelo $\mathcal{M} \in \Sigma$.*

A pesar de la diferencia señalada en el párrafo anterior acerca de que en este capítulo los modelos serán multivaluados, incurriremos en un abuso de notación y continuaremos nombrando a las clase de modelos con la nomenclatura Σ_i y Σ_{if} con $i \in \{0,1,2,3,4,\otimes\}$, con las mismas definiciones de la sección 1.5. Eso es aceptable dado que esas definiciones corresponden a *marcos* y por lo tanto no tienen en cuenta las funciones de evaluación.

A continuación presentaremos la lista de axiomas que utilizaremos para describir nuestros sistemas lógicos:

K: $\nabla(\psi \to \varphi) \to (\nabla\psi \to \nabla\varphi)$.
K$_r$: $\nabla(\bar{r} \to \varphi) \to (\bar{r} \to \nabla\varphi)$.
Rel: $\Box\varphi \to \nabla\varphi$.
T : $\nabla\varphi \to \varphi$.
$\varphi \to \Delta\varphi$.
B : $\varphi \to \nabla\Delta\varphi$.
$\Delta\nabla\varphi \to \varphi$.
4 : $\nabla\varphi \to \nabla\nabla\varphi$.
$\Delta\Delta\varphi \to \varphi$.
Equ1: $\nabla(\varphi \wedge \psi) \equiv \nabla\varphi \wedge \nabla\psi$.

y la siguiente regla:

RR: De $\varphi \to \psi$ inferir $\nabla\varphi \to \nabla\psi$.

Siguiendo la misma táctica descriptiva desarrollada en los capítulos precedentes, daremos ahora una definición a la Hilbert de nuestro sistema modal multivaluado básico y de sus extensiones.

Definición 5.5 *El sistema modal multivaluado básico* **FM**($\mathcal{C}$) *(o* **FM** *para abreviar cuando creamos que no es necesario mencionar explícitamente a* $\mathcal{C}$*) corresponde al mínimo conjunto de fórmulas que contiene a los axiomas de la lógica básica* BL *más los axiomas* $\mathbf{A}_\otimes$, **Rel**, *y* **Equ1** *(donde* $\mathbf{A}_\otimes$ *representa al conjunto vacío o al subconjunto de axiomas* $\{L\}$ *ó* $\{\mathbf{G}, \mathbf{K}\}$ *ó* $\{\mathbf{\Pi 1}, \mathbf{\Pi 2}\}$ *según cual sea la t-norma subyacente) que además es cerrado por las reglas de inferencia:* **MP** *y* **RR**. *Sus extensiones serán las lógicas que incorporan los axiomas que mencionaremos en cada caso a continuación:*

autoreferente: $\mathbf{FM{\cdot}T}(\mathcal{C}) = \mathbf{FM}(\mathcal{C}) + \mathbf{T}$,

de Brouwer: $\mathbf{FM{\cdot}TB}(\mathcal{C}) = \mathbf{FM{\cdot}T}(\mathcal{C}) + \mathbf{B}$,

de orden borroso: $\mathbf{FM{\cdot}S4}(\mathcal{C}) = \mathbf{FM{\cdot}T}(\mathcal{C}) + \mathbf{4}$,

de similitud: $\mathbf{FM{\cdot}S5}(\mathcal{C}) = \mathbf{FM{\cdot}T}(\mathcal{C}) + \mathbf{B} + \mathbf{4}$

Los sistemas lógicos que resultan de incorporar los axiomas **rc1**, **rc2** y $\mathbf{K}_r$ produce las versiones racionales de los sistemas anteriores.

Observación 5.3 *El axioma* **K** *para* ∇ *sólo pertenece al sistema que interpreta la conjunción como el* min *y en este sentido, el resto de los sistemas que estudiaremos aquí se separan de los clásicos donde la semántica relacional en sí misma valida este axioma. Por otra parte notemos que la regla de necesitación para el operador* ∇ *es un caso particular de* **RR**.

Una vez presentados los sistemas modales, corresponde verificar que los axiomas son válidos en ciertas familias de modelos. La siguiente proposición establece esos resultados. El esquema de presentación será muy similar al que se usara en capítulos anteriores aunque aquí para simplificar no siempre repetiremos el análisis de contramodelo que permite constatar que un determinado axioma no es válido en una clase "no buscada".

Proposición 5.1 *Los axiomas del sistema multivaluado básico* **FM**($\mathcal{C}$) *son válidos en la clase* Σ_0 *y a su vez las reglas de inferencia* **MP** *y* **RR** *preservan validez en esa misma clase. Además, las clases* Σ_2, Σ_3 *y* $\Sigma_\otimes$, *satisfacen, respectivamente, a los axiomas* **T**, **B** *y* **4**.

Prueba: Verifiquemos primero la correctitud para la clase Σ_0. Para eso listaremos los axiomas y comprobaremos su validez en la clase de referencia. En los casos en que la demostración difiera para la t-norma subyacente analizaremos los distintos casos.

K. Este es un caso interesante porque vale en los modelos de Gödel pero no en los de Łukasiewicz y producto.

$$\models(\nabla(\varphi \to \psi) \to (\nabla\varphi \to \nabla\psi), w) = 1 \quad \text{si y sólo si} \quad \models(\nabla(\varphi \to \psi), w) \leq \models(\nabla\varphi \to \nabla\psi, w)$$

Tomando el lado izquierdo podemos hacer las siguientes transformaciones, donde $\wedge\!\!\to$ representa al min-residuo:

$$\models(\nabla(\varphi \to \psi), w) = \inf_{w1}(S(w, w1) \wedge\!\!\to (\models(\varphi, w1) \wedge\!\!\to \models(\psi, w1))) =$$

$$\inf_{w1}((S(w, w1) \wedge \models(\varphi, w1)) \wedge\!\!\to \models(\psi, w1)) =$$

$$\inf_{w1}((S(w, w1) \wedge (S(w, w1) \wedge\!\!\to \models(\varphi, w1)) \wedge\!\!\to \models(\psi, w1))) =$$

$$\inf_{w1}((S(w, w1) \wedge\!\!\to \models(\varphi, w1)) \wedge\!\!\to (S(w, w1) \wedge\!\!\to \models(\psi, w1))) \ (*)$$

Puesto que en las G-álgebras la igualdad $\varphi \wedge \psi = \varphi \wedge (\varphi \to \psi)$ es válida. Además como $\wedge\!\!\to$ es no-creciente en su primer argumento y $\inf_{w2}(S(w, w2) \wedge\!\!\to \models(\varphi, w2)) \leq S(w, w1) \wedge\!\!\to \models(\varphi, w1)$ sucede para cualquier mundo $w1$, resulta que la expresión anterior (*) es menor o igual a:

$$\inf_{w1}(\inf_{w2}(S(w, w2) \wedge\!\!\to \models(\varphi, w2)) \wedge\!\!\to (S(w, w1) \wedge\!\!\to \models(\psi, w1)))$$

que a su vez es igual a:

$$\inf_{w2}(S(w, w2) \wedge\!\!\to \models(\varphi, w2)) \wedge\!\!\to \inf_{w1}(S(w, w1) \wedge\!\!\to \models(\psi, w1)) = \models(\nabla\varphi \to \nabla\psi, w)$$

Lo cual completa la prueba buscada. Para probar que esa fórmula no es válida en los Ł-modelos de Kripke o en los Π-modelos de Kripke presentaremos el siguiente modelo $\mathcal{M} = \langle W, S, \models\rangle$ donde el conjunto de mundos es $W = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, la relación de similitud se define como:

$$S(\omega^*, \omega^\#) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega^* = \omega^\# = \omega_1 \\ 0.9 & \text{si } \omega^* = \omega_1 \text{ y } (\omega^\# = \omega_2 \text{ ó } \omega^\# = \omega_3) \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

y las valuación para un par de fórmulas φ, ψ corresponde a:

	ω_1	ω_2	ω_3
$\models(\varphi, \dots)$	0.8	0.7	0.8
$\models(\psi, \dots)$	0.5	0.1	0.2

En ese contexto tenemos que si el modelo es de Łukasiewicz

$$\models(\nabla\varphi \to \nabla\psi, \omega_1) = \inf_{\omega^*}(S(\omega_1, \omega^*) \otimes\!\!\to \models(\varphi, \omega^*) \otimes\!\!\to \inf_{\omega^\#}(S(\omega_1, \omega^\#) \otimes\!\!\to \models(\psi, \omega^\#)$$

haciendo los cálculos resulta que

$$\inf_{\omega^*}(S(\omega_1, \omega^*) \otimes\!\!\to \models(\varphi, \omega^*)) = \inf_{\omega^*} \min(1, 1 - S(\omega_1, \omega^*) + \models(\varphi, \omega^*)) = \min(0.8, 0.8, 0.9) = 0.8$$

y que

$$\inf_{\omega^\#}(S(\omega_1, \omega^\#) \otimes\!\!\to \models(\varphi, \omega^\#) = \inf_{\omega^\#} \min(1, 1 - S(\omega_1, \omega^\#) + \models(\varphi, \omega^\#)) = \min(0.5, 0.2, 0.3) = 0.2$$

Así resulta que

$$\models(\nabla\varphi \to \nabla\psi, \omega_1) = 0.4$$

Por otro lado

$$\models(\nabla(\varphi \to \psi), \omega_1) = \inf_{\omega'}(S(\omega_1, \omega') \otimes\!\!\to \models(\varphi \to \psi, \omega')) = \inf_{\omega'}(S(\omega_1, \omega') \otimes\!\!\to (\models(\varphi, \omega') \otimes\!\!\to \models(\psi, \omega')))$$

y esta última expresión es equivalente a

$$\inf_{\omega'}(1 - S(\omega_1, \omega') + \models(\psi, \omega') + (1 - \models(\varphi, \omega'))) = 0.5$$

y por lo tanto

$$\models(\nabla(\varphi \to \psi) \to (\nabla\varphi \to \nabla\psi), \omega_1) = 0.5 \otimes\!\!\to 0.4 = \min(1, 1 - 0.5 + 0.4) = 0.9 < 1$$

y lo que nos autoriza a decir que no es válida en los modelos de Łukasiewicz. En el caso de considerar modelos que interpretan la conjunción como el producto esta misma estructura de modelo es útil ya que en ese caso

$$\models(\nabla(\varphi \to \psi) \to (\nabla\varphi \to \nabla\psi), \omega_1) = ((0.1/0.7)/0.9 \otimes\!\!\to (0.11/0.77) = 0.9 < 1$$

Rel. En este caso sólo es necesario recordar que todo residuo de una t-norma $\otimes$ continua satisface que: $x \leq y \otimes\!\!\to x$. Luego por definición de satisfactibilidad:

$$\models(\nabla\varphi, \omega) = \inf_{\omega^*}(S(\omega, \omega^*) \otimes\!\!\to \models(\varphi, \omega^*)) \geq \inf_{\omega^*}(\models(\varphi, \omega^*)) = \models(\Box\varphi, \omega)$$

Equ1. La validez del axioma **Equ1** es una consecuencia directa del que en las BL-álgebras se satisface la identidad $x \otimes\!\!\to \min(y, z) = \min(x \otimes\!\!\to y, x \otimes\!\!\to z)$ para la implicación residuada $\otimes\!\!\to$. Así, escribiendo la condición de satisfactibilidad:

$$\models(\nabla(\varphi \wedge \psi), \omega) = \inf_{\omega^*}(S(\omega, \omega^*) \otimes\!\!\to \models(\varphi \wedge \psi, \omega^*)) =$$

$$\min(\inf_{\omega^*}(S(\omega, \omega^*) \otimes\!\!\to \models(\varphi, \omega^*)), \inf_{\omega^*}(S(\omega, \omega^*) \otimes\!\!\to \models(\psi, \omega^*)) = \models(\nabla\varphi \wedge \nabla\psi, \omega)$$

RR. Para probar que esta regla preserva validez tomemos un modelo cualquiera $\mathcal{M} = \langle W, S, \models\rangle$ y supongamos que para todo $\omega \in W$: $\models(\varphi \to \psi, \omega) = 1$, resultando que $\models(\varphi, \omega) \leq \models(\psi, \omega)$. Por Definición 5.3

$$\models(\nabla\varphi, \omega) = \inf_{\omega^*}(S(\omega, \omega^*) \otimes\!\!\to \models(\varphi, \omega^*))$$

y puesto que en toda BL-álgebra se satisface que si $v \leq u$ entonces $w \otimes\!\!\to v \leq w \otimes\!\!\to u$, tenemos la anterior expresión es menor o igual a

$$\inf_{\omega^*}(S(\omega, \omega^*) \otimes\!\!\to \models(\psi, \omega^*)) = \models(\nabla\psi, \omega)$$

T. Para comprobar que el llamado axioma de reflexividad para ∇ no es válido en la clase de modelos Σ_0 basta mirar el contra-modelo propuesto arriba y verificar que por ejemplo en ω_2 no se satisface ese axioma pues $\models(\nabla\psi, \omega_2) = 1$ y $\models(\psi, \omega_2) = 0.1$. De forma similar es posible verificar que el axioma de reflexividad para Δ tampoco es válido en ese modelo, pues $\models(\Delta\psi, \omega_2) = 0$.

Supongamos ahora que tomamos un modelo $\mathcal{M} = \langle W, S, \models\rangle$ tal que S es reflexiva. Comprobemos que para todo $\omega \in W$: $\models(\nabla\varphi \to \varphi, \omega) = 1$ lo cual es equivalente a decir que $\models(\nabla\varphi, \omega) \leq \models(\varphi, \omega)$. Sabemos por la Definición 5.3 que $\models(\nabla\varphi, \omega) = \inf_{\omega'}(S(\omega, \omega') \otimes\!\!\to \models(\varphi, \omega'))$ lo cual es menor o igual al caso particular $S(\omega, \omega) \otimes\!\!\to \models(\varphi, \omega)$ lo que a su vez debido a que $S(\omega, \omega) = 1$ resulta igual a $\models(\varphi, \omega)$, probando lo deseado. Para verificar que para todo $\omega \in W$: $\models(\varphi \to \Delta\varphi, \omega) = 1$, basta escribir las condiciones de satisfactibilidad para $\models(\Delta\varphi, \omega) = \sup_{\omega'}(S(\omega, \omega') \otimes \models(\varphi, \omega'))$ lo cual es mayor o igual al caso particular $S(\omega, \omega) \otimes \models(\varphi, \omega)$ igual a $\models(\varphi, \omega)$ por reflexividad.

B. Primero verifiquemos rápidamente que el axioma de simetría no se satisface en la familia de modelos Σ_2 (y por extensión en Σ_0). Redefinamos el contra-modelo anterior para que satisfaga reflexividad dejando W y $\models$ sin modificar y tomando S como

$$S(\omega^*,\omega^\#) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega^* = \omega^\# \\ 0.9 & \text{si } \omega^* = \omega_1 \text{ y } (\omega^\# = \omega_2 \text{ ó } \omega^\# = \omega_3) \\ 0.9 & \text{si } \omega^* = \omega_3 \text{ y } (\omega^\# = \omega_1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Luego en ω_1 tenemos que

$$\models(\nabla\Delta\psi,\omega_1) = 0.9 \otimes\!\!\rightarrow 0.1 < 0.5 = \models(\psi,\omega_1)$$

De la misma manera podemos ver que en ω_3 sucede que

$$\models(\Delta\nabla\psi,\omega_3) = 0.5 \otimes 0.9 > 0.2 = \models(\psi,\omega_3)$$

Veamos ahora que los axiomas en cuestión son válidos en los modelos donde S es simétrica. Por un lado sabemos que $\models(\varphi \to \nabla\Delta\varphi,\omega) = 1$ si y sólo si $\models(\varphi,\omega) \leq \models(\nabla\Delta\varphi,\omega)$. Usando la Definición 5.3 obtenemos que

$$\models(\nabla\Delta\varphi,\omega) = \inf_{\omega_1}(S(\omega,\omega_1) \otimes\!\!\rightarrow \sup_{\omega_2}(S(\omega_1,\omega_2) \otimes \models(\varphi,\omega_2))) \geq$$

$$\inf_{\omega_1}(S(\omega,\omega_1) \otimes\!\!\rightarrow (S(\omega_1,\omega) \otimes \models(\varphi,\omega))) \geq \inf_{\omega_1}((S(\omega,\omega_1) \otimes\!\!\rightarrow S(\omega_1,\omega)) \otimes \models(\varphi,\omega)) = \models(\varphi,\omega)$$

puesto que, debido a la simetría de S, para todo ω_1, resulta que $S(\omega,\omega_1) \otimes\!\!\rightarrow S(\omega_1,\omega) = 1$. Por otra parte $\models(\Delta\nabla\varphi \to \varphi,\omega) = 1$ si y sólo si $\models(\Delta\nabla\varphi,\omega) \leq \models(\varphi,\omega)$. Planteando la relación de satisfactibilidad tenemos que:

$$\models(\Delta\nabla\varphi,\omega) = \sup_{\omega^*}(S(\omega,\omega^*) \otimes \inf_{\omega^\#}(S(\omega^*,\omega^\#) \otimes\!\!\rightarrow \models(\varphi,\omega^\#)))$$

lo cual es menor igual al caso particular en que $\omega^\# = \omega$, quedando

$$\sup_{\omega^*}(S(\omega,\omega^*) \otimes (S(\omega^*,\omega) \otimes\!\!\rightarrow \models(\varphi,\omega)))$$

que por simetría es equivalente a

$$\sup_{\omega^*}(S(\omega,\omega^*) \otimes (S(\omega,\omega^*) \otimes\!\!\rightarrow \models(\varphi,\omega))) = \sup_{\omega^*}(\min(S(\omega,\omega^*),\models(\varphi,\omega))) \leq \models(\varphi,\omega)$$

4. Para verificar que los axiomas de transitividad no son válidos en la clase de modelos Σ_3 (y por ende en Σ_0 y Σ_2) consideremos un modelo muy simple $\mathcal{M} = \langle W,S,\models\rangle$ donde $W = \{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$, la valuación de la fórmula φ en cada mundo se define como: $\models(\varphi,\omega_1) = 0.5$, $\models(\varphi,\omega_2) = 0.9$ y $\models(\varphi,\omega_3) = 0.1$, y la función de similitud se define como

$$S(\omega^*,\omega^\#) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega^* = \omega^\# \\ 1 & \text{si } \omega^* = \omega_1 \text{ y } (\omega^\# = \omega_2 \text{ ó } \omega^\# = \omega_3) \\ 1 & \text{si } \omega^\# = \omega_1 \text{ y } (\omega^* = \omega_2 \text{ ó } \omega^* = \omega_3) \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

En estas condiciones, resulta que $\models(\nabla\varphi,\omega_2) = 0.5$ y que $\models(\nabla\nabla\varphi,\omega_2) = 0.1$. De igual manera resulta que $\models(\Delta\varphi,\omega_3) = 0.5$ y que $\models(\Delta\Delta\varphi,\omega_3) = 0.9$. Ambos casos son claros contraejemplos de los axiomas de transitividad.

Ahora, para probar que en un L-modelo con S $\otimes$-transitiva, sucede que $\models(\nabla\varphi \to \nabla\nabla\varphi,\omega) = 1$ o equivalentemente que $\models(\nabla\varphi,\omega) \leq \models(\nabla\nabla\varphi,\omega)$ para todo mundo ω, sólo es necesario tener en cuenta que la siguiente propiedad es válida en toda $\mathcal{C}$-álgebra

$$S(\omega,\omega_1) \otimes\to \models(\varphi,\omega_1) \leq (S(\omega,\omega_2) \otimes S(\omega_2,\omega_1)) \otimes\to \models(\varphi,\omega 1) =$$

$$S(\omega,\omega_2) \otimes\to (S(\omega_2,\omega_1) \otimes\to \models(\varphi,\omega_1))$$

tomando ínfimos en ambos lados de la desigualdad tenemos que:

$$\inf_{\omega_1}(S(\omega,\omega_1) \otimes\to \models(\varphi,\omega_1)) \leq S(\omega,\omega_2) \otimes\to \inf_{\omega_1}(S(\omega_2,\omega_1) \otimes\to \models(\varphi,\omega_1))$$

y como eso sucede para todo ω_2 también para el ínfimo

$$\inf_{\omega_1}(S(\omega,\omega 1) \otimes\to \models(\varphi,\omega_1)) \leq \inf_{\omega_2}(S(\omega,\omega_2) \otimes\to \inf_{\omega_1}(S(\omega_2,\omega_1) \otimes\to \models(\varphi,\omega_1)))$$

lo cual corresponde a la inecuación $\models(\nabla\varphi,\omega) \leq \models(\nabla\nabla\varphi,\omega)$. Para determinar el otro caso donde $\models(\Delta\Delta\varphi,\omega) \leq \models(\Delta\varphi,\omega)$ sólo basta ver que

$$\sup_{\omega^*}(S(\omega,\omega^*) \otimes \sup_{\omega^\#}(S(\omega^*,\omega^\#) \otimes \models(\varphi,\omega^\#))) = \sup_{\omega^*}\sup_{\omega^\#}((S(\omega,\omega^*) \otimes S(\omega^*,\omega^\#)) \otimes \models(\varphi,\omega^\#)).$$

$\mathbf{K}_r$. Cuando incluimos las constantes de verdad tenemos esta versión simplificada del axioma **K**. Para confirmar que es válida basta con comprobar que $\models(\nabla(\bar{r} \to \varphi),\omega) \leq \models(\bar{r} \to \nabla\varphi,\omega)$. Tomemos el lado izquierdo y escribamos su definición:

$$\inf_{\omega 1}(S(\omega,\omega 1) \otimes\to (\models(\bar{r},\omega 1) \otimes\to \models(\varphi,\omega 1)))$$

y por las propiedades válidas en toda $\mathcal{C}$-álgebra resulta que la última expresión es igual a:

$$\inf_{\omega 1}(\models(\bar{r},\omega 1) \otimes\to (S(\omega,\omega 1) \otimes\to \models(\varphi,\omega 1)))$$

y dado que el valor de verdad de $\models(\bar{r},\omega 1)$ es r para todo mundo, resulta que:

$$\inf_{\omega 1}(r \otimes\to (S(\omega,\omega 1) \otimes\to \models(\varphi,\omega 1))) = r \otimes\to \inf_{\omega 1}((S(\omega,\omega 1) \otimes\to \models(\varphi,\omega 1)) =$$

$$r \otimes\to \models(\nabla\varphi,\omega) = \models(\bar{r} \to \nabla\varphi,\omega)$$

obteniendo lo que buscábamos.

□

Así, hemos probado la correctitud del sistema $\mathbf{FM}(\mathcal{C})$ y sus extensiones. Nuestra próxima tarea será probar completitud.

5.4 Completitud parcial

En esta sección nuestro objetivo es estudiar la completitud de nuestro sistema $\mathbf{FM}(\mathcal{C})$ con respecto a la clase de modelos de similitud de Kripke multivaluados Σ_0 (y sus extensiones respecto de sus subclases). Debido a razones que se explicitarán a continuación no ofreceremos un resultado contundente de completitud. Sin embargo estamos en condiciones de ofrecer algunos resultados que consideramos interesantes y que están estrechamente relacionados con tal objetivo.

Para probar completitud débil hay que mostrar que si una fórmula φ es Σ_0-válida entonces hay una prueba de φ en $\mathbf{FM}(\mathcal{C})$. La técnica usual, que consiste en la construcción de un modelo canónico, no es reproducible directamente en el contexto multivaluado debido a que: o no podemos

construir conjuntos maximales consistentes (i.e. teorías completas dónde para cada fórmula del lenguaje $\psi \in \mathcal{FL}_\nabla$, ψ o $\neg\psi$ está en ellas) como en el caso de Gödel, o porque la lógica en cuestión no es *normal* (i.e. el operador ∇ no verifica el axioma K), como en el caso de Łukasiewcz y Producto. Ambas condiciones son centrales en esa técnica.

Por lo tanto, tornaremos nuestra atención hacia otro método, basado en la llamada *Teoría de la Correspondencia* (ver para una introducción al tema [Van84; BRY94]), que básicamente explota dos ideas principales.

La primera consiste en la posibilidad de mirar la lógica modal proposicional como un fragmento de la lógica de primer orden (en nuestro caso, un fragmento con sólo un predicado binario y tantos predicados monádicos como variables proposicionales posea la lógica modal proposicional). En ese sentido, uno puede establecer una correspondencia uno-a-uno entre validez en una clase de modelos de similitud de Kripke y validez en una subclase de modelos de primer orden. Siguiendo esa línea, podemos mostrar que una fórmula φ en $\mathcal{FL}_\nabla$ es válida en $\mathbf{FM}(\mathcal{C})$ (o sus extensiones) si y sólo si su traducción a $\mathcal{C}\forall$ es válida en la clase de modelos que satisface una teoría Γ conteniendo las fórmulas de primer orden que caracterizan las propiedades requeridas a la relación borrosa de accesibilidad S de la clase de modelos en cuestión.

La otra idea consiste en asumir la existencia de una correspondencia entre la validez de alguna fórmula modal en un *marco*, (i.e. una clase de modelos caracterizados sólo por las propiedades de su relación de accesibilidad) y la determinación de las propiedades que caracterizan a tal *marco*. En particular, estaremos interesados en el hecho ampliamente conocido de que la validez de los axiomas **T**, **B** y **4** determinan las propiedades de reflexividad, simetría y $\otimes$-transitividad, respectivamente, de la relación de accesibilidad borrosa S del *marco*. En tal sentido, mostraremos que cualquier teoría en el fragmento mencionado de la lógica de primer orden $\mathcal{C}\forall$, conteniendo las traducciones de los axiomas **T**, **B** o **4**, deduce las expresiones de primer orden correspondientes a las propiedades de reflexividad, simetría o $\otimes$-transitividad, respectivamente, de un predicado binario, en nuestro caso aquel que representa la relación de accesibilidad. Mas específicamente, eso será verdadero para la teoría $(\mathbf{FM}\cdot\#(\mathcal{C}))^*$, que resulta de traducir los axiomas de $\mathbf{FM}\cdot\#(\mathcal{C})$ con $\# = \mathbf{T}, \mathbf{TB}, \mathbf{S4}$ o $\mathbf{S5}$. Esto nos permitirá dar resultados de completitud respecto de sendos sistemas lógicos que tendrán la particularidad de que su fragmento modal coincidirá exactamente con uno de los sistemas modales propuestos aquí.

En el resto de esta sección presentaremos la formalización de las ideas anteriormente mencionadas. Comenzaremos por establecer la correspondencia entre nuestra lógica modal y un fragmento del cálculo de la lógica de predicados multivaluado $\mathcal{C}\forall$. Para eso asumamos que el lenguaje $\mathcal{FL}_\nabla$ está construído sobre el conjunto de variables proposicionales $Prop = \{p_0, p_1, p_2, \dots\}$. Ahora definimos el sublenguaje de $\mathcal{FL}_\forall$ que denotaremos con $\mathcal{FL}^2_\forall$ y que corresponderá al conjunto de fórmulas bien formadas generadas partir de un lenguaje que sólo contiene: los operadores lógicos $\{\&, \rightarrow\}$, los cuantificadores $\{\forall, \exists\}$, un conjunto de variables $Var = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$, una constante $\bar{0}$, un predicado binario R y un conjunto de predicados unarios $\{P_0, P_1, P_2, \dots\}$, un P_i para cada variable proposicional p_i in $Prop$. Entonces extendemos el alcance de la función de traslación dada en la Definición 5.1 para que considere los nuevos operadores ∇, Δ de la siguiente manera:

Definición 5.6 *Fijada una variable de referencia x, definimos la aplicación $*$ con dominio $\mathcal{FL}_\nabla$ y rango $\mathcal{FL}^2_\forall$ asignando a cada fórmula modal φ otra de primer orden φ^* de igual manera que en la Definición 5.1 para cada variable proposicional p_i in $Prop$, para $\bar{0}$, para los conectivos $\{\&, \rightarrow\}$, para los operadores modales $\{\Box, \Diamond\}$ y como sigue para los nuevos operadores modales:*

1. *$(\nabla\varphi)^*(x)$ es $(\forall y)((R(x,y) \rightarrow \varphi^*[x/y])$ donde la variable y no debe aparecer en $\varphi^*(x)$.*

2. *$(\Delta\varphi)^*$ es $\exists y(R(x,y)\&\varphi^*[x/y])$ dónde y es una variable cualquiera.*

$[x/y]$ representa el reemplazo de toda ocurrencia libre de la variable x por y.

Nótese que sigue siendo cierto que x es la única variable que puede ser libre en una fórmula φ^* resultado de aplicar la transformación $*$ a la fórmula modal φ. Pero a diferencia del caso de las

traducciones de fórmulas modales del tipo $\Box\varphi$ y $\Diamond\varphi$ que no contenían variables libres, las fórmulas resultantes de $(\nabla\varphi)^*$ y $(\Delta\varphi)^*$ siempre contienen a x como variable libre. Eso tiene que ver con que la interpretación de estos operadores es local a cada mundo ω y no global como en los anteriores.

Observación 5.4 La aplicación $*$ es uno-a-uno y la imagen de $\mathcal{F}L_\nabla$ por $*$, denotada $(\mathcal{F}L_\nabla)^*$, es un sublenguaje de $\mathcal{F}L^2_\forall$.

Nuevamente es importante observar que cualquier $\mathcal{C}$-modelo de similitud de Kripke $\mathcal{M} = \langle W, S, \models\rangle$ sobre el lenguaje $\mathcal{F}L_\nabla$ puede ser visto como un $\mathcal{C}\forall$-modelo del correspondiente lenguaje de primer orden $\mathcal{F}L^2_\forall$. Para hacerlo sólo es necesario indicar como deben interpretarse los símbolos de predicados R y P_i.

Observación 5.5 *De ahora en más, cuando hablemos de la lógica $\mathcal{C}\forall$, entenderemos que nos referimos a su restricción al lenguaje $\mathcal{F}L^2_\forall$.*

Definición 5.7 *Dados una $\mathcal{C}$-álgebra L, a partir de un L-modelo de similitud de Kripke $\mathcal{M} = \langle W, S, \models\rangle$ definimos su correspondiente L-modelo de $\mathcal{C}\forall$ como $\mathcal{M}^* = \langle M, \Theta\rangle$ donde el dominio es $M = W$ y la función de interpretación Θ es definida como sigue:*

$\Theta(P_i(x)[x/\omega]) = \ \models(p_i, \omega)$

$\Theta(R(x_1, x_2)[x_1/\omega_1, x_2/\omega_2]) = S(\omega_1, \omega_2)$

$\Theta(\varphi \sharp \psi) = \Theta(\varphi) \sharp \Theta(\psi)$, *siendo $\sharp$ una conectiva lógica,*

donde x, x_1 y x_2 son variables y $[x/\omega]$ es, como antes, la asignación del elemento del dominio ω a la variable x.

Esto nos permite presentar el siguiente resultado.

Lema 5.1 *Bajo la notación mencionada en la definición anterior resulta cierto que:*

$$\langle \mathcal{M}, \omega\rangle \models \varphi \ \text{ iff } \ \mathcal{M}^* \models \varphi^*(x)[x/\omega]$$

Más aún, también sucede que:

$$\Sigma \models \varphi \ \text{ iff } \ \forall \mathcal{M} \in \Sigma : \mathcal{M}^* \models (\forall x)\varphi^*(x)$$

Prueba: Por inducción sobre la complejidad de la fórmula φ. El caso base corresponde a las variables proposicionales y es evidente que se cumple. Para el caso general basta señalar que por Definición 5.6 la aplicación * conmuta con los operadores lógicos & y $\rightarrow$. Así que en esos casos la aplicación de la hipótesis inductiva es inmediata. Por lo tanto los casos interesantes corresponden a los operadores modales. Pero allí * lo único que hace es reproducir en $\mathcal{C}\forall$ la definición de satisfactibilidad de cada uno de ellos en el modelo modal. Por lo tanto una se satisface en el modelo de primer orden si y sólo si la otra lo hace en el modelo modal.

La generalización a familias de modelos es inmediata. □

Esta equivalencia entre modelos nos permite conservar los resultados sobre la categoría en la complejidad descriptiva de cada una de las lógicas **FM**. Así por ejemplo, podremos afirmar que cada $(\mathbf{FM}\cdot\#(\mathcal{C}))^*$, con $\# = \mathbf{T}, \mathbf{TB}, \mathbf{S4}$ o $\mathbf{S5}$, es recursivamente enumerable. Sin embargo, para las lógicas que surgen de las álgebras estándar no es posible reproducir inmediatamente los resultados ya mencionados, salvo el caso Gödel donde los conjuntos de tautologías coinciden. Por ejemplo no es posible demostrar que $(\mathbf{FM}\cdot\#(Ł))^*$ y $(\mathbf{FM}\cdot\#([\mathbf{0},\mathbf{1}]_Ł))^*$ tienen las mismas tautologías, con la misma técnica que lo hace Hájek, debido a que el operador ∇ no satisface el axioma **K** y esta es una condición necesaria para garantizar que a partir de los conjuntos maximales consistentes se puede extrapolar la condición de pertenencia a la verdad en el modelo canónico generado vía esos conjuntos. A pesar de esta limitación en lo que resta de este capítulo nos propondremos presentar varios resultados que la circunscriben.

Para ello, en primer lugar, obsérvese que a partir del lema anterior resulta que si S en $\mathcal{M} = \langle W, S, \models\rangle$:

- es reflexiva entonces $\mathcal{M}^* \models (\forall x)R(x,x)$.
- es simétrica entonces $\mathcal{M}^* \models (\forall x, \forall y)(R(x,y) \to R(y,x))$
- es transitiva entonces $\mathcal{M}^* \models (\forall x, \forall y, \forall z)(R(x,y) \to (R(y,z) \to R(x,z)))$

Ahora veremos que es posible recorrer el sentido inverso de la definición anterior, i.e., a partir de un modelo $\mathcal{M}$ en $\mathcal{C}\forall$ que en el lenguaje $\mathcal{F}L^2_\forall$ es posible construir un modelo de similitud de Kripke $\mathcal{M}^{*-1} = \langle W, S, \models\rangle$ tal que las propiedades de la relación de accesibilidad dependan de las fórmulas que valida el modelo original. Más formalmente,

Lema 5.2 *Sea $\mathcal{M} = \langle U, \Theta\rangle$ un L-modelo de $\mathcal{C}\forall$ sobre el lenguaje $\mathcal{F}L^2_\forall$. Si definimos el L-modelo de Kripke $\mathcal{M}^{*-1} = \langle U, S, \models\rangle$, donde $\forall u_1, \forall u_2 : S(u_1,u_2) = \Theta(R(x_1,x_2)[x_1/u_1, x_2/u_2])$ y $\forall u :\models (p_i, u) = \Theta(P_i(x)[x/u])$. Entonces $\mathcal{M}^{*-1}$ es un L-modelo de Kripke tal que S:*

- *es reflexiva si $\mathcal{M} \models (\forall x)R(x,x)$.*
- *es simétrica si $\mathcal{M} \models (\forall x, \forall y)(R(x,y) \to R(y,x))$*
- *es transitiva si $\mathcal{M} \models (\forall x, \forall y, \forall z)(R(x,y) \to (R(y,z) \to R(x,z)))$*

Prueba: La prueba es inmediata. □

A partir de los dos resultados anteriores es claro que los *marcos* modales de relaciones de accesibilidad reflexiva, simétrica o transitiva son isomorfos a las familias de modelos de $\mathcal{C}\forall$ que satisfacen una teoría Γ que contiene respectivamente las fórmulas en $\mathcal{F}L^2_\forall$ que expresan cada una de esas propiedades. De acuerdo con ellos y debido a los resultados conocidos de completitud de $\mathcal{C}\forall$, podemos afirmar que para cada $\varphi \in \mathcal{F}L_\nabla$ tendremos que $\Gamma \vdash_{\mathcal{C}\forall} \varphi^*$ con:

- $\Gamma = \{(\forall x)R(x,x)\}$ si y sólo si φ es válida en Σ_2
- $\Gamma = \{(\forall x)R(x,x), (\forall x, \forall y)(R(x,y) \to R(y,x)\}$ si y sólo si φ es válida en Σ_3
- $\Gamma = \{(\forall x)R(x,x), (\forall x, \forall y, \forall z)(R(x,y) \to (R(y,z) \to R(x,z))\}$ si y sólo si φ es válida en Σ_4
- $\Gamma = \{(\forall x)R(x,x), (\forall x, \forall y)(R(x,y) \to R(y,x), (\forall x, \forall y, \forall z)(R(x,y) \to (R(y,z) \to R(x,z))\}$ si y sólo si φ es válida en $\Sigma_\otimes$

Estos resultados expresan que debido a que un *marco* Σ está completamente caracterizado por el conjunto de propiedades que satisface la relación de accesibilidad S (reflexividad, simetría y/o $\otimes$-transitividad), y que esas propiedades son expresables mediante fórmulas del lenguaje de $\mathcal{C}\forall$, entonces una fórmula φ será una tautología de Σ si y sólo si φ^* es verdadera en todos los modelos de la teoría Γ_Σ que contiene cada una de las fórmulas que representa las propiedades de S que caracterizan a la clase de modelos Σ. En otras palabras: $\models_\Sigma \varphi$ si y sólo si $\Gamma_\Sigma \vdash_{\mathcal{C}\forall} \varphi^*$. Si bien ese resultado no ofrece una prueba de completitud respecto de ninguno de los sistema $\mathbf{FM}(\mathcal{C})$ nos pone en camino. Sin duda si pudiéramos reemplazar la teoría Γ_Σ por $(\mathbf{FM}(\mathcal{C}))^*$, siendo toda fórmula de $\mathbf{FM}(\mathcal{C})$ válida en Σ, habríamos dado un paso en la búsqueda de ese resultado de completitud. Por eso ahora pondremos todo el esfuerzo en probar que $(\mathbf{FM{\cdot}T}(\mathcal{C}))^*$ es equivalente a Γ_{Σ_2}, que $(\mathbf{FM{\cdot}TB}(\mathcal{C}))^*$ es equivalente a Γ_{Σ_3}, $(\mathbf{FM{\cdot}S4}(\mathcal{C}))^*$ es equivalente a Γ_{Σ_4} y $(\mathbf{FM{\cdot}S5}(\mathcal{C}))^*$ es equivalente a $\Gamma_{\Sigma_\otimes}$.

Para hacerlo, primero observemos que en forma sencilla es posible reducir equivalentemente las teorías $(\mathbf{FM{\cdot}T}(\mathcal{C}))^*$, $(\mathbf{FM{\cdot}TB}(\mathcal{C}))^*$, $(\mathbf{FM{\cdot}S4}(\mathcal{C}))^*$ y $(\mathbf{FM{\cdot}S5}(\mathcal{C}))^*$, a las subteorías $T2 = \{T^*\}$, $T3 = \{T^*, B^*\}$, $T4 = \{T^*, 4^*\}$ y $Sim = \{T^*, B^*, 4^*\}$, respectivamente, puesto que: (i) la traslación por $*$ de los axiomas de $S5\mathcal{C}$ (que también son axiomas de cada $\mathbf{FM{\cdot}\#}(\mathcal{C})$) corresponden a fórmulas que expresan axiomas de $\mathcal{C}\forall$ y por lo tanto no agregan nada nuevo; (ii) eso mismo ocurre en los casos en de los axiomas K_r, Rel, $Equ1$, $Equ2$; (iii) y finalmente la regla de necesitación RN corresponde a la de generalización y la regla de inferencia RR pasa a ser una regla derivable en $\mathcal{C}\forall$.

A continuación demostraremos las equivalencias mencionadas anteriormente, mostrando que las trascripciones de los axiomas T, B y 4 son respectivamente equivalentes a las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad. Con tal objetivo en mente, debemos primero destacar que los axiomas modales en cuestión son en verdad esquemas de axiomas y por lo tanto cuando escribimos que:

$$\vdash_{\mathbf{FM\cdot T}(\mathcal{C})} (\forall y)P(y) \to P(x)$$

en realidad estamos implícitamente significando que la fórmula es válida para todo predicado unario P. Justamente en el próximo teorema haremos uso de esa observación.

Teorema 5.2 *Sea Γ una teoría en $\mathcal{C}\forall$ conteniendo los axiomas de equivalencia clásicos y siendo R un símbolo de relación binaria. Entonces:*

- $(\forall P)[\Sigma \vdash_{\mathcal{C}\forall} (\forall x)(\forall y(R(x,y) \to P(y)) \to P(x))]$ *si y sólo si* $\Sigma \vdash_{\mathcal{C}\forall} (\forall x)R(x,x)$.
- $(\forall P)[\Sigma \vdash_{\mathcal{C}\forall} (\forall x)(P(x) \to ((\forall y)(R(x,y) \to (\exists z)(R(y,z) \& P(z))))]$
  si y sólo si $\Sigma \vdash_{\mathcal{C}\forall} (\forall x, \forall y)(R(x,y) \equiv R(y,x))$.
- $(\forall P)[\Sigma \vdash_{\mathcal{C}\forall} (\forall x)(((\forall t)(R(x,t) \to P(t))) \to ((\forall y)(R(x,y) \to (\forall z)(R(y,z) \to P(z)))))]$
  si y sólo si $\Sigma \vdash_{\mathcal{C}\forall} (\forall x, \forall y, \forall z)(R(x,y) \ \& \ R(y,z) \to R(x,z))$.

Prueba: Nótese que la dirección de derecha a izquierda es inmediata si tomamos en cuenta los resultados de correctitud que surgen de la Proposición 5.1, ya que el lado izquierdo corresponde a la tranformación de una fórmula modal que allí demostramos que es válida en el *marco* cuya relación de accesibilidad satisface la propiedad descrita por la fórmula del lado derecho.

Para el sentido que va de izquierda a derecha, probaremos que cada transcripción corresponde a una condición de primer orden sobre la relación R, proponiendo una apropiada instanciación del predicado P. En el primer caso haremos la sustitución $P(u)$ por cada ejemplar de la familia $P_v(u) = R(v,u)$, donde v es un término fijo que recorre todos los elementos del dominio, produciendo la siguiente instancia de la fórmula original:

$$(\forall x)((\forall y)(R(x,y) \to R(v,y)) \to R(v,x))$$

en cada sustitución de la variable x habrá una $R(x,y)$ que hará el antecedente trivialmente cierto y nos permitirá eliminarlo, y reducir la expresión a la que corresponde a reflexividad para esa sustitución. Y eso podemos hacerlo para cada elemento del dominio lo que nos permite obtener el resultado buscado.

En el segundo caso, considerar $P(u)$ como la familia de fórmulas $v = u$ donde de nuevo v es un término fijo que recorrerá todos los elementos del dominio. El resultado de tal consideración queda reflejada en la siguiente expresión:

$$\begin{gathered}(\forall v, \forall x)((v = x) \to (\forall y)(R(x,y) \to \\ (\exists z)(R(y,z) \ \& \ (v = z))))\end{gathered}$$

si ahora tomamos la diagonal donde $v = x$ el antecedente será una tautología y por tanto la fórmula se reducirá a

$$(\forall x)(\forall y)(R(x,y) \to (\exists z)(R(y,z) \ \& \ (x = z)))$$

Finalmente, aplicando el axioma de congruencia para R que mencionáramos en el Capítulo 1 tenemos que

$$(\forall x), (\forall y), (\forall z)((x = z) \ \& \ R(y,z) \to R(y,x))$$

o equivalentemente

$$(\forall x, \forall y)((\exists z)((x = z) \ \& \ R(y,z)) \to R(y,x))$$

que por transitividad con la implicación anterior resulta lo buscado:

$$(\forall x, \forall y)(R(x,y) \to R(y,x))$$

Para probar la tercera implicación, consideraremos nuevamente la familia $P_v(u) = R(v,u)$ (con v un término fijo para cada elemento del dominio). Entonces poniendo $\forall v$ en lugar de $\forall P_v$ obtenemos que

$$(\forall v, \forall x)(((\forall t)(R(x,t) \to R(v,t))) \to ((\forall y)(R(x,y) \to (\forall z)(R(y,z) \to \ R(v,z))))$$

otra vez el elegir la diagonal (i.e. reduciendo las cuantificaciones sobre v y x a una sola) nos permite obtener un antecedente tautológico que podemos eliminar para reducir la anterior expresión a la siguiente

$$(\forall x, \forall y, \forall z)(R(x,y) \to (R(y,z) \to R(x,z))),$$

que para cualquier $\mathcal{C}\forall$ es equivalente a

$$(\forall x, y, z)(R(x,y) \& R(y,z) \to R(x,z)))$$

tal como era nuestro deseo demostrar.

□

Obsérvese que la hipótesis de la presencia de los axiomas de igualdad sólo fue necesaria para probar simetría. Nosotros no hemos sabido como evitar su inclusión y de hecho todas las demostraciones que hemos revisado de la lógica clásica la utilizan (ver por ejemplo [Van84; BRY94]). Por otra parte nótese que la técnica ha sido siempre la misma, llevar la cuantificación de segundo orden a una de primer orden de forma que el predicado original resultara ser una proyección del que lo reemplazara.

El resultado que acabamos de presentar nos permite afirmar que

$$(\forall i = 2,3,4,\otimes) \ : \ \models_{\Sigma_i} \varphi \qquad \text{si y sólo si} \qquad (FM{\cdot}\#_i(\mathcal{C}))^* \vdash_{\mathcal{C}\forall} \varphi^* \tag{5.1}$$

dónde $\#_2 = T$, $\#_3 = TB$, $\#_4 = S4$ y $\#_\otimes = S5$. A partir de tal afirmación y de los resultados de correctitud de la sección anterior, podemos cerrar este capítulo diciendo que para cualquier sistema $\mathcal{S}$ resulta

$$\textbf{Si} \quad \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \quad \textbf{entonces} \quad (\mathcal{S})^* \vdash_{\mathcal{C}\forall} \varphi^* \tag{5.2}$$

donde $\mathcal{S} = FM{\cdot}\#_i(\mathcal{C})$ con $\#_i$ como antes.

Es importante señalar que la inversa de la implicación anterior no es evidente puesto que en $\mathcal{C}\forall$ hay fórmulas válidas en el lenguaje $\mathcal{F}L^2_\forall$ que no son la imagen por $*$ de una fórmula modal (por ejemplo $\forall x \forall y(R(x,y) \to R(x,y))$ y aún cuando nos restringiéramos al codominio de $\mathcal{F}L_\nabla$ vía $*$ (teniendo en cuenta que es inyectiva) para describir la teoría o la conclusión, no podríamos asegurar que a lo largo de la prueba toda fórmula pertenezca al rango de $*$. Como detalle final, podemos mencionar que en caso de incorporar las constantes de verdad al lenguaje y extender debidamente la definición de interpretación, podemos tener las correspondientes versión racional de la equivalencia 5.1

$$(\forall i = 2,3,4,\otimes) \ : \ \models_{\Sigma_i} \varphi \qquad \text{si y sólo si} \qquad \forall r \in Q : (FM{\cdot}\#_i(\mathcal{C}))^* \vdash_{R\otimes\forall} \bar{r} \to \varphi^*$$

para todas las t-normas $\otimes$ en que exista el correspondiente teorema de completitud à la Pavelka para $R\bigotimes\forall$.

En resumen, el estudio hasta aquí presentado sobre lógical modales multivaluadas muestra que los resultados que vienen sosteniendo Hájek en diferentes publicaciones, acerca de que la lógica borrosa en el sentido estricto ofrece un valioso marco para el desarrollo de modelos de representación del conocimiento no sólo vago sino también incierto, puede ser extendido, al menos en el sentido formal, al caso del conocimiento inverosímil. En tal sentido hemos extendido los enfoques presentados en los capítulos precedentes ofreciendo la posibilidad de capturar patrones de razonamiento con proposiciones del tipo *aproximadamente* φ pero donde ahora φ puede ser una proposición borrosa.

Capítulo 6

Consecuencias Borrosas

Hasta aquí nos hemos dedicado a presentar sistemas lógicos en lo que se ha dado en llamar *estilo-Hilbert*. Más precisamente, a los sistemas expresados bajo el patrón de establecer un conjunto de fórmulas bien formadas (*fbf*) que juegan el papel de axiomas y luego definirlos como el conjunto más pequeño de *fbf* cerrados bajo ciertas reglas de inferencia, suelen llamárseles *cálculos estilo-Hilbert*. El núcleo central de aquellas presentaciones estuvieron basadas en las nociones de *demostración* (o derivación) y *teoremicidad*. En este sentido una demostración o derivación, era una sucesión finita de *fbf* en la que cada una de ellas es o un axioma o una consecuencia lógica de anteriores por la aplicación de una regla de inferencia, en forma análoga a la definición dada por Carnap. Esto dio lugar a nociones sintácticas de consecuencia. En este capítulo, trabajaremos en la caracterización desde el metalenguaje de dichos cálculos siguiendo la línea taskiana respecto del objeto de la metamatemática. En particular propondremos un nuevo tipo de operadores de clausura que denominaremos *implicativos*, y veremos como muchos de los operadores que aparecen en la literatura son de ese tipo. Además, presentaremos sus clases asociadas de relaciones de consecuencia y de sistema de clausura. Finalmente completaremos el estudio de otros tipos de operadores y daremos una caracterización uniforme de todos ellos.

6.1 Introducción

En la lógica contemporánea se habla de dos nociones de consecuencia: por un lado, la noción de consecuencia sintáctica, comúnmente identificada con la noción de deducibilidad, representada por el signo de deductor $\vdash$; y por el otro, la noción de consecuencia semántica, identificada generalmente con la noción de consecuencia lógica y representada por el signo $\models$.

El enfoque sintáctico se inicia a comienzos de siglo, con la idea de construir un lenguaje para la matemática que rescatara sólo los aspectos puramente formales y prescindiera totalmente del significado y de la verdad de los enunciados. Tal método permite obtener un cálculo carente de interpretación o *sistema logístico*. Este enfoque es el que sigue las investigaciones de Hilbert en su fundamentación de la geometría, contexto en el cual introduce el término *metamatemática* para referirse a la disciplina que, desde un metalenguaje específico, toma como investigación al lenguaje objeto de la matemática.

En esa línea, Carnap en [Car37], dió una clara exposición de la noción de consecuencia sintáctica desde el nivel metalingüístico. En efecto, al tratar la función esencial que las reglas de transformación tienen en la construcción de un cálculo, i.e., la de determinar en qué condiciones una fórmula es consecuencia de otra u otras, Carnap propone utilizar la noción de *derivable*. Dado un lenguaje $\mathcal{L}$, una *derivación* $\phi_1, \ldots, \phi_n, \psi$ (para $n \geq 0$), es una serie (finita) de fórmulas, tal que cada fórmula de la serie es o una de las premisas, o un axioma o es directamente derivable (i.e., por la aplicación de reglas de inferencia) de una o varias fórmulas anteriores. Si ψ es la fórmula final de la derivación, entonces se dice que ψ es derivable de $\phi_1, \ldots, \phi_n$ (i.e., $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$). Si el

conjunto de premisas fuera vacío ($\emptyset \vdash \psi$), entonces ψ es un teorema que expresa una verdad lógica. Esta noción se caracteriza por verificar las siguientes propiedades básicas para cualquier conjunto de fórmula Γ y fórmula ψ:

$\vdash$**1.** Reflexividad: $\Gamma \vdash \psi$, si $\psi \in \Gamma$.

$\vdash$**2.** Corte: Si $\Gamma \vdash \phi$ para toda $\phi \in \Sigma$ y $\Gamma \cup \Sigma \vdash \psi$, entonces $\Gamma \vdash \psi$.

$\vdash$**3.** Monotonía: Si $\Gamma \vdash \psi$, entonces $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$.

La primera propiedad responde a la intuición de que toda fórmula que pertenece a un conjunto también se deriva de ese conjunto. Por su parte Corte corresponde a la idea de que si un conjunto deriva todas las fórmula pertenecientes a otro conjunto y de la unión de estos dos se deriva otra fórmula entonces ésta ya se derivaba del primer conjunto. Finalmente, monotonía está motivada por la convicción que la acumulación de fórmulas a un conjunto no revoca las derivaciones del conjunto original.

Por otra parte, el enfoque semántico, tiene dos vertientes: la algebraica que estudia la correspondencia entre operadores de clausura, sistema de clausura y sistemas deductivos en el contexto de las álgebras universales, y la tarskiana que utiliza esa nociones como herramientas para la concepción de una metodología de las ciencias deductivas.

De estas dos perspectiva semánticas, la matemática y la lógico-filosófica, tomaremos la tarskiana como marco general del estudio de los patrones de razonamiento borroso que plantearemos aquí. Por esta razón a continuación damos una breve reseña de ella.

6.1.1 Tarski

Tal como señala Palau en [Pal95] las caracterizaciones de Tarski de la noción de consecuancia lógica deben entenderse como formando parte de su concepción acerca de las ciencias deductivas. Esta concepción está enmarcada en la tradición iniciada por Aristóteles en su trabajo de *Segundos Analíticos*, con su estructura de ciencias demostrativas y que fuera continuada a fines del siglo XIX por los trabajos de Pasch y Hilbert. Entre sus antecedentes podemos senñalar la primera gran investigación metamatemática debida a L.Löwenheim, que data de 1915, respecto de la cual las obras de Gödel y Tarski representaron avances importantísimos. Lo peculiar de la obra de Tarski reside en haber dado la primera versión moderna de una teoría general de las ciencias deductivas, en tanto disciplina independiente y formalizada. Precisamente en el primer párrafo de [Tar56b] art.III, se afirma que el trabajo esta dirigido "... to define the meaning, and to establish the elementary properties, of some important concepts belonging to *the methodology of the deductive sciences*, which, following Hilbert, it is customary to call *metamathematics*". En efecto, Tarski en ese trabajo formula su primera noción de consecuencia conocida con el nombre de concepción abstracta, debido a que ella no está determinada por un conjunto de reglas de inferencia, justamente porque pretende capturar las propiedades más comunes a cualquier clase de consecuencia. De este modo, un sistema deductivo es visto como un conjunto de fórmulas, que contiene un subconjunto de ellas, a partir de las cuales se obtienen las restantes como consecuencia. Así, en la visión de Tarski, un sistema deductivo se identifica con un conjunto de fórmulas Γ que es idéntico al conjunto de sus consecuencias $Cn(\Gamma)$, i.e. $\Gamma = Cn(\Gamma)$. La operación de consecuencia será definida como una función $Cn : \mathcal{P}(\mathcal{L}) \longmapsto \mathcal{P}(\mathcal{L})$ y caracterizada por medio de una serie de axiomas metalingüísticos. Estos axiomas se suelen formular, en su versión más abstracta, del modo siguiente. Sean Γ y Σ conjuntos de fórmulas cualesquiera:

$Cn.0$) enumerabilidad: $card(\mathcal{L}) \leq \aleph_0$

$Cn.1$) inclusión: $\Gamma \subseteq Cn(\Gamma)$.

$Cn.2$) idempotencia: $Cn(Cn(\Gamma)) \subseteq Cn(\Gamma)$.

$Cn.3)$ compacidad: $Cn(\Gamma) = \bigcup_{\substack{\chi \subseteq \Gamma \\ card(\chi) < \aleph_0}} Cn(\chi)$

El primer requerimiento corresponde a limitar la formalización a lenguajes enumerables. De la propiedad de inclusión se desprende que toda fórmula es consecuencia de sí misma. Idempotencia define la idea de punto fijo para esta operación. Y finalmente, compacidad determina que el conjunto de todas las consecuencias de cualquier conjunto de fórmulas es equivalente a la unión de las consecuencias de sus subconjuntos finitos. Esto impone una fuerte restricción al tipo de sistemas deductivos que se busca caracterizar, puesto que establece que los mismos deben ser finitamente axiomatizables y deja sin cubrir aquellos sistemas que posean reglas de inferencia con un conjunto infinito numerable de premisas (por ejemplo algunos de los mencionados en el capítulo anterior). Es importante destacar que a partir de estas propiedades puede ser inferida la siguiente:

$Cn.4)$ monotonía: Si $\Gamma \subseteq \Sigma$ entonces $Cn(\Gamma) \subseteq Cn(\Sigma)$.

$Cn.4$ determina la preservación del orden de inclusión y juega un rol fundamental en los sistemas deductivos clásicos, dado que garantiza que la localidad de las deducciones serán preservadas globalmente. Cabe mencionar que algunas caracterizaciones más modernas de la noción de consecuencia abstracta, suelen reemplazar compacidad por monotonía.

Como ya se anticipó, lo peculiar de esta presentación es su independencia respecto de reglas de inferencia. Luego para capturar sistemas deductivos específicos será necesario considerar nociones de consecuencia específicas correspondiente a cada uno de ellos y que dependerán de la estructura sintáctica de las reglas de inferencia propias de aquel sistema. En otras palabras, la noción de consecuencia subyacente a cada sistema deductivo será una noción extendida de la precedente.

Tal es lo que hace Tarski cuando en [Tar56b] art.XII, agrega un segundo grupo de axiomas que no serán válidos para cualquier operación de consecuencia, sino sólo para aquella que caracterice sistemas deductivos que incluyan al cálculo proposicional clásico. Estos axiomas introducen dos nuevos conceptos primitivos como operaciones, a saber, la negación y la implicación material. Los axiomas en cuestión son:

$Cn.5)$ Si $p \in \mathcal{L}$ y $q \in \mathcal{L}$ entonces $(p \to q) \in \mathcal{L}$ y $\neg p \in \mathcal{L}$.

$Cn.6)$ Si $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$, $p \in \mathcal{L}$ $q \in \mathcal{L}$ y $(p \to q) \in Cn(\Gamma)$ entonces $q \in Cn(\Gamma \cup \{p\})$.

$Cn.7)$ Si $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$, $p \in \mathcal{L}$ $q \in \mathcal{L}$ y $q \in Cn(\Gamma \cup \{p\})$ entonces $(p \to q) \in Cn(\Gamma)$.

$Cn.8)$ Si $p \in \mathcal{L}$ entonces $Cn(\{p, \neg p\} = \mathcal{L}$.

$Cn.9)$ Si $p \in \mathcal{L}$ entonces $Cn(\{p\}) \cap Cn(\{\neg p\}) = Cn(\emptyset)$.

$Cn.5$ dice que las operaciones de implicación material y negación son cerradas para $\mathcal{L}$; $Cn.6$ es el reflejo de la regla sintáctica del Modus Ponens; $Cn.7$ enuncia el Metateorema de la Deducción para el caso de las disciplinas formalizadas que no contengan fórmulas con variables libres, al igual que $Cn.9$. Así como los axiomas $Cn.6$ y $Cn.7$ caracterizan al condicional material, los últimos dos axiomas caracterizan la negación clásica, ya que $Cn.8$ afirma que, dada una fórmula p de L tal que ella y su negación son consecuencias, entonces el conjunto de las consecuencias de ella y su negación es igual a $\mathcal{L}$, y, $Cn.9$ afirma que la intersección de las consecuencias de una fórmula con las consecuencias de su negación es igual al conjunto de consecuencia del vacío.

Esta línea de investigación se completa con *Foundations of the Calculus of Systems* [Tar56b] art.XII, en cuya primer parte, según las propias palabras de Tarski, se presenta una modificación del cálculo anterior que lo hace ganar en naturalidad y simplicidad. Sobre la base de los conceptos introducidos en [Tar56b] art.III, se toma como primitivo el conjunto de las consecuencias del conjunto vacío, es decir, $Cn(\emptyset)$, que es el conjunto de consecuencias más pequeño que existe y que es un subsistema de cualquier sistema deductivo. Se lo denota por $\top$ y debe ser interpretado como el conjunto de todas las fórmulas lógicamente válidas. Los axiomas son los siguientes, donde $p, q, s \in \mathcal{L}$:

Ax. 1 $card(0) < card(\mathcal{L}) \leq \aleph_0$

Ax. 2' $(\neg p \in \mathcal{L})$ y $((p \to q) \in \mathcal{L})$

Ax. 3' $\top \subseteq \mathcal{L}$

Ax. 4' $((\neg p \to p) \to p \in \top)$, $(p \to (\neg p \to q) \in \top)$, y $(p \to q) \to ((q \to s) \to (p \to s)) \in \top)$.

Ax. 5' Si $p, (p \to q) \in \top$, entonces $q \in \top$

El axioma 4' es una adaptación de los tres axiomas propuestos por Łukasiewicz para su cálculo sentencial ([Tar56b] art.IV, pág.38), y el axioma 5' corresponde a la clausura del conjunto de tautología por la regla de inferencia de *Modus Ponens*.

Lo relevante de esta presentación es que ahora la noción de consecuencia no es tomada como primitiva, sino que puede ser definida a partir de los conceptos primitivos dados. Ella está dada en la def.3 del mencionado trabajo de la siguiente forma:

Para un conjunto arbitrario $A \subseteq \mathcal{L}$ el conjunto $Cn(A)$ consiste en aquellas (y sólo esas) fórmulas de L que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $q \in \top$, o

(ii) existen fórmulas $p_1, p_2, \ldots, p_n \in A$ tal que $(p_1 \wedge p_2 \wedge, \ldots, \wedge p_n) \to q \in \top$

En el trabajo de Tarski se demuestra que la definición anterior se puede dar a través de la siguiente alternativa:

Para un conjunto arbitrario $A \subseteq \mathcal{L}$, el conjunto $Cn(A)$ es la intersección de todos los conjuntos B que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $\top \cup A \subseteq B$

(ii) si $p, (p \to q) \in B$, entonces $q \in B$ (dónde $q \in \mathcal{L}$)

De esta forma $Cn(A)$ es el más pequeño de los conjuntos que contiene a $\top$ y a A y es cerrado para la operación de *Modus Ponens*. En otras palabras $Cn(A)$ es la intersección de todos los conjuntos B que están formados por premisas o leyes lógicas o se obtienen por *Modus Ponens*.

Nótese que en esta presentación, a diferencia de la anterior, la noción de consecuencia ha sido definida mediante una regla de inferencia, en este caso el *Modus Ponens*, acercándose de esta forma a la formulación de la noción de consecuencia sintáctica de Carnap. Lo que Tarski ha definido así no es una noción abstracta, sino la noción específica de consecuencia del cálculo sentencial clásico. No es difícil demostrar que tal noción de consecuencia cumple con los axiomas de la noción abstracta, dados en [Tar56b] art.III.

Retomando el análisis de las nociones abstractas, vale la pena mencionar que Tarski introduce el concepto de *Sistema Deductivo* o *Sistema de Clausura* como el conjunto de fórmulas que contiene todas sus consecuencias, i.e. todo conjunto $A \subseteq \mathcal{L}$ tal que $Cn(A) = A$. El conjunto de todos los sistemas de clausura resulta ser cerrado por intersecciones y permite recuperar la noción de consecuencia lógica. Inversamente, es posible tomar un conjunto arbitrario de conjuntos de fórmulas (cada uno de las cuales se denomina teoría) $\mathcal{C} = \{T_i : i \in I \mid T_i \subseteq \mathcal{L}\}$ tal que $\mathcal{L}$ pertenece al conjunto y que $\mathcal{C}$ es cerrado por intersecciones, y derivar una noción de consecuencia lógica. Desde un punto de vista intuitivo lo que acabamos de decir es que dado un conjunto de teorías $\{T_i\}_{i \in I}$ que describen un estado particular del mundo (o nuestro conocimiento sobre él) entonces decimos que a partir de un conjunto de fórmulas A concluimos una fórmula p (i.e. $p \in Cn(A)$) si y sólo si

$$\forall T_i (A \subseteq T_i \text{ entonces } p \in T_i) \tag{6.1}$$

En el resto de este trabajo generalizaremos estos conceptos para aplicarlos a conjuntos borrosos de fórmulas.

6.2 Operadores de Clausura Borrosos

Las nociones mencionadas en la anterior sección pueden ser extendidas en el sentido borroso. Por ejemplo, Pavelka presenta en [Pav79] la noción de L-Operador de Clausura, donde $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ es

un retículo completo con elemento mínimo 0 y máximo 1, con el objetivo de estudiar las lógicas L-valuadas desde una perspectiva abstracta, en una forma similar a la planteada por Tarski.

En lo que sigue del presente capítulo, $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ denotará el conjunto potencia definido sobre el lenguaje $\mathcal{L}$, y $\mathcal{F}(\mathcal{L})$ será el correspondiente conjunto potencia borroso de dicho lenguaje (i.e. el conjunto $L^{\mathcal{L}}$ de todos los subconjuntos borrosos). Es un resultado bien conocido y sencillo de comprobar que $\mathcal{F}(\mathcal{L})$ es un retículo distributivo completo si L lo es. De aquí en más, tomaremos en consideración sólo el retículo de funciones cuyo dominio está dado sobre el universo $\mathcal{L}$ y cuyo rango corresponde al menos a un retículo completo L con el orden generado por tomar $f, g \in L^{\mathcal{L}}$ $g \preccurlyeq f \Leftrightarrow \forall u \in \mathcal{L} : g(u) \leq f(u)$ y las operaciones en L son trasladadas a $L^{\mathcal{L}}$ en la forma usual.

Definición 6.1 (L-Operador de Clausura) *Un L-Operador de Clausura en un lenguaje $\mathcal{L}$ es una aplicación $\tilde{C} : \mathcal{F}(\mathcal{L}) \longmapsto \mathcal{F}(\mathcal{L})$ satisfaciendo, para todo $A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$, las siguientes propiedades:*

$\tilde{C}1$) *inclusión borrosa: $A \preccurlyeq \tilde{C}(A)$*

$\tilde{C}2$) *monotonía borrosa: Si $A \preccurlyeq B$ entonces $\tilde{C}(A) \preccurlyeq \tilde{C}(B)$*

$\tilde{C}3$) *idempotencia borrosa: $\tilde{C}(\tilde{C}(A)) \preccurlyeq \tilde{C}(A)$.*

Cabe destacar que la noción de inclusión mencionada en la anterior definición corresponde a la asociada con el orden entre conjuntos borrosos y no a la idea de inclusión graduada. Es posible también incluir en este contexto la noción de operador de clausura borroso compacto que se corresponde con la clase de operadores que satisface las propiedades anteriores más:

$\tilde{C}C$) compacidad borrosa: Para todo $A \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$ y para todo $p \in \mathcal{L}$ existe un $B \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$ tal que B tiene soporte finito, $B \preccurlyeq A$ y $\tilde{C}(A)(p) = \tilde{C}(B)(p)$.

Antes de continuar creemos importante presentar la siguiente generalización al caso borroso de un resultado para operadores de clausura clásicos que Tarski presenta en [Tar56b]V.

Teorema 6.1 *Sea $\mathcal{R}$ una subfamilia de conjuntos borrosos que satisfacen la condición: (a) para toda subclase finita $\mathcal{S}$ de $\mathcal{R}$ existe un conjunto borroso A en $\mathcal{R}$ tal que $\bigcup_{B \in \mathcal{S}} B \preccurlyeq A$. Entonces si $\tilde{C}$ es un operador de clausura compacto satisface:*

$$\tilde{C}(\bigcup_{B \in \mathcal{R}} B) = \bigcup_{B \in \mathcal{R}} \tilde{C}(B)$$

Prueba: Supongamos que $\tilde{C}(\bigcup_{B \in \mathcal{R}} B)(p) = \alpha$ con $p \in \mathcal{L}$ y $\alpha \in L$. Luego por compacidad existe un conjunto borroso de soporte finito F tal que $F \sqsubset \bigcup_{B \in \mathcal{R}} B$ y $\tilde{C}(F)(p) = \alpha$. Además podemos suponer que habrá una subclase finita $\mathcal{S}$ que incluya a $F \sqsubseteq \bigcup_{B \in \mathcal{S}} B$. En consecuencia y de acuerdo con la condición (a) del teorema existirá un conjunto borroso $A \in \mathcal{R}$ tal que $\bigcup_{B \in \mathcal{S}} B \preccurlyeq A$. Luego $F \preccurlyeq A$ y por monotonía $\tilde{C}(F) \preccurlyeq \tilde{C}(A)$ y $\tilde{C}(A)(p) \geq \alpha$. Así

$$\tilde{C}(\bigcup_{B \in \mathcal{R}} B) \preccurlyeq \bigcup_{B \in \mathcal{R}} \tilde{C}(B)$$

La desigualdad opuesta es trivial por la monotonía de $\tilde{C}$. □

Corolario 6.1 *Si $\mathcal{R}$ es una cadena $\{X_j\}_{j \in I}$ tal que $\bigcup_{j<i} X_j = X_i$. Entonces*

$$\tilde{C}(X_i) = \bigcup_{j<i} \tilde{C}(X_j)$$

De aquí en adelante, los L-Operadores de Clausura serán llamados *Operadores de Clausura Borrosos*. Ahora permítasenos recordar la noción de Sistema de Clausura y algunas de sus propiedades.

Definición 6.2 (Sistema de Clausura Borroso) *Sea $\mathcal{C} \prec\!\!\sim \mathcal{F}(\mathcal{L})$ una colección no vacía de subconjuntos borrosos de $\mathcal{L}$. Entonces $\mathcal{C}$ será un sistema de clausura borroso en $\mathcal{F}(\mathcal{L})$ si, para cualquier $\mathcal{D} \precsim \mathcal{C}$, $\inf\{T \mid T \in \mathcal{D}\} \in \mathcal{C}$ (i.e. si es cerrado por intersecciones).*

Observación 6.1 *Tomar en cuenta que el conjunto vacío pertenece a todo conjunto C y tomando por convención que al ínfimo de este conjunto le corresponde el conjunto $\mathcal{L}$[1], resulta que $\mathcal{L}$ pertenece a cualquier sistema de clausura.*

Rápidamente podemos verificar que un Sistema de Clausura Borroso C forma un retículo completo $\langle C, \cap, \cup, \mathcal{L}\rangle$ dónde la operación de intersección es definida por el ínfimo en la forma usual

$$\bigcap_{c_i \in C} c_i = \inf_{c_i \in C} c_i$$

y la de unión es definida como:

$$\bigcup_{c_i \in C} c_i = \inf\{t \mid \forall i : c_i \precsim t\}$$

Por otra parte, cualquier sistema de clausura determina, un operador de clausura como es señalado por el siguiente teorema.

Teorema 6.2 *Todo Sistema de Clausura Borroso $\mathcal{C}$ en $\mathcal{F}(\mathcal{L})$ induce un operador de clausura borroso $\tilde{C}$ sobre $\mathcal{F}(\mathcal{L})$ definido como*

$$\tilde{C}_{\mathcal{C}}(A) = \bigwedge\{T \in \mathcal{C} \mid A \precsim T\}$$

Recíprocamente, todo operador de clausura borroso $\tilde{C}$ sobre $\mathcal{F}(\mathcal{L})$ induce un Sistema de Clausura Borroso definido por

$$\mathcal{C}_{\tilde{C}} = \{T \in \mathcal{F}(\mathcal{L}) \mid \tilde{C}(T) = T\}$$

Más aún, esa correspondencia es biyectiva

$$\mathcal{C}_{\tilde{C}_{\mathcal{C}}} = \mathcal{C} \qquad \tilde{C}_{\mathcal{C}_{\tilde{C}}} = \tilde{C}$$

Note que $\mathcal{C}_{\tilde{C}}$ es la clase de los puntos fijos de $\tilde{C}$. Por otra parte, es relativamente sencillo probar que el retículo formado por todos los operadores de L-clausura y el formado por todos los sistemas de L-clausura son dualmente isomorfos bajo la correspondencia $\tilde{C} \longmapsto \mathcal{C}_{\tilde{C}}$ y $\mathcal{C} \longmapsto \tilde{C}_{\mathcal{C}}$.

A partir de las anteriores definiciones es obvio que dada una familia de conjuntos borrosos $\{T_i\}_{i\in I}$, existirá el inf-semiretículo generado por dicha familia, y por lo tanto el mínimo Sistema de Clausura contenido en esa familia. En tal caso, el correspondiente operador de clausura borroso es definido como

$$\tilde{C}(A)(p) = \inf\{T_j(p) \mid T_j \in \{T_i\}_{i\in I}, A \precsim T_j\}.$$

En particular, notemos que, dada una función de similitud S, podemos ver que la familia $\Theta_S = \{\tilde{\omega}\}_{\omega\in\Omega}$ (i.e. cada $\tilde{\omega}$ esta asociada a una valuación booleana del lenguaje $\mathcal{L}$ a través de la relación borrosa S de la forma $\tilde{\omega}(p) = \sup_{\omega' \models p} S(\omega, \omega')$, la cual a su vez es equivalente al $p^\star(\omega)$ presentado en el Capítulo 2), define un operador de clausura borroso

$$\tilde{C}_{\Theta_S}(A)(p) = \inf\{\tilde{\omega}_i(p) \mid \tilde{\omega}_i \in \{\tilde{\omega}\}_{\omega\in\Omega} \text{ y } A \precsim \tilde{\omega}_i\}$$

Este operador puede verse como una generalización natural para conjuntos borrosos del operador de inferencia aproximada dado en el Capítulo 2, si tomamos en cuenta el siguiente resultado:

[1] Algunos autores no asumen esta comodidad y requieren en la definición de sistema de clausura que contenga al conjunto $\mathcal{L}$

Proposición 6.1 *Dada una función de similitud S que satisface la propiedad de separación. Entonces para todo conjunto $A \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$ resulta que*

$$\tilde{C}_{\Theta_S}(A)(p) = \inf_{\omega \models A} \sup_{\omega' \models p} S(\omega, \omega')$$

Prueba: Para demostrarlo sólo hace falta notar que $A \preccurlyeq \tilde{\omega}_i$ si y sólo si $\inf_{q \in A} \tilde{\omega}_i(q) = 1$ y que por la propiedad de separación es equivalente a que $\omega_i \models q$ □

Además de las nociones de operador de clausura borroso y de sistema de clausura borroso, en [CTC94], se presenta una noción de Relación de Consecuencia Borrosa que está asociada a esas dos nociones precedentes de Sistema y Operador.

Definición 6.3 (Relación de Consecuencia Borrosa) *Cualquier relación borrosa $\tilde{g} : \mathcal{F}(\mathcal{L}) \times \mathcal{L} \longmapsto L$ será una relación de consecuencia borrosa si la misma satisface las siguientes tres propiedades para todo par de elementos $A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$ y para todo par de fórmulas $p, q \in \mathcal{L}$:*

$\tilde{g}1$) *reflexividad borrosa:* $A(p) \leq \tilde{g}(A, p)$

$\tilde{g}2$) *monotonía borrosa: Si $B \preccurlyeq A$ entonces $\tilde{g}(B, p) \leq \tilde{g}(A, p)$*

$\tilde{g}3$) *Corte borroso: $\tilde{g}(A \cup [A \bowtie C], p) \leq \tilde{g}(A, p)$*

donde $C \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$ y $[A \bowtie C](q) = \tilde{g}(A, q)$ si $q \in C$ y 0 en cualquier otro caso.

La expresión $\tilde{g}(A, p) = \lambda$, con $\lambda \in L$, deberá ser leída como "p es una consecuencia de A en al menos grado λ". La propiedad de Corte borroso es una generalización de la clásica, que como se dijo responde a la idea de que si de un conjunto de fórmulas A se deducen las fórmulas de otro conjunto C y de la unión de ambos se deduce otro fórmula p (i.e. $A \cup C \vdash p$) entonces dicha fórmula se deduce directamente de A. Nótese en particular que cuando en la última condición consideramos el caso $C = \mathcal{L}$ entonces esa versión de Corte pasa a enunciar una noción de idempotencia sobre la relación $\tilde{g}$, puesto que para todo $q \in C$ resulta $[A \bowtie \mathcal{L}](q) = \tilde{g}(A, q)$. En nuestra opinión, la formulación propuesta por Castro et al. para Corte borroso no refleja claramente la idea de extensión natural de la clásica, por eso propondremos la siguiente alternativa y probamos que son equivalentes:

Proposición 6.2 *Dado una relación borrosa $\tilde{g} : \mathcal{F}(\mathcal{L}) \times \mathcal{L} \longmapsto L$ que satisface las condiciones $\tilde{g}1$ y $\tilde{g}2$. Entonces las siguientes propiedades son equivalente para todo $A, B2 \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$ y $B1 \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$:*

1. *$\tilde{g}3$: $\tilde{g}(A \cup [A \bowtie B1], p) \leq \tilde{g}(A, p)$*
2. *$\tilde{g}'3$: Si para todo p, $B2(p) \leq \tilde{g}(A, p)$, entonces para todo q, $\tilde{g}(A \cup B2, q) \leq \tilde{g}(A, q)$*

Prueba:

1 $\Longrightarrow$ 2) Asumamos la condición *1* y que para todo p, $B2(p) \leq \tilde{g}(A, p)$. De esto último resulta que si p está en $B2_\alpha$ (el α-corte de $B2$) entonces $\alpha \leq \tilde{g}(A, p)$ y así podemos concluir que $B2_\alpha \preccurlyeq [A \bowtie B2_\alpha]$. De esta observación resulta que:

$$A \cup B2 = A \cup \bigwedge_{\lambda \in L} \lambda \vee B2_\lambda \preccurlyeq A \cup \bigwedge_{\lambda \in L} \lambda \vee [A \bowtie B2_\lambda] = \bigwedge_{\lambda \in L} \lambda \vee (A \cup [A \bowtie B2_\lambda])$$

Consideremos ahora el conjunto borroso $\hat{g}(A)$ asociado a cualquier otro conjunto borroso A definido por una relación de consecuencia de la siguiente forma: $\hat{g}(A)(p) = \tilde{g}(A, p)$. Entonces, aplicando la propiedad reflexiva resulta que $(A \cup [A \bowtie B2_\lambda])$ está estrictamente incluido en $\hat{g}((A \cup [A \bowtie B2_\lambda]))$ y aplicando a ambos lados de la desigualdad la relación de consecuencia $\tilde{g}$, obtenemos que

$$\tilde{g}(A \cup B2, q) \leq \tilde{g}((\bigwedge_{\lambda \in L} \lambda \vee \hat{g}(A \cup [A \bowtie B2_\lambda])), q)$$

Debido a la propiedad *1* resulta que la última expresión es menor o igual a:

$$\tilde{g}((\bigwedge_{\lambda\in L} \lambda \vee \hat{g}(A)), q) = \tilde{g}(A, q)$$

2 $\Longrightarrow$ *1*) En este caso sólo basta tomar $B2 = [A \bowtie B1]$. Obviamente $B2(p) \leq \tilde{g}(A, p)$ para todo $p \in \mathcal{L}$. Luego aplicando *2* resulta que $\tilde{g}(A \cup B2, q) \leq \tilde{g}(A, q)$ y reemplazando allí $B2$ por $[A \bowtie B1]$ obtenemos lo buscado.

□

En la próxima sección se apreciará con mayor claridad la razón de este axioma alternativo pero equivalente, puesto que buscaremos capturar una clase especial de operadores de clausura y ellos resultarán a partir de una inmediata generalización del axioma $\tilde{g}3$ de Corte borroso.

La noción de relación de consecuencia suele estar asociada a la idea de prueba y por lo tanto a la finitud (por aquello de la secuencia finita que me permite llegar a la prueba de una fórmula). Con esa motivación suele definirse la subclase de relaciones de consecuencia borrosa compactas como aquellas que satisfacen las tres propiedades anteriores más:

$\tilde{g}4$) compacidad borrosa: Para todo $A \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$ y para todo $p \in \mathcal{L}$

$$\tilde{g}(A, p) \leq \sup_{\substack{A' \leq A \\ A' \text{ es finito}}} \tilde{g}(A', p)$$

Es sencillo demostrar que las relaciones de consecuencia borrosas compactas satisfacen una versión mas simplificada (pero equivalente en este caso) de la propiedad de Corte expresada como:

$\tilde{g}_f3$) corte finito: Para todo $A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$ donde B es soporte finito y para todo $p \in \mathcal{L}$, si $B \preccurlyeq A$ entonces $\tilde{g}(A \cup B, p) \leq \tilde{g}(A, p)$

En [CTC94] se prueba el siguiente resultado: si $\tilde{C}$ y $\tilde{g}$ son un operador de clausura y una relación de consecuencia, respectivamente, satisfaciendo la ecuación $\tilde{C}(A)(p)$=$\tilde{g}(A, p)$, entonces $\tilde{C}$ es un operador de clausura borroso si y sólo si $\tilde{g}$ es una relación de consecuencia borrosa. Más aún, el operador de clausura es compacto si y sólo si la relación de consecuencia lo es.

Estas tres nociones (al igual que las introducidas originalmente por Tarski) son completamente generales y no tiene en cuenta que el álgebra de conjuntos difusos puede ser más rica y que podemos obtener interesantes operadores fijando comportamiento sobre las operaciones de dicha estructura. A partir de aquí desarrollaremos una presentación que irá teniendo en cuenta esa estructura interna en forma similar a la que realizara Tarski en el caso clásico.

6.3 Operadores de Clausura Implicativos

En ([Cha88]), Chakraborty extiende el concepto de relación de consecuencia clásica definiendo una noción graduada del mismo sobre el conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ de la siguiente manera.

Definición 6.4 (Relación de Consecuencia Graduada) *Una relación borrosa* $g_c : \mathcal{P}(\mathcal{L}) \times \mathcal{L} \longmapsto L$ *es llamada una Relación de Consecuencia Graduada si, para todo par de conjuntos* $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$ *y para toda fórmula* $p, q \in \mathcal{L}$, g_c *satisface:*

g_c1) *reflexividad borrosa:* $g_c(A, p) = 1$ *para todo* $p \in A$.

g_c2) *monotonía borrosa: Si* $B \preccurlyeq A$ *entonces* $g_c(B, p) \leq g_c(A, p)$.

g_c3) *corte borroso:* $(\inf_{q\in B} g_c(A, q)) \otimes g_c(A \cup B, p) \leq g_c(A, p)$, *donde* $\otimes$ *es una t-norma en el retículo* L.

Castro et al. prueban en [CTC94] que, si $\otimes = \min$, entonces cada α-corte de g_c es una relación de consecuencia clásica. Pero esa afirmación no es cierta en el caso general tal como fue demostrado por Castro en [Cas94]. El resultado mencionado en el caso que $\otimes = \min$, fue completado en [Ger96], por Gerla al probar que la familia de Relaciones de Consecuencia Graduada corresponde a la subclase de operadores de clausura definidos por Pavelka que además satisfacen que sus α-cortes son operadores de clausura clásicos. Tal resultado fue enunciado de la siguiente forma:

Teorema 6.3 *([Ger96]) Una relación $g_c : \mathcal{P}(\mathcal{L}) \times \mathcal{L} \longmapsto L$ es una relación de consecuencia graduada que satisface las propiedades $g_c1 - g_c3$ si y sólo si existe un operador de clausura borroso $\tilde{C}$ tal que $g_c(A,p) = \tilde{C}(A)(p)$ y que puede ser definido a partir de una cadena continua de operadores de clausura clásicos $\{\tilde{C}_\lambda\}_{\lambda \in L}$[2] de la siguiente manera:*

$$\tilde{C}(A)(p) = \sup\{\lambda \mid p \in \tilde{C}_\lambda(A_\lambda)\} \tag{6.2}$$

donde A_λ indica el λ-corte del conjunto borroso A.

Es sencillo verificar que el operador propuesto en el anterior teorema es uno de clausura borroso y que los elementos de la cadena corresponden a sus α-cortes.

En este capítulo estamos interesados en una generalización de tales relaciones graduadas con el fin de definirlas sobre conjuntos borrosos de fórmulas. Para ello será necesario tomar en consideración no sólo el operador t-norma sino también su residuo, y en tal sentido extenderemos la noción de retículo $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ a una de BL-álgebra completa.

En este contexto una nueva clase de relaciones de consecuencia borrosas que serán denominadas *Relaciones de Consecuencia Implicativas*, puede ser introducida utilizando el operador de implicación $\to$ de L de la siguiente forma

Definición 6.5 (Relación de Consecuencia Implicativa) *Una relación borrosa $\tilde{g}_c : \mathcal{F}(\mathcal{L}) \times \mathcal{L} \longmapsto L$ es llamada una Relación de Consecuencia Implicativa si, para todo par de conjuntos borrosos $A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$ y para todo par de fórmulas $p, q \in \mathcal{L}$, $\tilde{g}_c$ satisface las siguientes propiedades:*

$\tilde{g}_c1$) *reflexividad borrosa:* $A(p) \leq \tilde{g}_c(A,p)$

$\tilde{g}_c2$) *monotonía borrosa : Si $B \preccurlyeq A$ entonces $\tilde{g}_c(B,p) \leq \tilde{g}_c(A,p)$*

$\tilde{g}_c3$) *corte borroso:* $[\inf_{q \in \mathcal{L}}(B(q) \to \tilde{g}_c(A,q))] \otimes \tilde{g}_c(A \cup B, p) \leq \tilde{g}_c(A,p)$[3]

Note que la expresión $\inf_{q \in \mathcal{L}}(B(q) \to \tilde{g}_c(A,q))$ corresponde a la formulación usual del grado de inclusión entre los conjuntos borrosos B y $\tilde{g}_c(A, \ldots)$. Teniendo en cuenta esta observación, es sencillo probar que las Relaciones de Consecuencia Graduadas son un caso particular de Relaciones de Consecuencia Implicativas. De hecho, la principal diferencia radica en que éstas últimas utilizan una noción de inclusión borrosa graduada en lugar de una estricta, para dar cuenta de la propiedad de corte.

Además, las Relaciones de Consecuencia Implicativas también poseen una caracterización en términos de teorías (o como los llama Tarski: sistemas deductivos) la cual es una generalización de una presentada en [Cha88] para Relaciones de Consecuencia Graduadas.

Teorema 6.4 *Una relación borrosa $\tilde{g}_c : \mathcal{F}(\mathcal{L}) \times \mathcal{L} \longmapsto L$ es una Relación de Consecuencia Implicativa si, y sólo si, existe una familia de conjuntos borrosos $\{T_i\}_{i \in I}$ satisfaciendo que*

$$\tilde{g}_c(A,p) = \inf_i \{[\inf_{q \in \mathcal{L}} A(q) \to T_i(q)] \to T_i(p)\}$$

[2]Se dice que una familia $\{C_\lambda\}_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de un universo $\mathcal{U}$ es una cadena continua si satisface las siguientes propiedades:

a) $C_0 = \mathcal{U}$ *b)* $C_\mu = \bigcap_{\lambda < \mu} C_\lambda$ para todo $\mu \in L$

[3]Esta propiedad puede también ser enunciada como $\tilde{g}_c(A \cup B, p) \leq (\inf_{q \in \mathcal{L}}(B(q) \to \tilde{g}_c(A,q))) \to \tilde{g}_c(A,p)$

Prueba: Primero consideremos el caso en que la familia $\{T_i\}_{i\in I}$ está dada y probemos que $\tilde{g}_c$ satisface las propiedades de una relación de consecuencia borrosa.

$\tilde{g}_c1$) Debido a la definición de residuo se satisface que todo $p \in \mathcal{L}$: $(A(p) \to T(p)) \to T(p) \geq A(p)$. Entonces $\tilde{g}_c(A,p) \geq \inf_i((A(p) \to T_i(p)) \to T_i(p)) \geq A(p)$

$\tilde{g}_c2$) Estos es obvio usando la propiedad de que el residuo es una función no creciente en su primer argumento.

$\tilde{g}_c3$) Puesto que

$$(A \sqsubseteq_\otimes B) \wedge (C \sqsubseteq_\otimes D) \Rightarrow A \cup C \sqsubseteq_\otimes B \cup D$$

es válida para cualquier continua T-norma $\otimes$ y para todo conjunto borroso A, B, C. Entonces

$$(\inf_{q\in\mathcal{L}} A(q) \to T_i(q)) \wedge (\inf_{q\in\mathcal{L}} C(q) \to T_i(q)) \leq (\inf_{q\in\mathcal{L}} (A \cup C)(q) \to T_i(q))$$

De nuevo, dado el residuo es no creciente en su primer argumento entonces:

$$((\inf_{q\in\mathcal{L}} A(q) \to T_i(q)) \wedge (\inf_{q\in\mathcal{L}} C(q) \to T_i(q))) \to T_i(p) \geq (\inf_{q\in\mathcal{L}} (A \cup C)(q) \to T_i(q)) \to T_i(p)$$

Puesto que estamos trabajando con t-normas continuas, estas satisfacen que: $A \wedge B = A \otimes (A \to B)$. Por lo tanto sustituyendo en la última expresión, obtenemos:

$$((\inf_{q\in\mathcal{L}} A(q) \to T_i(q)) \otimes ((\inf_{q\in\mathcal{L}} A(q) \to T_i(q)) \to (\inf_{q\in\mathcal{L}} C(q) \to T_i(q)))) \to T_i(p) \geq (\inf_{q\in\mathcal{L}} (A \cup C)(q) \to T_i(q)) \to T_i(p)$$

Además, como $(A \otimes B) \to C = A \to (B \to C)$, entonces:

$$((\inf_{q\in\mathcal{L}} A(q) \to T_i(q)) \to (\inf_{q\in\mathcal{L}} C(q) \to T_i(q))) \to ((\inf_{q\in\mathcal{L}} A(q) \to T_i(q)) \to T_i(p)) \geq ((\inf_{q\in\mathcal{L}} (A \cup C)(q) \to T_i(q)) \to T_i(p))$$

Dado que $\otimes$ y $\to$ son un par residuado, resulta que:

$$((\inf_{q\in\mathcal{L}} A(q) \to T_i(q)) \to T_i(p)) \geq ((\inf_{q\in\mathcal{L}} (A \cup C)(q) \to T_i(q)) \to T_i(p)) \otimes ((\inf_{q\in\mathcal{L}} A(q) \to T_i(q)) \to (\inf_{q\in\mathcal{L}} C(q) \to T_i(q)))$$

Finalmente, tenemos que

$$((\inf_{q\in\mathcal{L}} A(q) \to T_i(q)) \to (\inf_{q\in\mathcal{L}} C(q) \to T_i(q))) = \inf_r (C(r) \to ((\inf_{q\in\mathcal{L}} A(q) \to T_i(q)) \to T_i(r)))$$

y tomado ínfimos sobre el subíndice i en ambos lados de la igualdad, obtenemos lo buscado.

b) Para probar la dirección opuesta, supondremos que la relación $\tilde{g}_c$ ha sido dada y que tomemos en consideración la familia de conjuntos borrosos dados por $\{T_D\}_{D\in\mathcal{F}(\mathcal{L})}$ con $T_D(p) = \tilde{g}_c(D,p)$. Ahora deberemos probar que:

$$\tilde{g}_c(A,p) = \inf_{D\in\mathcal{F}(\mathcal{L})} \{\inf_{q\in\mathcal{L}} (A(q) \to T_D(q)) \to T_D(p)\}$$

Puesto que $\tilde{g}_c(A)$ pertenece a $\mathcal{F}(\mathcal{L})$ y $\tilde{g}_c$ resulta idempotente, es claro que $\tilde{g}_c(A,p)$ es más grande o igual a nuestra definición.
Por otra parte dado que $\tilde{g}_c$ satisface la propiedad de corte borroso, resulta que:

$$\tilde{g}_c(A \cup D, p) \otimes \inf_{q\in\mathcal{L}} (A(q) \to \tilde{g}_c(D,q)) \leq \tilde{g}_c(D,p)$$

Por lo tanto:

$$\tilde{g}_c(A \cup D, p) \leq \inf_{q\in\mathcal{L}} (A(q) \to \tilde{g}_c(D,q)) \to \tilde{g}_c(D,p)$$

Pero, por la propiedad de reflexividad borrosa de $\tilde{g}_c$ y tomando ínfimos sobre $D \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$ en la última inecuación,

Así resulta que:

$$\tilde{g}_c(A,p) \leq \inf_{D\in\mathcal{F}(\mathcal{L})}\{\inf_{q\in\mathcal{L}}(A(q) \to \tilde{g}_c(D,q)) \to \tilde{g}_c(D,p)\}$$

□

Los conjuntos borrosos $\{T_i\}_{i\in I}$ que definen las Relaciones de Consecuencia Implicativa $\tilde{g}_c$, en el sentido del teorema anterior, serán llamados *generadores* de $\tilde{g}_c$. La intuición detrás del anterior teorema es bastante simple y esencialmente podría verse como una generalización de la definición clásica mencionada en 6.1, considerando ahora que tanto nuestras teorías $\{T_i\}_{i\in I}$ como nuestro conjunto de fórmulas A son conjuntos borrosos y que consecuentemente las relaciones de inclusión y de pertenencia ahora son graduadas. En tal sentido la nueva lectura de 6.1 será: el grado de inclusión de A en una teoría T_i condicionará la relevancia con la que el grado en que p pertenece a una T_i determina el grado en que de A se concluye p. Como ejemplo podemos considerar, dada una función de aproximación R, a la familia de teorías $\Theta_R = \{\tilde{\omega}\}_{\omega\in\Omega}$, que define un operador de clausura borroso usando el anterior teorema

$$\tilde{g}_{c_{\Theta_R}}(A,q) = \inf_{\omega\in\Omega}\{[\inf_{p\in\mathcal{L}} A(p) \to \tilde{\omega}(p)] \to \tilde{\omega}(q)\}$$

Rápidamente se puede ver que $\tilde{g}_{c_{\Theta_R}}(p,q) = J_{R,\top}(q \mid p) = I_R(q \mid p)$ y así describimos las relaciones de consecuencia aproximada para pares de fórmulas. Para describir a las relaciones de consecuencia de proximidad sólo hace falta tomar en consideración a la familia de conjuntos borroso $\Theta_{R,T} = \{\tilde{\omega}\}_{\omega\models T}$, para a el subconjunto $T \subseteq \mathcal{L}$, y en ese caso resulta que $\tilde{g}_{c_{\Theta_{R,T}}}(p,q) = J_{R,T}(q \mid p)$, representa las relaciones buscadas. En el caso general en que consideremos un conjunto de fórmulas y no tan sólo una fórmula, la relación no se verifica inmediatamente. Por un lado ya vimos en la sección anterior que las relaciones de consecuencia aproximada se corresponden con aquellas que satisfacen la propiedad de corte basada en una inclusión estricta. En el otro caso resulta que si A es un conjunto clásico

$$\tilde{g}_{c_{\Theta_{R,T}}}(A,q) = \inf_{\omega\models T}\{\inf_{p\in A} \tilde{\omega}(p) \otimes\!\to \tilde{\omega}(q)\}$$

que es en general menos específica que la relación de proximidad expresada como

$$J_{R,T}(q \mid A) = \inf_{\omega\models T}\{I_R(A \mid \omega) \otimes\!\to I_R(q \mid \omega)\}$$

dado que $\inf_{p\in A} \tilde{\omega}(p) \geq I_R(A \mid \omega) = A^*(\omega)$. En la misma línea de análisis podemos pensar en aplicar la relación $\tilde{g}_{c_{\Theta_{R,T}}}$ al conjunto borroso A^* (generado a partir del conjunto clásico A y la relación de aproximación R). En ese caso resulta que:

$$\tilde{g}_{c_{\Theta_{R,T}}}(A^*,q) = \inf_{\omega\models T}\{\inf_{p\in\mathcal{L}}\{A^*(p) \otimes\!\to \tilde{\omega}(p)\} \otimes\!\to \tilde{\omega}(q)\}$$

Notemos que podemos considerar como una generalización natural, usando la relación R, de la bien conocida condición clásica $\omega \in [A]$ si y sólo si $A \preccurlyeq T_\omega$ (donde T_ω corresponde con el conjunto de fórmulas válidas en el mundo ω), a la siguiente:

$$[A]^*(\omega) = \inf_{p\in\mathcal{L}}\{A^*(p) \otimes\!\to \tilde{\omega}(p)\}$$

ya que el término de la izquierda representa un grado de pertenencia y el de la izquierda un grado inclusión. Así, resulta que $\tilde{g}_{c_{\Theta_{R,T}}}(A^*,q) = J_{R,T}(q \mid A)$. Bajo este supuesto, recuperaríamos la relación de similitud tomando $A^* = \tilde{\omega}'$ y definiendo:

$$R(\omega,\omega') = \inf_{p\in\mathcal{L}}\{\tilde{\omega}'(p) \otimes\!\to \tilde{\omega}(p)\}$$

que tiene una apariencia muy similar a la utilizada en el capítulo anterior para construir el modelo canónico. También recuperamos la definición original para

$$A^*(p) = \inf_{\omega' \models p} \sup_{\omega \models A} R(\omega, \omega')$$

Volviendo al caso general, a partir del Teorema 6.4 es fácil deducir que cualquier Relación de Consecuencia Implicativa satisface la siguiente propiedad adicional que denominaremos $\otimes$-distributividad:

$\tilde{g}4$) $\tilde{g}_c(A \otimes \bar{k}, p) \geq \tilde{g}_c(A, p) \otimes k$,

donde $\bar{k}$ es el conjunto borroso constante tal que para cualquier elemento del lenguaje $\mathcal{L}$ pertenece a él con valor igual a k.

Prueba: Dada una relación de consecuencia borrosa $\tilde{g}_c$, debido al Teorema 6.4 sabemos que existe una familia de conjuntos borrosos de manera que:

$$\tilde{g}_c(A, p) = \inf_i \{(\inf_{q \in \mathcal{L}} A(q) \to T_i(q)) \to T_i(p)\}$$

Si aplicamos esa definición para obtener las consecuencias de $A \otimes \bar{k}$ entonces resultará que:

$$\tilde{g}_c(A \otimes \bar{k}, p) = \inf_i \{(\inf_{q \in \mathcal{L}} (A \otimes \bar{k})(q) \to T_i(q)) \to T_i(p)\} =$$

$$\inf_i \{\bar{k} \to (\inf_{q \in \mathcal{L}} A(q) \to T_i(q)) \to T_i(p)\}$$

y dado que, en una BL-álgebra, es válido que $(K \to A) \to B \geq K \otimes (A \to B)$ resulta lo buscado. $\square$

A su vez, el Operador de Clausura Borroso asociado a una Relación de Consecuencia Borrosa y al cual denominaremos *Operador de Clausura Implicativo*, satisface, además de las propiedades $\tilde{C}1, \tilde{C}2$ y $\tilde{C}3$, la siguiente

$\tilde{C}4_{\otimes}$) $\tilde{C}_c(A) \otimes \bar{k} \preccurlyeq \tilde{C}_c(A \otimes \bar{k})$.

Esta propiedad $\tilde{C}4_{\otimes}$ fue mencionada por Gerla in [Ger96] para el caso en que A es a conjunto clásico y $\otimes = \min$ y corresponde a la idea de que tomar la consecuencia de un conjunto A "k-truncado" da "mas información" que tomar las consecuencias primero y truncar después. Curiosamente si $\tilde{C}_c$ es un operador de clausura y $\otimes$ es una t-norma continua entonces $\tilde{C}4_{\otimes}$ es equivalente a:

$\tilde{C}4_{\otimes\to}$) $\tilde{C}_c(\bar{k} \otimes\to A) \preccurlyeq \bar{k} \otimes\to \tilde{C}_c(A)$.

Prueba:

$\tilde{C}4_{\otimes} \Longrightarrow \tilde{C}4_{\otimes\to}$) Puesto que para el caso de t-normas continuas se satisface que $\bar{k} \wedge A = \bar{k} \otimes (\bar{k} \otimes\to A)$, resulta que $\bar{k} \otimes (\bar{k} \otimes\to A) \preccurlyeq A$. Lo que por propiedad de monotonía implica que $\tilde{C}_c(\bar{k} \otimes (\bar{k} \otimes\to A)) \preccurlyeq \tilde{C}_c(A)$. Aplicando $\tilde{C}4_{\otimes}$ resulta que $\bar{k} \otimes \tilde{C}_c(\bar{k} \otimes\to A) \preccurlyeq \tilde{C}_c(A)$, que por residuación se convierte en $\tilde{C}_c(\bar{k} \otimes\to A) \preccurlyeq \bar{k} \otimes\to \tilde{C}_c(A)$.

$\tilde{C}4_{\otimes\to} \Longrightarrow \tilde{C}4_{\otimes}$) Puesto que $\bar{k} \otimes A \preccurlyeq \bar{k} \otimes A$ y por lo tanto que $A \preccurlyeq \bar{k} \otimes\to (\bar{k} \otimes A)$, aplicando monotonía obtenemos que: $\tilde{C}_c(A) \preccurlyeq \tilde{C}_c(\bar{k} \otimes\to (\bar{k} \otimes A))$. Por propiedad $\tilde{C}4_{\otimes\to}$ resulta que $\tilde{C}_c(A) \preccurlyeq \bar{k} \otimes\to \tilde{C}_c(\bar{k} \otimes A)$, lo que por residuación termina en $\bar{k} \otimes \tilde{C}_c(A) \preccurlyeq \tilde{C}_c(\bar{k} \otimes A)$.

$\square$

Nótese que si consideramos que $\tilde{C}4_{\otimes\to}$ enuncia un comportamiento de los operadores de clausura respecto de los "k-estiramientos", la anterior equivalencia establece que existe cierta dualidad de los operadores de clausura implicativos respecto a su comportamiento frente "k-truncamientos" y "k-estiramientos".

A lo largo de este capítulo mostraremos que los operadores de clausura implicativos son una familia importante y significativa de operadores. Por ejemplo, los operadores de clausura definidos por 6.2 pertenecen a esta familia tal como demostraremos a continuación.

Proposición 6.3 *Sea $\{\tilde{C}_\lambda\}_{\lambda\in L}$ una cadena de operadores de consecuencia clásicos. Entonces el operador borroso:*

$$\tilde{C}(A)(p) = \sup\{\lambda \mid p \in \tilde{C}_\lambda(A_\lambda)\}$$

es un operador de clausura implicativo con respecto a la t-norma min.

Prueba: En [Ger96] se prueba que este operador es un operador de clausura borroso. Por lo tanto sólo es necesario probar que satisface la propiedad $\tilde{C}4_\otimes$ para $\otimes = \wedge$. Primero notemos que el λ-corte de $(A \wedge \bar{k})$ es $(A \wedge \bar{k})_\lambda = A_\lambda$ si $k \geq \lambda$ y el conjunto vacío $\emptyset$ en cualquier otro caso. Luego aplicando el operador $\tilde{C}$ a $A \wedge \bar{k}$ resulta:

$$\tilde{C}(A \wedge \bar{k})(p) = \sup\{\lambda \mid p \in \tilde{C}_\lambda((A \wedge \bar{k})_\lambda)\}$$

lo cual es igual a

$$\sup\{\lambda \mid p \in \tilde{C}_\lambda(A_\lambda) \text{ si } k \geq \lambda\} \vee \sup\{\lambda \mid p \in \tilde{C}_\lambda(\emptyset) \text{ si } \lambda > k\}$$

Luego si $\exists\lambda > k$ tal que $p \in \tilde{C}_\lambda(\emptyset)$ entonces:

$$\tilde{C}(A \wedge \bar{k})(p) = \sup\{\lambda \mid p \in \tilde{C}_\lambda(\emptyset) \text{ si } k < \lambda\} > k \geq \tilde{C}(A)(p) \wedge \bar{k}$$

En el otro caso, i.e. si $\nexists\lambda > k$ tal que $p \in \tilde{C}_\lambda(\emptyset)$ entonces $\sup\{\lambda \mid p \in \tilde{C}_\lambda(\emptyset) \text{ si } k < \lambda\} = 0$ y así resulta que en este caso:

$$\tilde{C}(A \wedge \bar{k})(p) = \sup\{\lambda \mid p \in \tilde{C}_\lambda(A_\lambda) \text{ si } k \geq \lambda\} = \tilde{C}(A)(p) \wedge \bar{k}$$

□

Como consecuencia de la anterior demostración tenemos estos operadores tienen la siguiente característica.

Corolario 6.2 *Si $\tilde{C}$ es un operador de clausura definido por 6.2 entonces $\tilde{C}$ es un operador de clausura borroso tal que*

$$\tilde{C}(A \wedge \bar{k}) = (\tilde{C}(A) \wedge \bar{k}) \vee \tilde{C}(\emptyset)$$

para todo $A \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$ y $k \in L$.

Prueba: Tal como fue presentado en la anterior demostración:

$$\tilde{C}(A \wedge \bar{k})(p) = \sup\{\lambda \mid p \in \tilde{C}_\lambda(A_\lambda) \text{ si } k \geq \lambda\} \vee \sup\{\lambda \mid p \in \tilde{C}_\lambda(\emptyset) \text{ si } \lambda > k\}$$

Como $\sup\{\lambda \mid p \in \tilde{C}_\lambda(A_\lambda) \text{ si } k \geq \lambda\} = \tilde{C}(A)(p) \wedge \bar{k}$ y puesto que $\sup\{\lambda \mid p \in \tilde{C}_\lambda(A_\lambda) \text{ si } k \geq \lambda\} \geq \sup\{\lambda \mid p \in \tilde{C}_\lambda(\emptyset) \text{ si } k \geq \lambda\}$, entonces reemplazando en la anterior expresión obtenemos lo buscado. □

Quedará pendiente determinar si esa propiedad junto con $\tilde{C}1$, $\tilde{C}2$ y $\tilde{C}3$ dan una caracterización completa de esa clase de operadores.

Volviendo al caso general de operadores implicativos, el siguiente resultado presenta una caracterización de los mismos.

Teorema 6.5 *Sea $\tilde{C}_c$ y $\tilde{g}_c$ un operador de clausura y una relación de consecuencia manteniendo la siguiente interdependencia $\tilde{C}_c(A)(p) = \tilde{g}_c(A,p)$. Entonces $\tilde{C}_c$ satisface $\tilde{C}1-\tilde{C}4_{\otimes}$ (equivalentemente $\tilde{C}1-\tilde{C}4_{\ \otimes\!\!\rightarrow}$) si, y sólo si, $\tilde{g}_c$ es una Relación de Consecuencia Implicativa, i.e. si satisface las propiedades $\tilde{g}_c1-\tilde{g}_c3$.*

Prueba: Sólo es necesario probar que $\tilde{C}1$-$\tilde{C}4_{\otimes}$ implica $\tilde{g}_c3$ y que $\tilde{C}3$ es deducible de $\tilde{g}_c1$-$\tilde{g}_c3$. Para el primer caso es importante señalar que la propiedad: $(B \sqsubseteq_{\otimes} C) \leq (B \cup A \sqsubseteq_{\otimes} C \cup A)$ es válida en toda BL-álgebra. En particular tomando $C = \tilde{C}_c(A)$ tenemos que:

$$\inf_{q\in\mathcal{L}}(B(q) \to \tilde{C}_c(A)(q)) \leq \inf_{q\in\mathcal{L}}((B \cup A)(q) \to (\tilde{C}_c(A) \cup A)(q))$$

Puesto que $(\tilde{C}_c(A) \cup A) = \tilde{C}_c(A)$ resulta que:

$$\inf_{q\in\mathcal{L}}(B(q) \to \tilde{C}_c(A)(q)) \leq (B \cup A)(p) \to (\tilde{C}_c(A))(p)$$

lo cual es equivalente a:

$$(\inf_{q\in\mathcal{L}}(B(q) \to \tilde{C}_c(A)(q))) \otimes (B \cup A)(p) \leq \tilde{C}_c(A)(p)$$

Luego aplicando sucesivamente las propiedades $\tilde{C}2$, $\tilde{C}4_{\otimes}$ y $\tilde{C}3$ (en ese orden) obtenemos lo buscado en primer término.

En el segundo caso, es suficiente aplicar la propiedad de corte borroso al conjunto borroso $B = \tilde{g}_c(A)$ (i.e. el conjunto borroso definido como $\tilde{g}_c(A)(p) = \tilde{g}_c(A,p)$). Así

$$[\inf_{q\in\mathcal{L}}(\tilde{g}_c(A,q) \to \tilde{g}_c(A,q))] \otimes \tilde{g}_c(A \cup \tilde{g}_c(A)),p) \leq \tilde{g}_c(A,p)$$

El grado de inclusión será igual a 1 y la unión entre A y sus consecuencias por reflexividad es equivalente al conjunto borroso de consecuencias y por lo tanto queda expresada la idempotencia. □

A esta altura podríamos cuestionarnos acerca de la intuición detrás de $\tilde{C}4_{\otimes}$ (o equivalentemente de $\tilde{C}4_{\ \otimes\!\!\rightarrow}$). Para aclarar este punto permitamos introducir una nueva clase de operadores de clausura cuyo nombre es elegido para ser coherentes con la definición dada por Jacas, de la cual hablaremos en la sección 5.

Definición 6.6 (Operador de Clausura $\otimes$-Extensional) *Una aplicación en un lenguaje $\mathcal{L}$ del tipo $\tilde{C}_e : \mathcal{F}(\mathcal{L}) \longmapsto \mathcal{F}(\mathcal{L})$ es un Operador de Clausura $\otimes$-Extensional, si para todo $A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$, satisface las siguientes propiedades:*

$\tilde{C}1$) *inclusión borrosa:* $A \preccurlyeq \tilde{C}_e(A)$

$\tilde{C}2$) *$\otimes$-extensionalidad:* $(A \sqsubseteq_{\otimes} B) \leq (\tilde{C}_e(A) \sqsubseteq_{\otimes} \tilde{C}_e(B))$

$\tilde{C}3$) *idempotencia borrosa:* $\tilde{C}_e(\tilde{C}_e(A)) \preccurlyeq \tilde{C}_e(A)$.

Este nuevo operador tiene la particularidad de "relajar" la propiedad de monotonía en el sentido que garantiza que no sólo preserva el orden de inclusión estricto sino también grados de inclusión. Dicho en términos mas intuitivos este operador asegura que conjuntos de premisas "parecidos" darán lugar a conjuntos de consecuencias "parecidos". Así expresado parece que estamos en presencia de un operador de clausura con propiedades justificables desde lo intuitivo. Pues bien, el corolario del siguiente teorema muestra que las familias de los operadores de clausura implicativos y la de los de $\otimes$-extensionales son las mismas.

Teorema 6.6 *Dada una aplicación $\tilde{C} : \mathcal{F}(\mathcal{L}) \longmapsto \mathcal{F}(\mathcal{L})$ que satisface reflexividad borrosa e idempotencia borrosa. Entonces las siguientes dos propiedades son equivalentes:*

1. $(B \sqsubseteq_{\otimes} \tilde{C}(A)) \leq (\tilde{C}(A \cup B) \sqsubseteq_{\otimes} \tilde{C}(A))$
2. $(B \sqsubseteq_{\otimes} A) \leq (\tilde{C}(B) \sqsubseteq_{\otimes} \tilde{C}(A))$

Prueba:

1 ⇒ 2) Como la noción de inclusión graduada es no-decreciente en su segundo parámetro y no-creciente en el primero, resulta que $(B \sqsubseteq_{\otimes} A) \leq (B \sqsubseteq_{\otimes} \tilde{C}(A))$ y que $(\tilde{C}(A \cup B) \sqsubseteq_{\otimes} \tilde{C}(A)) \leq (\tilde{C}(B) \sqsubseteq_{\otimes} \tilde{C}(A))$, lo que por transitividad sobre la propiedad *1* nos da lo buscado.

2 ⇒ 1) Recordemos que en si $\otimes$ es una t-norma continua $B \sqsubseteq_{\otimes} \tilde{C}(A)$ siempre es menor que $B \cup A \sqsubseteq_{\otimes} \tilde{C}(A) \cup A$ el cual a su vez por reflexividad es igual a $B \cup A \sqsubseteq_{\otimes} \tilde{C}(A)$ y aplicando la propiedad *2* tenemos el grado de dicha inclusión es menor o igual a $\tilde{C}(B \cup A) \sqsubseteq_{\otimes} \tilde{C}(\tilde{C}(A))$, el cual a su vez por aplicarle idempotencia resulta equivalente a $\tilde{C}(B \cup A) \sqsubseteq_{\otimes} \tilde{C}(A)$, tal como buscábamos.

□

Corolario 6.3 *Una aplicación en un lenguaje $\mathcal{L}$ del tipo $\tilde{C} : \mathcal{F}(\mathcal{L}) \longmapsto \mathcal{F}(\mathcal{L})$ es un Operador de Clausura $\otimes$-Extensional si y sólo si es un Operador de Clausura Implicativo.*

Prueba: Basta remarcar que la propiedad *1* antes mencionada surge directamente de la condición de corte borroso y por lo tanto un operador de clausura es implicativo si y sólo si satisface reflexividad borrosa, idempotencia y dicha propiedad. □

Vale la pena mencionar que estos operadores de clausura $\otimes$-extensionales también han sido estudiado por Bělohlávek en [Běl99].

Ahora teniendo en claro cual es la intuición que soporta a los operadores implicativos, podemos completar el cuadro definiendo una clase especial de sistema de clausura borroso que daremos en llamar *Sistemas de Clausura Implicativos.*

Definición 6.7 (Sistema de Clausura Implicativo) *Un Sistema de Clausura Borroso $\mathcal{C}_{\rightarrow}$ en $\mathcal{F}(\mathcal{L})$ es un Sistema de Clausura Implicativo si, para cualquier $E \in \mathcal{C}_{\rightarrow}$ y para cualquier $k \in L$, $\bar{k} \rightarrow E \in \mathcal{C}_{\rightarrow}$.*

A partir de esta definición es sencillo probar el siguiente teorema.

Teorema 6.7 *El sistema de clausura $\mathcal{C}$ determinado por un operador de clausura implicativo $\tilde{C}$ mediante la expresión:*

$$\mathcal{C}_{\tilde{C}} = \{T_j \mid \tilde{C}(T_j) = T_j\}$$

es implicativo.

Recíprocamente, el operador de clausura $\tilde{C}$ definido a partir de un sistema de clausura implicativo a través de la siguiente ecuación:

$$\tilde{C}_{\mathcal{C}}(A)(p) = \inf\{T_j(p) \mid T_j \in \mathcal{C} \text{ y } A \preccurlyeq T_j\}$$

es implicativo. De hecho estas correspondencias dan lugar a una biyección en el sentido que: $\mathcal{C}_{\tilde{C}_{\mathcal{C}}} = \mathcal{C}$ y $\tilde{C}_{\mathcal{C}_{\tilde{C}}} = \tilde{C}$. De nuevo a esos conjuntos borrosos $\{T_j \in \mathcal{C}\}$ los denominaremos los generadores de $\tilde{C}$.

Prueba: Para el primer caso asumamos que $\mathcal{C}_{\tilde{C}}$ es definido por un Operador de Clausura Implicativo $\tilde{C}$. Ahora por cada $T \in \mathcal{C}_{\tilde{C}}$ y $k \in L$ tenemos que $\bar{k} \otimes (\bar{k} \to T) \preccurlyeq T$. Usando monotonía y $\tilde{C}4$ obtenemos que

$$\bar{k} \otimes \tilde{C}(\bar{k} \to T) \preccurlyeq \tilde{C}(\bar{k} \otimes (\bar{k} \to T)) \preccurlyeq \tilde{C}(T) = T$$

y por la propiedad de residuación, resulta que $\tilde{C}(\bar{k} \to T) \preccurlyeq \bar{k} \to T$. Finalmente usando inclusión tenemos que $\tilde{C}(\bar{k} \to T) = \bar{k} \to T$. Así, $\bar{k} \to T \in \mathcal{C}_{\tilde{C}}$.

Para el caso recíproco asumamos que $\mathcal{C}$ es un sistema de clausura implicativo. Dado que $\mathcal{C}$ es un sistema de clausura, resulta que $\tilde{C}_{\mathcal{C}}$ es un operador de clausura borroso. Por lo tanto sólo es necesario probar que $\tilde{C}_{\mathcal{C}}$ satisfice la propiedad $\tilde{C}4$. Pero como para cualquier $k \in L$, tenemos por hipótesis que $\tilde{C}_{\mathcal{C}}(A) \preccurlyeq \bigcap\{\bar{k} \to T \in \mathcal{C} \mid A \preccurlyeq \bar{k} \to T\}$, y eso es equivalente a $\tilde{C}_{\mathcal{C}}(A) \preccurlyeq \bar{k} \to \bigcap\{T \in \mathcal{C} \mid A \otimes \bar{k} \preccurlyeq T\} = \bar{k} \to \tilde{C}(A \otimes \bar{k})$, y por la propiedad de residuación obtenemos que $\tilde{C}(A) \otimes \bar{k} \preccurlyeq \tilde{C}(A \otimes \bar{k})$ tal como estábamos buscando. □

Es relevante, en términos de consideraciones que realizaremos mas adelante, señalar que dado un sistema de clausura implicativo $\mathcal{C}$ podemos definir su α-corte en la forma usual como: $\mathcal{C}_\alpha = \{T_j^\alpha \mid T_j \in \mathcal{C}\}$ donde $T_j^\alpha = \{p \in \mathcal{L} \mid T_j(p) \geq \alpha\}$ y comprobar que cada uno de ellos es un sistema de clausura clásico puesto que como $\mathcal{C}$ es cerrado por intersecciones y que el α-corte de una interesección es equivalente a la intersección de los α-corte, resulta que la clausura por intersecciones está garantizada para $\mathcal{C}_\alpha$.

Tal como lo propone Castro en [Cas94] es interesante analizar los operadores de clausura implicativos en términos de sus α-cortes. En tal sentido es posible determinar las siguientes propiedades para ellos

Proposición 6.4 *Si $\tilde{C}$ es un operador de clausura implicativo entonces su α-corte definido por $\tilde{C}_\alpha(A) = \{p \in \mathcal{L} \mid \tilde{C}(A)(p) \geq \alpha\}$ satisface las propiedades inclusión, monotonía e*

idempotencia débil $\tilde{C}_\beta(\tilde{C}_\alpha(A)) \subseteq \tilde{C}_{\alpha\otimes\beta}(A)$

para cualquier A conjunto clásico de fórmulas.

Prueba: Inclusión es inmediato considerando que $\tilde{C}$ ya satisface esa propiedad y que si A es un conjunto clásico entonces todos sus elementos estarán en todo α-corte de $\tilde{C}$. Monotonía es directamente comprobable a partir de la monotonía de $\tilde{C}$. Para verificar la propiedad de idempotencia débil tomemos en cuenta que el operador $\tilde{C}$ tiene la siguiente característica: $\tilde{C}(A \cup B) \otimes (B \sqsubseteq_\otimes \tilde{C}(A)) \preccurlyeq \tilde{C}(A)$. En particular si tomamos $B = \tilde{C}_\alpha(A)$ con A un conjunto clásico entonces, la propiedad de corte queda expresada como: $(\tilde{C}_\alpha(A) \sqsubseteq_\otimes \tilde{C}(A)) \otimes \tilde{C}(A \cup \tilde{C}_\alpha(A)) \preccurlyeq \tilde{C}(A)$. Como además, $A \cup \tilde{C}_\alpha(A) = \tilde{C}_\alpha(A)$ y $\alpha \leq (\tilde{C}_\alpha(A) \sqsubseteq_\otimes \tilde{C}(A))$ resulta que: $\alpha \otimes \tilde{C}(\tilde{C}_\alpha(A)) \preccurlyeq \tilde{C}(A)$. Lo cual es equivalente a: $\tilde{C}(\tilde{C}_\alpha(A)) \preccurlyeq \alpha \otimes\to \tilde{C}(A)$. Lo que tomando β-cortes resulta que: $\tilde{C}_\beta(\tilde{C}_\alpha(A)) \subseteq \tilde{C}_{\alpha\otimes\beta}(A)$. □

Es claro que a partir de idempotencia débil sólo podremos inferir idempotencia cuando $\otimes = \min$. En el resto de los casos es sencillo encontrar contraejemplos de que en general eso no sucede. Usando este resultado podemos determinar en que caso el α-corte de una teoría borrosa T_j que es un punto fijo de $\tilde{C}$, será un invariante de $\tilde{C}_\alpha$. Para verlo utilicemos la representación surgida del Teorema 6.4 sobre el conjunto $\tilde{C}_\alpha(T_j)$. Luego

$$\tilde{C}(\tilde{C}_\alpha(T_j))(p) = \inf_i(\inf_{q\in\tilde{C}_\alpha(T_j)} T_i(q)) \otimes\to T_i(p)$$

lo cual es menor o igual a un caso particular

$$(\inf_{q\in\tilde{C}_\alpha(T_j)} T_j(q)) \otimes\to T_j(p) \leq \alpha \otimes\to T_j(p)$$

Luego tomando un β-corte tenemos que $\tilde{C}_\beta(\tilde{C}_\alpha(T_j)) \subseteq T_j^{\alpha\otimes\beta}$. En particular si $\alpha = \beta$ y $\otimes = \min$ resulta que $\tilde{C}_\alpha(T_j) \subseteq T_j^\alpha$. Lo que es equivalente a $\tilde{C}_\alpha(T_j) = \tilde{C}_\alpha(T_j^\alpha)$.

Ahora podríamos preguntarnos si es posible hacer un uso más generalizado de la noción de operador que surge de la Definición 6.2. Pues el siguiente resultado prueba que podemos tomar una familia de operadores que sobre conjuntos clásicos satisfagan *inclusión* , *monotonía* e *idempotencia débil* para generar operadores implicativos a través de dicha definición.

Proposición 6.5 *Sea $\{C_\lambda\}_{\lambda\in[0,1]}$ una cadena de operadores $\mathcal{P}(\mathcal{L}) \mapsto \mathcal{P}(\mathcal{L})$ que satisfacen las propiedades de inclusión, monotonía e idempotencia débil respecto de la t-norma de Lukasiewicz o de la del Producto. Entonces el operador definido por 6.2 usando esa familia es un operador de clausura implicativo respecto de la t-norma de referencia.*

Prueba: Como primera medida debemos señalar que la definición de Gerla es equivalente a:

$$\tilde{C}(A) = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} C_\lambda(A_\lambda) \wedge \lambda$$

y que por la tanto $\tilde{C}_\alpha(A) = C_\alpha(A_\alpha)$ (o sea que el α-corte del operador $\tilde{C}$ sobre el conjunto borroso A coincide con el α-ésimo operador de la familia dada aplicado en α-corte de A).

Para probar que $\tilde{C}$ satisface inclusión basta notar que para todo conjunto borroso A, $A \preccurlyeq \tilde{C}(A)$ si y sólo si $\forall\alpha \in [0,1] : A_\alpha \subseteq \tilde{C}_\alpha(A)$. Pero por la observación anterior la última condición se reduce a la propiedad de inclusion sobre conjuntos clásicos de los elementos de la familia.

Para probar que $\tilde{C}$ satisface monotonía alcanza con observar que: $A \preccurlyeq B$ si y sólo si $\forall\alpha \in [0,1] : A_\alpha \subseteq B_\alpha$ y que por hipótesis $\{C_\lambda\}_{\lambda\in[0,1]}$ satisface monotonía.

Para probar $\otimes$-distributividad notemos primero que para las dos t-norma en cuestión:

$$(A \otimes \bar{k})_\lambda = \begin{cases} \emptyset & \text{Si } k < \lambda \\ A_{(k \otimes\to \lambda)} & \text{Si } k \geq \lambda. \end{cases}$$

La propiedad $\otimes$-distributividad, $\bar{\alpha}\otimes\tilde{C}(A) \preccurlyeq \tilde{C}(\bar{\alpha}\otimes A)$, es equivalente a la siguiente en términos de λ-cortes a: $\forall\lambda \in [0,1] : ((\bar{\alpha}\otimes\tilde{C}(A))_\lambda \preccurlyeq \tilde{C}_\lambda(\bar{\alpha}\otimes A))$. Luego tenemos que esa propiedad es trivialmente cierta si $\alpha < \lambda$ y si $\alpha \geq \lambda$ se reduce a decir que $\tilde{C}_{(\alpha \otimes\to \lambda)}(A) \preccurlyeq \tilde{C}_\lambda(\bar{\alpha} \otimes A)$. Lo cual se puede reescribir en términos de la familia de operadores dados como: $C_{(\alpha \otimes\to \lambda)}(A_{(\alpha \otimes\to \lambda)}) \preccurlyeq C_\lambda((\bar{\alpha} \otimes A)_\lambda) = C_\lambda(A_{(\alpha \otimes\to \lambda)})$. Y como para todo residuo de una t-norma resulta que $\lambda \leq \alpha \otimes\to \lambda$ y la familia es una cadena entonces resulta lo buscado.

Para idempotencia borrosa tenemos que por definición

$$\tilde{C}(\tilde{C}(A)) = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} C_\lambda(\tilde{C}_\lambda(A)) \wedge \lambda = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} C_\lambda(C_\lambda(A_\lambda)) \wedge \lambda$$

que aplicando idempotencia débil es menor o igual a

$$\bigcup_{\lambda\in[0,1]} C_{\lambda\otimes\lambda}(A_\lambda) \wedge \lambda$$

Ahora tomando en cuenta que en el $[0,1]$ y para las t-normas en cuestión resulta que:

$$\bigcup_{\lambda\in[0,1]} A_\lambda \wedge \lambda \equiv \bigcup_{\lambda\in[0,1]} A_{\lambda\otimes\lambda} \wedge (\lambda \otimes \lambda)$$

y por lo tanto que

$$\bigcup_{\lambda\in[0,1]} C_{\lambda\otimes\lambda}(A_\lambda) \wedge \lambda \preccurlyeq \bigcup_{\lambda\in[0,1]} C_{\lambda\otimes\lambda}(A_{\lambda\otimes\lambda}) \wedge (\lambda \otimes \lambda) = \tilde{C}(A)$$

□

Nótese que la restricción de las precondiciones de la proposición al conjunto $[0,1]$ responde a la necesidad de garantizar que para todo elemento α del reticulado existe otro elemento λ tal que $\alpha = \lambda \otimes \lambda$.

Un hecho interesante de citar a esta altura es que si tenemos un operador de clausura implicativo $\tilde{C}$, entonces sus λ-cortes formarán una familia de operadores de clausura clásicos o al menos que satisfagan las tres hipótesis del teorema anterior. Luego dicha familia puede ser usada para definir un operador a la Gerla (como fue demostrado en los dos teoremas anteriores) que por otra parte pertenece a la familia de los operadores implicativos. A partir del resultado anterior es claro que todo punto fijo del primer operador lo es también del segundo. Sin embargo la conversa no sucede y con ello el endomorfismo definido no es biyectivo. Quedará como un futuro trabajo el caracterizar a esta familia de operadores de clausura definibles a la Gerla. Lo que hace interesante a esta familia de operadores es la posibilidad de estudiar sus propiedades metateóricas tales como compacidad, decidibilidad, etc., a través del comportamiento de sus α-cortes aplicados a conjuntos clásicos.

Un hecho que creemos importante resaltar y que se justificará en lo que sigue del presente capítulo, es que los operadores de clausura implicativos aparecen como el factor común de muchos operadores de inferencia que aparecen en la literatura.

En términos de establecer un vínculo con trabajos similares es interesante mencionar que los operadores de clausura implicativos satisfacen la propiedad de:

$\tilde{C}5$) *Coherencia*: $\tilde{C}_c(A)(q) \geq \tilde{C}_c(\{p\})(q) \otimes A(p)$,

dónde $\{p\}$ denota a un singleton, i.e. un conjunto borroso que posee la siguiente función característica: $\{p\}(p) = 1$ y $\{p\}(q) = 0$ en cualquier otro caso.

Prueba: Puesto que todo conjunto borroso A puede ser representado por la unión de truncamientos de singletones, i.e. $A = \bigcup_{p \in \mathcal{L}} \{p\} \otimes k_{A(p)}$ donde $k_{A(p)}$ es la función constante $k_{A(p)}(q) = A(p)$ para todo $q \in \mathcal{L}$. Entonces es claro que, para cualquier $p \in \mathcal{L}$, $\tilde{C}(\{p\} \otimes k_{A(p)}) \preccurlyeq \tilde{C}(A)$. Finalmente la prueba se termina aplicando la propiedad $\tilde{C}4$. □

Intuitivamente esta propiedad esta requiriendo que si q es una consecuencia de p en algún grado y p pertenece a A en algún grado, entonces q debe también ser una consecuencia de A en un cierto grado que depende de los anteriores.

Esta propiedad aparece en [CT99] como una condición suficiente para que resulte que si un operador de clausura la cumpla entonces $\tilde{C}_c(\{p\})(q)$ define un preorden borroso en $\mathcal{L}$. Es fácil probar la siguiente proposición.

Proposición 6.6 *Si $\tilde{C}_c$ es un Operador de Clausura Implicativo con generadores $\{T_i\}_{i \in I}$, entonces resulta que*

$$\tilde{C}_c(\{p\})(q) = \inf_{i \in I} \{T_i(p) \to T_i(q)\}.$$

Esto nos indica que la familia $\{T_i\}_{i \in I}$ es también la generadora del preorden borroso $R(p \mid q) = \tilde{C}_c(\{p\})(q)$.

Esto nos da pie para pasar a la próxima sección.

6.4 Operadores Extensionales definidos por relaciones borrosas

Muchos de los métodos de razonamiento aproximado son formulados en términos de una medida condicional $R : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longmapsto [0,1]$ y de una función de Modus Ponens M para realizar inferencias del siguiente estilo:

$$\frac{\begin{array}{l} e(p) \\ R(q \mid p) \end{array}}{e(q) \geq M(e(p), R(q \mid p))}$$

donde e es una función de evaluación de verdad. Dependiendo del contexto la relación R suele representar una probabilidad condicional o la probabilidad de una implicación o una implicación multivaluada o una relación de similitud. En el contexto del razonamiento vago el CRI propuesto por Zadeh [Zad79] es el más conocido modelo que responde al anterior patrón.

Nosotros aquí comenzaremos nuestro análisis consideraremos un caso más general en que la relación R satisface tan sólo la propiedad de reflexividad. En ese sentido definimos y caracterizaremos un operador de consecuencia (no de clausura todavía) como:

Definición 6.8 *Dado una relación borrosa reflexiva $R : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longmapsto L$ en el lenguaje $\mathcal{L}$, el asociado Operador Extensional Borroso $\tilde{C}_R$ es definido como:*

$$\tilde{C}_R(A)(q) = \bigvee_{p \in \mathcal{L}} \{R(q \mid p) \otimes A(p)\} \tag{6.3}$$

La aplicación $\tilde{C}_R$ asigna, a todo conjunto borroso A, el menor conjunto borroso extensional (w.r.t. R) conteniéndolo. Este operador satisface las siguientes propiedades:

- **C1**: $A \leq \tilde{C}_R(A)$
- **C2**: $\tilde{C}_R(\bigvee_{i \in I} A_i) = \bigvee_{i \in I} \tilde{C}_R(A_i)$
- **C3**: $\tilde{C}_R(\bar{k}) = \bar{k}$
- **C4**$^{\otimes}$: $\tilde{C}_R(\{q\} \otimes \bar{k}) = \tilde{C}_R(\{q\}) \otimes \bar{k}$
- **C5**$^{\otimes}$: $\tilde{C}(A \otimes \bar{k}) = \tilde{C}(A) \otimes \bar{k}$.

dónde $\{q\}$ nuevamente denota un singleton y $\bar{k}$ representa al conjunto borroso constante: $\bar{k}(q) = k$, para todo $q \in \mathcal{L}$.

A partir de la verificación de las propiedades **C1** y **C2** queda claro que el operador definido por 6.3 es una *aproximación superior* en el sentido enunciado en el Capítulo 2. Otras propiedades que puede ser fácilmente demostradas, son:

- Las propiedades **C2** y **C4**$^{\otimes}$ implican la propiedad de inclusión borrosa. Para verificarlo considere que todo conjunto borroso A con dominio en el universo $\mathcal{L}$ puede ser escrito como:

  $$A = \bigvee_{p \in \mathcal{L}} \{p\} \otimes k_{A(p)}$$

  dónde $k_{A(p)}$ es la función constante usada en la demostración de coherencia al final de la sección anterior ($k_{A(p)}(q) = A(p)$ para todo $q \in \mathcal{L}$) y $\{p\}$ es el conjunto borroso definido por $\{p\}(p) = 1$ y $\{p\}(q) = 0$ si $p \neq q$. Luego como $A \preccurlyeq B$ si y sólo si para todo $p \in \mathcal{L} : A(p) \leq B(p)$ resulta que por la propiedad 2 $\tilde{C}_R(A) = \tilde{C}_R(\bigvee_{p \in \mathcal{L}} \{p\} \otimes k_{A(p)}) = \bigvee_{p \in \mathcal{L}} \tilde{C}_R(\{p\} \otimes k_{A(p)})$ y esto último por propiedad **C4**$^{\otimes}$ es equivalente a $\bigvee_{p \in \mathcal{L}} \{\tilde{C}_R(\{p\}) \otimes k_{A(p)}\}$ lo cual es menor o igual a $\bigvee_{p \in \mathcal{L}} \{\tilde{C}_R(\{p\}) \otimes k_{B(p)}\} = \tilde{C}_R(B)$

- En presencia de **C2, C4**$^{\otimes}$ es equivalente a **C5**$^{\otimes}$. Para probarlo escribimos, como en el caso anterior, al conjunto borroso $\tilde{C}_R(A \otimes \bar{k})$ como combinación de sus $k_{A(p) \otimes \bar{k}}$-truncamientos de la siguiente forma $\bigvee_{p \in \mathcal{L}} \{\tilde{C}_R(\{p\}) \otimes k_{A(p) \otimes \bar{k}}\}$. Y como $k_{A(p) \otimes \bar{k}} = k_{A(p)} \otimes \bar{k}$ resulta que la expresión anterior es igual a $\bigvee_{p \in \mathcal{L}} \{\tilde{C}_R(\{p\}) \otimes k_{A(p)} \otimes \bar{k}\}$, la cual a su vez es equivalente a $\tilde{C}_R(A) \otimes \bar{k}$. Para la otra dirección de la equivalencia basta notar que **C4**$^{\otimes}$ es un caso particular de **C5**$^{\otimes}$.

- La propiedad **C5**$^{\otimes}$ implica a la propiedad **C3**. Para comprobarlo sólo es necesario considerar el caso en que $A = \mathcal{L}$ i.e. $\forall p \in \mathcal{L} : A(p) = 1$.

Aquí probaremos que tomar algunas de esas propiedades alcanza para dar una caracterización de estos operadores generados por relaciones reflexivas borrosas (en el sentido de la ecuación 6.3).

Teorema 6.8 *Un operador ha sido generado por una relación reflexiva borrosa en términos de la Definición 6.8 si, y sólo si, satisface* **C1**, **C2** *y* **C4**$^{\otimes}$.

Prueba: Es sencillo mostrar que para cualquier relación reflexiva borrosa, $\tilde{C}_R$ satisface **C1**, **C2**, y **C4**$^{\otimes}$ usando las ideas mencionadas en las anteriores observaciones. La prueba del sentido inverso es como sigue. Asumamos que estamos en presencia de un operador $\tilde{C}$ que satisface las propiedades **C1**, **C2** y **C4**$^{\otimes}$. Definamos entonces, para todo $p, q \in \mathcal{L}$, $R(p,q) = \tilde{C}(\{p\})(q)$. Note que en tal caso R es reflexiva como consecuencia de **C1**. Escribiendo nuevamente cualquier conjunto borroso A como $\bigvee_{p\in\mathcal{L}}\{p\} \wedge k_{A(p)}$, donde $k_{A(p)}$ es el conjunto borroso constante definido por $k_{A(p)}(q) = A(p)$, para todo $q \in \mathcal{L}$. Resulta por **C2**, que $\tilde{C}(A) = \bigvee_{p\in\mathcal{L}} \tilde{C}(\{p\} \otimes k_{A(p)})$, que por aplicar **C4**$^{\otimes}$, se rescribe como $\tilde{C}(A) = \bigvee_{p\in\mathcal{L}} \tilde{C}(\{p\}) \otimes A(p)$, y así $\tilde{C}(A)(q) = \bigvee_{p\in\mathcal{L}} \tilde{C}(\{p\})(q) \otimes A(p) = \bigvee_{p\in\mathcal{L}} R(q,p) \otimes A(p) = \tilde{C}_R(A)(q)$. □

Notemos que estas propiedades son la contraparte en este contexto de las correspondientes **A1** y **A2** cuando consideramos aproximaciones superiores de conjuntos borrosos en el Capítulo 2.

Diferentes autores (por ejemplo ver [CT99]) han estudiado los así llamados operadores de clausura borrosos definidos por preórdenes borrosos. La idea básicamente consiste en pensar, tal como se hace en las lógicas multivaluadas con el operador de implicación que captura el orden en el reticulado, al patrón de inferencia mencionado anteriormente en términos de una relación de preorden borrosa $R(p,q)$. En el trabajo de Castro y Trillas se estudian diferentes propiedades de esta familia de operadores pero no se presenta una caracterización de la misma. Ese será el objetivo de los próximos resultados.

Primero notemos que los operadores definidos por 6.3 con R satisfaciendo sólo la propiedad de reflexividad no son de clausura puesto que no verifican la propiedad de idempotencia:

- **C6**: $\tilde{C}_R \circ \tilde{C}_R = \tilde{C}_R$

Incorporando esta propiedad podemos caracterizar los operadores de clausura generados por un preorden borroso de la siguiente manera:

Teorema 6.9 *Un operador de clausura es generado por un preorden borroso a través de la ecuación 6.3 si, y sólo si, satisface* **C1**, **C2**, **C4**$^{\otimes}$ *y* **C6**.

Prueba: En virtud de la anterior caracterización sólo es necesario verificar que si la relación es $\otimes$-transitiva entonces el operador es idempotente y viceversa. Una simple evaluación muestra que si la relación R es $\otimes$-transitiva, entonces $\tilde{C}_R$ satisface **C6**.

$$\tilde{C}_R(\tilde{C}_R(A))(q) = \bigvee_{p\in\mathcal{L}} \{R(q \mid p) \otimes \tilde{C}_R(A)(p)\} = \bigvee_{p\in\mathcal{L}} \{R(q \mid p) \otimes \bigvee_{r\in\mathcal{L}} \{R(p \mid r) \otimes A(r)\}\} =$$

$$\bigvee_{p\in\mathcal{L}} \bigvee_{r\in\mathcal{L}} \{R(q \mid p) \otimes R(p \mid r) \otimes A(r)\}$$

que por aplicar $\otimes$-transitividad resulta que el último término es menor o igual a

$$\bigvee_{r\in\mathcal{L}} \{R(q \mid r) \otimes A(r)\} = \tilde{C}_R(A)(q)$$

Por el contrario si $\tilde{C}$ satisface las condiciones **C1**, **C2**, **C4**$^{\otimes}$ y **C6** y definimos R como en el teorema anterior, entonces la relación R es $\otimes$-transitiva. Para ello es suficiente notar que si consideramos el

valor de $\tilde{C}(\tilde{C}(\{p\}))(q)$ por las consideraciones anteriores es igual a $\bigvee_{r\in\mathcal{L}}\{\tilde{C}(\{r\})(q)\otimes\tilde{C}(\{p\})(r)\} = \bigvee_{r\in\mathcal{L}}\{R(q \mid r)\otimes R(r \mid p)\}$ lo que por **C6** es igual a $\tilde{C}(\{p\})(q) = R(q \mid p)$ tal como queríamos probar. □

Esta caracterización complementa el resultado presentado por Elorza y Burillo en [EB99], que determina que un operador definido por la ecuación 6.3 es de clausura si y sólo si R es un $\otimes$-preorden, cualquiera sea la t-norma $\otimes$.

Tomando en cuenta nuestra caracterización y la anterior definición resulta cierto el siguiente teorema.

Teorema 6.10 *Un operador de clausura borroso definido por un preorden borroso R es el operador de clausura implicativo minimal $\tilde{C}_c$ tal que $\tilde{C}_c(\{q\})(p) = R(q \mid p)$, para cualquier $p, q \in \mathcal{L}$.*

Ahora, consideraremos los operadores de clausura definidos por 6.3 donde en lugar de un preorden R usamos una relación de similitud borrosa S, que como ya fue mencionado en repetidas oportunidades representa una generalización de la noción de equivalencia clásica. Señalemos en este caso que la propiedad que se agrega al análisis hecho hasta ahora es la de simetría. Luego debemos introducir una propiedad que la fuerce. Una candidata es:

- **C7**: $\tilde{C}_S(\{p\})(q) = \tilde{C}_S(\{q\}(p)$, for all $p, q \in \mathcal{L}$.

Ahora podemos probar que un operador de clausura borroso $\tilde{C}$ es definido a través de 6.3 por una relación de similitud S si y sólo si el operador satisface **C1-C4**$^{\otimes}$, **C6** y **C7**.

Prueba: En virtud de los teoremas anteriores sólo es necesario verificar que si la relación borrosa S es simétrica entonces $\tilde{C}_S$ satisface **C7** (puesto que la inversa es obvia). Pero eso es trivial porque por definición

$$\tilde{C}_S(\{p\})(q) = \bigvee_{r\in\mathcal{L}}\{S(q \mid r)\otimes\{p\}(r)\} = S(q \mid p)$$

y

$$\tilde{C}_S(\{q\})(p) = \bigvee_{r\in\mathcal{L}}\{S(p \mid r)\otimes\{q\}(r)\} = S(p \mid q)$$

y ambos lados derechos son iguales por simetría. □

En el razonamiento borroso se dice que un conjunto borroso $A \in L^X$ es extensional respecto a una relación de similitud S si y sólo si

$$A(x)\otimes S(x,y) \leq A(y)$$

para todo par de elementos x, y en el universo X. En ese contexto para cualquier conjunto borroso A se define a $\tilde{C}_S(A)$ como el menor conjunto extensional que contiene a A y suele ser referido como la clausura extensional respecto a la relación de similitud S. En [KC95], Klawonn y Castro caracterizan algebraicamente la familia de conjuntos extensionales respecto de una relación de similitud S. Ellos prueban los dos siguientes resultados que reproduciremos parcialmente.

Teorema 6.11 (3.2 en [KC95]) *Sea S una relación de similitud sobre el universo $\mathcal{L}$. Si denotamos con $\mathcal{A}_S$ al conjunto de todos los conjuntos borrosos extensionales respecto de S, entonces si $A \in \mathcal{A}_S$, $\{B_i\}_{i\in I} \preccurlyeq \mathcal{A}_S$ y $k \in L$ entonces:*

1. $\bigcup_{i\in I} B_i \in \mathcal{A}_S$
2. $\bigcap_{i\in I} B_i \in \mathcal{A}_S$
3. $(\bar{k}\otimes A) \in \mathcal{A}_S$

4. $(\bar{k} \otimes\!\!\rightarrow A) \in \mathcal{A}_S$

5. $(A \otimes\!\!\rightarrow \bar{k}) \in \mathcal{A}_S$

Las primeras dos corresponden a afirmar que la familia de conjunto extensionales respecto a S es cerrada por intersecciones y uniones. Las dos siguientes manifiestan que la extensionalidad se preserva para k-truncamientos y k-estiramientos. Y la última significa que la extensionalidad es preservada bajo una noción de complementación generalizada (donde $\alpha = 0$ corresponde a la complementación usual). Note que el conjunto $\mathcal{A}_S$ corresponde a los puntos fijos de $\tilde{C}_S$.

Prueba: A partir de las propiedades ya probadas para $\tilde{C}_S$ es sencillo ver que los primeros cuatro conjuntos son puntos fijos de éste si A lo era. Para la última consideremos que A es extensional respecto de S. Entonces es suficiente ver que $\tilde{C}_S(A \otimes\!\!\rightarrow \bar{k}) \preccurlyeq (A \otimes\!\!\rightarrow \bar{k})$. Luego por residuación eso es equivalente a probar que para todo $p \in \mathcal{L}$ resulta que $A(p) \otimes \tilde{C}_S(A \otimes\!\!\rightarrow \bar{k})(p) \leq k$. Ahora reemplazando por su definición de clausura tenemos que el lado izquierdo es igual a

$$A(p) \otimes \bigvee_{q \in \mathcal{L}} \{S(p \mid q) \otimes (A(q) \otimes\!\!\rightarrow \bar{k})\}$$

lo que es equivalente

$$\bigvee_{q \in \mathcal{L}} \{(A(p) \otimes S(p \mid q)) \otimes (A(q) \otimes\!\!\rightarrow \bar{k})\}$$

que como A es extensional resulta que lo anterior es menor o igual a:

$$\bigvee_{q \in \mathcal{L}} \{A(q) \otimes (A(q) \otimes\!\!\rightarrow \bar{k})\} = \bigvee_{q \in \mathcal{L}} \{A(q) \wedge \bar{k})\} \leq k$$

□

Teorema 6.12 (3.3 en [KC95]) *Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{L})$ tal que satisface las propiedades* (1)...(5) *del teorema anterior. Entonces existe una relación de similitud S tal que todos los elementos de $\mathcal{A}$ son extensionales respecto de ella y además S es unívocamente determinada por la ecuación:*

$$S(p,q) = \bigcap_{A_i \in \mathcal{A}} (A_i(p) \leftrightarrow A_i(q)) \tag{6.4}$$

A partir de estos resultados surge la caracterización del sistema de clausura asociado a un operador de clausura $\mathcal{C}_S$. De lo antedicho, es claro que dado cualquier familia de conjunto borrosos $\{T_i\}_{i \in I}$ podemos obtener el menor sistema de clausura que los contiene haciendo la clausura por uniones, intersecciones, k-estiramientos y k-truncamientos, y k-complementaciones.

Ahora estamos en condiciones de discutir las relaciones entre los operadores de clausura generados por una relación de similitud entre fórmulas y los operadores de inferencia aproximados y de proximidad presentados en [EGG95] y mencionados el capítulo 2, que provienen de una relación de similitud entre modelos. Una primera y más evidente vínculo puede ser establecido por notar que las medidas I_S y $J_{S,T}$ corresponde a preórdenes borrosos en $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$ y por lo tanto generadores de operadores de clausura mediante la expresión 6.3. Convengamos en denotar por $\tilde{C}_I$ y $\tilde{C}_J$ a los operadores generados por estas medidas. Aplicando la definición al caso de conjuntos clásicos, la primera termina expresada como

$$\tilde{C}_I(A)(q) = \sup_{p \in A} \inf_{\omega' \models p} \sup_{\omega \models q} S(\omega', \omega)$$

que es menos específico que el grado de consecuencia aproximada

$$I_S(q \mid A) = \inf_{\omega' \models A} \sup_{\omega \models q} S(\omega', \omega)$$

puesto que al ser todo modelo de A es un modelo de p si $p \in A$ podemos concluir que la segunda expresión es mayor o igual a la primera. Es fácil encontrar un ejemplo donde la desigualdad contraria no ocurre (por ejemplo que para todo modelo ω de q exista un modelo $\omega*_\omega$ de p tal que $S(\omega*_\omega, \omega) = 0$) y que $S(\omega', \omega) > 0,1$ para todo $\omega' \models A$). Por lo tanto podemos decir que en el sentido de especificidad la relación de consecuencia aproximada es mejor que el operador de consecuencia generado por el orden I_S. Obviamente estas nociones coinciden, para conjuntos clásicos, en el caso que A es finito y cerrado por conjunciones, i.e. si A puede ser representado por una única fórmula. Por lo tanto ambas nociones de consecuencia coinciden para pares de fórmulas y en general divergen para conjuntos de fórmulas.

En el caso de los operadores $\tilde{C}_J$ definidos a partir de la medida de proximidad $J_{S,T}$, resulta que para el caso de conjunto de fórmulas clásicos pueden escribirse como:

$$\tilde{C}_J(A)(q) = \sup_{p \in A} \inf_{\omega \models T} \{I_S(p \mid \hat{\omega}) \otimes\!\!\rightarrow I_S(q \mid \hat{\omega})\}$$

que es menos específico que el grado de consecuencia de proximidad

$$J_{S,T}(q \mid A) = \inf_{\omega \models T} \{I_S(A \mid \hat{\omega}) \otimes\!\!\rightarrow I_S(q \mid \hat{\omega})\}$$

dado que si p pertenece a A resulta que $I_S(p \mid \hat{\omega}) \geq I_S(A \mid \hat{\omega})$. Nuevamente las dos expresiones son equivalentes en el caso que A es finito y cerrado por conjunciones.

6.5 Relaciones con otros trabajos

6.5.1 Inferencia Natural

En [BJ98], Boixader y Jacas consideran modelos de razonamiento que son extensionales con respecto a lo que ellos denominan el operador de $\otimes$-indistinguibilidad natural, dónde la indistinguibilidad se define en términos de grados de similitud. Para describir sus modelos, definen una familia de operadores $I : [0,1]^U \longmapsto [0,1]^V$, dónde U y V representan universos de discursos o dominios. Esos operadores son llamados *operadores de inferencia extensionales* si los mismos preservan orden, i.e. si $A_1 \preccurlyeq_U A_2$ entonces $I(A_1) \preccurlyeq_V I(A_2)$, y satisface la propiedad de $\otimes$-extensionalidad, entendiendo por ella que $\bar{E}^{\otimes}_U(A_1, A_2) \leq \bar{E}^{\otimes}_V(I(A_1), I(A_2))$, donde $\bar{E}^{\otimes}_U$ es la función de similitud entre conjuntos borrosos definida por

$$\bar{E}^{\otimes}_U(A_1, A_2) = \inf_{x \in U}((A_1(x) \vee A_2(x)) \rightarrow (A_1(x) \wedge A_2(x))) \tag{6.5}$$

y análogamente para $\bar{E}^{\otimes}_V$. Vale la pena remarcar que esta idea de $\otimes$-extensionalidad es más débil de la mencionada en la Definición 6.6[4]. Boixader y Jacas prueban que es posible asociar a cualquier regla borrosa del estilo *"Si A entonces B"* el así-llamado *operador de inferencia natural*, que tiene la particularidad de ser óptimo desde el punto de vista extensional.

Definición 6.9 (Operador de Inferencia Natural) *Dada la regla "Si A entonces B " con $A \in [0,1]^U$ y $B \in [0,1]^V$, el operador de inferencia natural $\bar{C}_{AB} : [0,1]^U \longmapsto [0,1]^V$ asociado a dicha regla es definido por*

$$\bar{C}_{AB}(A')(v) = [\inf_{u \in U}(A'(u) \rightarrow A(u))] \rightarrow B(v)$$

Teorema 6.13 *([BJ98, Teorema 15]) El operador natural $\bar{C}_{AB}$ asociado a la regla "Si A entonces B" es el operador de inferencia menos específico que satisface que:*

- *$\bar{C}_{AB}$ es extensional,*

[4]Además, notar que esta noción de equivalencia es diferente de 6.4 dado que aquella genera una medida de indistinguibilidad entre elementos del dominio y esta última entre conjuntos borrosos

- $\bar{C}_{AB}(A) = B$,
- $B \preccurlyeq_V \bar{C}_{AB}(A')$, *para cualquier* $A' \in [0,1]^U$. *Más aún, si* $A' \preccurlyeq_U A$, *entonces* $\bar{C}_{AB}(A') = B$

A partir de su definición, es claro que el operador de inferencia natural determina el grado en que infiere el consecuente B de la regla, según el grado de inclusión entre la información disponible y el antecedente de la regla. Estos operadores tiene la particularidad de generar cualquier operador de inferencia extensional, tal como lo demuestra el siguiente teorema de representación.

Teorema 6.14 *([BJ98, Teorema 20]) $\bar{C} : [0,1]^U \longmapsto [0,1]$ es un operador de inferencia extensional (con respecto a $\otimes$) si y sólo si existe una familia "Si A_i entonces B_i" con $i \in I$, tal que $\bar{C} = \inf_{i\in I} \bar{C}_{A_iB_i}$.*

Es de resaltar la coincidencia de estas ideas y resultados con los que corresponden a nuestros operadores de clausura implicativos. De hecho, podemos afirmar que todo operador implicativo $\tilde{C}_c$ es generado por los operadores de inferencia naturales correspondientes a las reglas *"si T_i entonces T_i"* con dominio $U = V = \mathcal{L}$ donde $\{T_i\}_{i\in I}$ es la familia de generadores de $\tilde{C}_c$.

Desde este punto de vista, nuestro Teorema de Representación 6.4 podría ser visto como un caso particular del teorema de representación antes mencionado. Por todo esto el siguiente resultado se verifica trivialmente.

Teorema 6.15 *Los operadores de clausura implicativos son operadores de inferencia extensionales.*

Podríamos preguntarnos ahora si la recíproca de este teorema es cierta cuando consideramos operadores de inferencia extensionales con $U = V = \mathcal{L}$. Es sencillo probar que si bien la noción de $\otimes$-extensionalidad de Boixader y Jacas es más débil de la mencionada en la Definición 6.6, alcanza para garantizar que sus operadores extensionales satisfacen la propiedad $\tilde{C}_{\otimes}4$.

Proposición 6.7 *Cualquier operador de inferencia extencional $\bar{C}$ con $U = V = \mathcal{L}$ satisface la propiedad $\tilde{C}_{\otimes}4$.*

Prueba: Por el teorema de representación anterior existe una familia de operadores naturales $\{\bar{C}_{A_iB_i}\}_{i\in I}$ tal que $\bar{C} = \inf_{i\in I} \bar{C}_{A_iB_i}$. Probemos que para todo $i \in I$ y para todo $p \in \mathcal{L}$ resulta que $\bar{C}_{A_iB_i}(A)\otimes\bar{k} \preccurlyeq \bar{C}_{A_iB_i}(A\otimes\bar{k})$. Observemos que $\bar{C}_{A_iB_i}(A\otimes\bar{k}) = (A\otimes\bar{k} \sqsubseteq_{\otimes} A_i) \to B_i = (\bar{k} \to (A \sqsubseteq_{\otimes} A_i)) \to B_i$. Pero esta última condición es mayor o igual a: $\bar{k}\otimes((A \sqsubseteq_{\otimes} A_i) \to B_i) = \bar{k}\otimes\bar{C}_{A_iB_i}(A)$, tal como queríamos probar. □

Pero en general, estos operadores no satisfacen ni inclusión borrosa ni idempotencia borrosa. Cabría preguntarse entonces bajo que condiciones un operador de inferencia extensional $\bar{C}$ es uno de clausura. Claramente si la familia generadora $\{\bar{C}_{A_iB_i}\}_{i\in I}$ que surge del teorema de representación de Boixader y Jacas satisface la condición $A_i = B_i$ para todo $i \in I$, caemos en el contexto de nuestro Teorema 6.4 y por lo tanto $\bar{C}$ será un operador de clausura implicativo. Pero esa es una condición que puede ser relajada tal como lo prueban los siguientes resultados.

Proposición 6.8 *Un operadores de inferencia extensional $\bar{C}$ con $U = V = \mathcal{L}$ satisface inclusión borrosa si y sólo si la asociada familia de reglas "Si A_i entonces B_i" con $i \in I$, cumple que $A_i \preccurlyeq B_i$ para todo i.*

Prueba: Supongamos primero que para todo $A \in \mathcal{F}(\mathcal{L}) : A \preccurlyeq \bar{C}(A)$. Entonces para toda regla *"Si A_i entonces B_i"* tenemos que

$$\bar{C}_{A_iB_i}(A)(q) = \inf_{p\in\mathcal{L}}(A(p) \to A_i(p)) \to B_i(q) \geq A(q)$$

En particular para $A = A_i$ obtenemos que $\forall p \in \mathcal{L} : A_i(p) \leq B_i(p)$.
Para el sentido inverso de la prueba, asumamos que $A_i \preccurlyeq B_i$ para todo i. Como estamos trabajando

en el contexto de una BL-álgebra, nuestro supuesto implica que para cualquier $p \in \mathcal{L}$: $A(p) \wedge A_i(p) \leq B_i(p)$, lo que por continuidad es equivalente a $A(p) \otimes (A(p) \to A_i(p)) \leq B_i(p)$ y por residuación obtenemos que:

$$A(p) \leq (A(p) \to A_i(p)) \to B_i(p)$$

Por lo tanto $\bar{C}_{A_iB_i}(A)(q) = \inf_{p\in\mathcal{L}}(A(p) \to A_i(p)) \to B_i(q) \geq (A(p) \to A_i(p)) \to B_i(p) \geq A(q)$. Así resulta que $A \preccurlyeq \bar{C}(A)$ tal como queríamos demostrar. □

Note que en particular la proposición anterior se aplica a los operadores naturales. Ahora estudiaremos bajo que condición podemos asegurar que estos operadores satisfacen idempotencia. A partir de este resultado podremos establecer una condición suficiente para que una familia de generadores produzca un operador que satisfaga idempotencia.

Teorema 6.16 *$\bar{C}_{AB}$ es un operador natural idempotente con $U = V = \mathcal{L}$ si y sólo si $(B \sqsubseteq_{\otimes} A) \to B = B$.*

Prueba:

⇒) Que $\bar{C}_{AB}$ sea idempotente significa que $\bar{C}_{AB}(\bar{C}_{AB}(A)) = B$. Pero como por definición $\bar{C}_{AB}(A) = B$, entonces lo anterior es $\bar{C}_{AB}(B) = B$ lo cual implica que $(B \sqsubseteq_{\otimes} A) \to B = B$.

⇐) Asumamos que $(B \sqsubseteq_{\otimes} A) \to B = B$ y verifiquemos que $\bar{C}_{AB}$ es idempotente. Tenemos que $\bar{C}_{AB}(\bar{C}_{AB}(C)) = (\bar{C}_{AB}(C) \sqsubseteq_{\otimes} A) \to B = ((C \sqsubseteq_{\otimes} A) \to B) \sqsubseteq_{\otimes} A) \to B$. Por propiedades de la implicación obtenemos que $\bar{C}_{AB}(\bar{C}_{AB}(C)) \preccurlyeq (C \sqsubseteq_{\otimes} A) \otimes (B \sqsubseteq_{\otimes} A) \to B$. Lo cual es equivalente a $(C \sqsubseteq_{\otimes} A) \to ((B \sqsubseteq_{\otimes} A) \to B) = (C \sqsubseteq_{\otimes} A) \to B = \bar{C}_{AB}(C)$.

□

Observación 6.2 *Esa condición es más restrictiva de lo que aparenta puesto que si ella se cumple y la t-norma es* min *entonces los únicos elementos $p \in \mathcal{L}$ para los cuales $A(p) < B(p)$ sólo pueden ser aquellos en que $B(p) = 1$. Más aún, si en cambio la t-norma es isomorfa a la del producto o a la de Łukasiewcz y la condición precedente se verifica, entonces si existe un elemento $p \in \mathcal{L}$ tal $A(p) < B(p)$ resulta que B debe ser un conjunto clásico.*

Esta observación nos lleva a plantear el siguiente teorema.

Teorema 6.17 *$\bar{C}_{AB}$ es un operador de clausura si y sólo si $\bar{C}_{AB} = \bar{C}_{BB}$.*

Prueba: La prueba en el sentido de derecha a izquierda de la equivalencia es trivial. Para el otro sentido, asumamos que $\bar{C}_{AB}$ es un operador de clausura. Luego $A \preccurlyeq B$ y por lo tanto $(C \sqsubseteq_{\otimes} A) \leq (C \sqsubseteq_{\otimes} B)$. De eso resulta que $\bar{C}_{BB}(C) = (C \sqsubseteq_{\otimes} B) \to B \preccurlyeq (C \sqsubseteq_{\otimes} A) \to B = \bar{C}_{AB}(C)$. Para verificar la desigualdad contraria tomemos $\bar{C}_{AB}(C) = (C \sqsubseteq_{\otimes} A) \to B \preccurlyeq ((C \sqsubseteq_{\otimes} B) \otimes (B \sqsubseteq_{\otimes} A)) \to B = (C \sqsubseteq_{\otimes} B) \to ((B \sqsubseteq_{\otimes} A) \to B) = (C \sqsubseteq_{\otimes} B) \to B = \bar{C}_{BB}(C)$. □

De esta manera hemos probado que un operador de inferencia natural $\bar{C}_{AB}$ es un operador de clausura si es equivalente a $\bar{C}_{AB} = \bar{C}_{BB}$ o lo que es lo mismo si es un operador de clausura implicativo generado por B de acuerdo al Teorema 6.4. Así podemos concluir que todo operador de inferencia extensional $\bar{C}$ con $U = V = \mathcal{L}$ es de clausura si es generado por una familia de operadores de inferencia natural $\bar{C}_{A_iB_i}$ con $i \in I$ que son operadores de clausura implicativos. Quedará pendiente el determinar si esos son los únicos.

6.5.2 Inferencia como Extensión Canónica

En [Ger94], Gerla propone tomar cualquier operador de clausura clásico C (definido sobre el dominio $\mathcal{P}(\mathcal{L})$) y aplicarle el principio de extensionalidad de Zadeh y así obtener un operador de clausura borroso $\tilde{C}^*$ (definido sobre el dominio $\mathcal{F}(\mathcal{L})$), de la siguiente manera:

Definición 6.10 *[Ger94](Extensión Canónica)*
Dado un operador de clausura compacto $C : \mathcal{P}(\mathcal{L}) \longmapsto \mathcal{P}(\mathcal{L})$, la correspondiente extensión canónica de C es el operador borroso $\tilde{C}^* : \mathcal{F}(\mathcal{L}) \longmapsto \mathcal{F}(\mathcal{L})$ definido por

$$\tilde{C}^*(A)(p) = \sup\{\alpha \in L \mid p \in C(A_\alpha)\}$$

donde A_α representa el α-corte cerrado de A.

Esa extensión canónica verifica que si un conjunto borroso A es cerrado por $\tilde{C}^*$ entonces cualquiera de sus α-cortes es cerrado por C. Es sencillo verificar que $\tilde{C}^*$ es un operador de clausura borroso sobre $\mathcal{F}(\mathcal{L})$ si y sólo si C es un operador de clausura sobre $\mathcal{P}(\mathcal{L})$. Tal como demostraremos a continuación esta familia de operadores también son implicativos.

Teorema 6.18 *La extensión canónica de cualquier operador de clausura es un operador de clausura implicativo.*

Prueba: Supongamos que $\tilde{C}^*$ es la extensión canónica del operador C. Por definición

$$\tilde{C}^*(A \otimes \bar{k})(p) = \sup\{\alpha \in L \mid p \in C((A \otimes \bar{k})_\alpha)\}$$

Además, recordando que

$$(A \otimes \bar{k})_\lambda = \begin{cases} \emptyset & \text{Si } k < \lambda \\ A_{(k \otimes\!\!\to \lambda)} & \text{Si } k \geq \lambda. \end{cases}$$

luego resulta que

$$\tilde{C}^*(A \otimes \bar{k})(p) = \begin{cases} 1 & \text{Si } p \in C(\emptyset) \\ \alpha & \text{Si } p \in C(A_{(k \otimes\!\!\to \alpha)}) \text{ y } k \geq \alpha. \end{cases}$$

En el primer caso claramente $\tilde{C}^*(A \otimes \bar{k})(p) = 1 \geq \tilde{C}^*(A)(p) \otimes \bar{k} = k$. Si $\tilde{C}^*(A \otimes \bar{k})(p) = \alpha$ entonces $p \in C(A_{(k \otimes\!\!\to \alpha)})$ y así $\tilde{C}^*(A)(p) = k \otimes\!\!\to \alpha$. Luego $\tilde{C}^*(A)(p) \otimes \bar{k} = (k \otimes\!\!\to \alpha) \otimes k = k \wedge \alpha = \alpha$, tal como queríamos probar. □

Para el caso de los operadores de clausura borrosos que son extensiones canónicas de uno clásico compacto, Gerla propone la siguiente caracterización

Teorema 6.19 *Un operador de clausura borroso $\tilde{C}$ es la extensión canónica de un operador de clausura compacto C si y sólo si $\tilde{C}$ satisface las siguiente propiedades:*

- $\tilde{C}(A) = \bigcup\{\tilde{C}(A_f) : A_f$ *tiene soporte finito, y* $A_f \preccurlyeq A\}$
- $\tilde{C}(A_{\alpha+}) = (\tilde{C}(A))_{\alpha+}$

$A_{\alpha+}$ representa el α corte abierto de A.

Curiosamente Gerla no presenta una caracterización de sus extensiones canónicas cuando provienen de un operador de clausura que no sea compacto. A continuación cubriremos ese detalle.

Teorema 6.20 *Un operador de clausura implicativo $\tilde{C}$ es la extensión canónica de un operador clásico de clausura C si y sólo si $\tilde{C}$ satisfice además las propiedades:*

- $\tilde{C}(A \vee \bar{k}) = \tilde{C}(A) \vee \bar{k}$.
- *Si* $A \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$ *entonces* $\tilde{C}(A) \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$.

Prueba: Primero, probemos la dirección que va de derecha a izquierda. La segunda propiedad adicional indica que la clausura borrosa de un conjunto clásico tiene como resultado otro conjunto clásico. Así, es posible considerar la restricción de $\tilde{C}$ a los conjuntos clásicos como un operador de clausura clásico C, i.e. $C = \tilde{C} \backslash \mathcal{P}(\mathcal{L})$. Entonces estamos en condiciones de definir:

$$\tilde{C}_1(A)(p) = \sup\{\lambda \in L \mid p \in C(A_\lambda)\}$$

Obviamente $\tilde{C}(A) = \tilde{C}_1(A)$ cuando A es clásico. En otro caso:

$$\tilde{C}_1(A) = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda \wedge C(A_\lambda) \leq \bigcup_{\lambda \in L} \tilde{C}(\lambda \wedge A_\lambda)$$

puesto que C es una restricción del operador $\tilde{C}$ el cual satisface la propiedad $\tilde{C}4$. Por inclusión este último término es menor o igual a:

$$\tilde{C}(\bigcup_{\lambda \in L} \lambda \wedge A_\lambda) = \tilde{C}(A)$$

Por otra parte

$$\tilde{C}_1(A) = \bigcap_{\lambda \in L} \lambda \vee C(A_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in L} \tilde{C}(\lambda \vee A_\lambda)$$

puesto que C es una restricción del operador $\tilde{C}$ el cual satisface la primera propiedad adicional. Por inclusión el último término es mayor o igual:

$$\tilde{C}(\bigcap_{\lambda \in L} \lambda \vee A_\lambda) = \tilde{C}(A)$$

Para el sentido de izquierda a derecha de la prueba, asumamos que el operador de clausura clásico C fue dado y probemos que su extensión canónica $\tilde{C}_1$ satisface las propiedades adicionales (puesto que arriba ya hemos probado que es un operador implicativo). Para verificar la primera condición basta ver que:

$$(A \vee \bar{k})_\alpha = \begin{cases} \mathcal{L} & \text{Si } \alpha \leq k \\ A_\alpha & \text{Si } \alpha > k \end{cases}$$

y así resulta que:

$$\sup\{\alpha \in L \mid p \in C((A \vee \bar{k})_\alpha)\} = \sup\{\alpha \in L \mid p \in C(A_\alpha)\} \vee k$$

La prueba de que $\tilde{C}_1$ es una operación cerrada en el conjunto de los conjuntos clásicos de fórmulas surge inmediatamente si tomamos en cuenta que los conjuntos clásicos son invariantes frente a α-corte. Así resulta que si A es clásico:

$$\tilde{C}_1(A)(p) = \begin{cases} 1 & \text{Si } p \in C(A) \\ 0 & \text{Si } p \notin C(A) \end{cases}$$

□

En la siguiente sección resumiremos todas las caracterizaciones de operadores de clausura.

6.6 Descripción de operadores de clausura

A modo de síntesis, en este apartado final presentaremos las propiedades de los operadores de clausura borrosos a través del lenguaje de las BL-álgebra de la siguiente manera:

1. $A \preccurlyeq \tilde{C}(A)$.
2. si $A \preccurlyeq B$ then $\tilde{C}(A) \preccurlyeq \tilde{C}(B)$.
3. $\tilde{C}\tilde{C}(A) \preccurlyeq \tilde{C}(A)$.
4. $\tilde{C}(A \otimes \bar{k}) \geq \tilde{C}(A) \otimes \bar{k}$.
5. $\tilde{C}(A \vee \bar{k}) = \tilde{C}(A) \vee \bar{k}$.
6. $\tilde{C}(\bar{k} \otimes\!\!\rightarrow A) \leq \bar{k} \otimes\!\!\rightarrow \tilde{C}(A)$.
7. $\Delta(\tilde{C}(\Delta(A))) = \tilde{C}(\Delta(A))$.
8. $\tilde{C}(\Delta(\bar{k} \otimes\!\!\rightarrow A)) \leq \Delta(\bar{k} \otimes\!\!\rightarrow \tilde{C}(A))$.
9. $\tilde{C}(A \vee B) = \tilde{C}(A) \vee \tilde{C}(B)$.
10. $\tilde{C}(\bar{k}) = \bar{k}$.
11. $\tilde{C}(\{p\})(q) = \tilde{C}(\{q\})(p)$.
12. $\tilde{C}(\neg\Delta(A \otimes\!\!\rightarrow \bar{k})) = \neg\Delta(\tilde{C}(A) \otimes\!\!\rightarrow \bar{k}))$.
13. $\tilde{C}(A) = \bigcup\{\tilde{C}(A_f) : A_f$ tiene soporte finito, y $A_f \preccurlyeq A\}$.

Por medio de la anterior enumeración de propiedades podemos reseñar los operadores mencionados en este capítulo de la siguiente forma:

$1+2+3$	=	operadores de clausura de Pavelka.
$1+2+3+4$	=	operadores de clausura $\otimes$-implicativos.
$1+2+3+4+9+10$	=	operadores de clausura basados en un $\otimes$-orden.
$1+2+3+4+9+10+11$	=	operadores de clausura basados en una relación de $\otimes$-similitud.
$1+2+3+4+5+7$	=	extensión canónica de un operador clásico.
$1+2+3+12+13$	=	extensión canónica de un operador clásico compactos.

Capítulo 7

Razonamiento No Monótono y Contrafáctico basado en Similitud

7.1 Introducción

La intención de este capítulo es estudiar la aplicabilidad del concepto de similitud, tal como ha sido concebido hasta ahora, a modelos de razonamiento no estándar tales como los no monótono y contrafáctico. Esto nos llevará a tratar dos tópicos íntimamente relacionados con ellos, como son: teoría de cambio y actualización de bases de conocimientos[1].

Lo que se conoce como razonamiento no monotónico aparece normalmente asociado al llamado "razonamiento de sentido común" y por ende con casi todas las áreas de la Inteligencia Artificial, que pretenden construir sistemas que reflejen la actividad del raciocinio humano. De algún modo podemos considerar al razonamiento no monótono inscripto en lo que Frege llamó, hace ya mas de un siglo, "ciencia del razonamiento puro", aún cuando, en un primer momento histórico, éste se identificó con el razonamiento deductivo "clásico". En el mismo sentido podemos suscribir a las lógicas no monótonas (LNM) dentro del espectro del cálculo de ideas, que imaginaba Leibnitz. Esto remarca la idea de que la no monotonía aparece como respuesta a las limitaciones que tienen los modelos clásicos para formalizar ciertos aspectos del razonamiento humano, pero siendo fiel a las motivaciones históricas.

Los problemas derivados de la monotonía pueden ser ejemplicados de la siguiente manera. Consideremos las dos expresiones:

"Los pájaros vuelan"
"Los pingüinos no vuelan"

clásicamente deberíamos inferir

"Los pingüinos no son pájaros"

lo cual contradice nuestro conocimiento sobre taxonomía animal. Por el contrario si impusiéramos la condición de que "los pingüinos son pájaros" obtendríamos un conjunto de sentencias inconsistentes. Obviamente lo que está ocurriendo es que los pingüinos son una excepción a la característica de volar de los pájaros. Una forma sencilla de resolver el problema, es cargar las precondiciones de la regla de caracterización de manera de "filtrar" las excepciones. En nuestro ejemplo eso sería reemplazar la primera expresión por:

[1] A lo largo de este capítulo supondremos que el lenguaje proposicional es finito, salvo en los casos en que explícitamente anunciemos lo contrario

"Los pájaros no pingüinos vuelan"

El inconveniente de esta solución es que requiere conocer a priori todas las excepciones (problema conocido en filosofía como *quetere parvidus*). Justamente, uno de los objetivos de las LNM es evitar el tener que lidiar con semejante carga proponiendo sistemas formales que soporten, sintáctica y semánticamente, expresiones del tipo

"Típicamente los pájaros vuelan".

Además de no satisfacer la propiedad del *contrarecíproco*, los patrones de inferencia no monótonos, en general, no aceptan otras características tales como *refuerzo del antecedente* y *transitividad*, cuyos contraejemplos pueden ser reformulados en términos del anterior. Por ejemplo, no parece admisible que asumiendo que "Los pájaros vuelan" inferir que "Los pájaros que están muertos vuelan" o a partir de aceptar que "los pingüinos son pájaros" y que "Los pájaros vuelan" concluir que "Los pingüinos vuelan". Los ejemplos subrayan la interdependencia de estas propiedades y la imposibilidad de tomar el condicional material a través del teorema de deducción como el operador a nivel del lenguaje que represente los patrones de inferencia no monotónicos.

Las lógicas de contrafácticos (desarrolladas, entre otros, por R. Stalnaker [Sta68] y D. Lewis [Lew73]) son también ejemplos de sistemas que no satisfacen las propiedades del contrarecíproco, refuerzo del antecedente y transitividad. Sin embargo, la motivación de las mismas son totalmente diferentes. En este caso se busca capturar modelos de razonamiento contrarios a los hechos (contrafactual) representado en oraciones del tipo "Si Napoleón hubiera ganado la batalla de Waterloo entonces hoy se hablaría más francés" o "Si Oswald no hubiera matado a Kennedy , entonces alguien lo habría hecho". Estos sistemas lógicos pretenden representar este tipo de condicionales mediante alguna conectiva lógica $>$ y dar condiciones de verdad (semántica) para su interpretación. Obviamente este tipo de sentencias tampoco pueden ser modeladas por un condicional material puesto que si tal fuera el caso al ser el antecedente falso, serían trivialmente verdaderas, lo cual no resulta deseable a priori. La diferencia de estas lógicas respecto de las no monótonas radica en que las contrafácticas, en general, satisfacen el axioma de "modus ponens" para el nuevo conectivo:

MP $(\phi > \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$,

que autoriza a pasar de los antecedentes a las conclusiones de las reglas. Esta propiedad es la que propició el fracaso de muchos de los intentos de usar los condicionales contrafácticos para representar afirmaciones prototípicas y reglas "default". Este hecho puede entenderse con el siguiente ejemplo. Supongamos que deseamos representar que "si mi auto tiene combustible y batería, normalmente arranca", mediante estos condicionales especiales:

(1) $Combustible \wedge Batería \ > Arranca.$

Sin embargo sabemos que existen circunstancias en las que, aún con combustible y batería en orden, el auto no arranca (por ejemplo, por tener un cable cortado):

(2) $Combustible \wedge Batería \ \wedge Cable - cortado > \neg Arranca$

En un sistema con MP, de (1) y (2) se puede inferir, que en cualquier circunstancia en la cual son verdaderos Combustible, Batería y Cable-cortado, se verifica:

(3) $Arranca$, y

(4) $\neg Arranca$

lo cual es contrario al objetivo buscado. El ejemplo establece claramente que cualquier sistema de lógica condicional que pretenda dar cuenta del razonamiento no monótono (RNM) no sólo no deben satisfacer la propiedad de refuerzo del antecedente, sino que tampoco pueden tener modus ponens. Pero en este caso, la lógica resulta demasiado débil para poder ser utilizada efectivamente

en la extracción de conclusiones por defecto. La interrelación entre estas dos propiedades (refuerzo y MP) ha sido ampliamente debatida en la literatura. Por ejemplo en los últimos trabajos de Alchourrón se clarifica bastante sobre los límites formales de la interdependencia entre modus ponens y refuerzo del antecedente en el contexto de lógicas condicionales [Alc94].

Asociado a la idea de buscar una forma de evaluar estos tipos de condicionales (que tratan de dar cuenta a nivel del lenguaje objeto de cierta sentencias "*Si ... Entonces ...* " del lenguaje natural), Ramsey propone en [Ram31] determinar la aceptabilidad de una fórmula $\phi > \psi$ en el contexto de una teoría T, haciendo el ejercicio de introducir la menor cantidad de cambios necesarios en T con el fin de aceptar consistentemente ϕ y entonces verificar si en ese nuevo contexto hay suficientes argumentos para sostener ψ [2]. Esta idea conlleva inmediatamente a asociar los recientes resultados de revisión de creencias y actualización de bases de conocimiento con los de razonamiento no monótono y contrafactual.

Lo que sigue del presente capítulo estará organizado de la siguiente forma. En las tres próximas secciones daremos sendas introducciones a las lógicas no monótonas, de contrafácticos y dinámica de cambio. En las siguientes tres mencionaremos nuestros aportes a cada uno de esos tópicos. Finalizaremos el capítulo con un análisis de los resultados presentados en relación con otros ya presentes en la literatura.

7.2 Lógicas no monótonas

Minsky señala que la lógica standard es monótona porque sus reglas de inferencia, que él llama permisivas, son en general del tipo "ψ es un teorema si $\phi_1 ... \phi_n$ son teoremas", donde agregar axiomas sólo puede hacer que más teoremas sean derivables y nunca invalidar uno previo.

Como fuera mencionado en el ejemplo introductorio, el problema parece sustentarse en que las descripciones de dominios razonablemente complejos son naturalmente incompletas, y que las apelaciones a asunciones, "defaults", etc. buscan "completarlas" llenando provisoriamente los "agujeros" con aserciones válidas, mientras no haya evidencia en contrario, lo que conduce a inferencias basadas en reglas "no permisivas" ("ψ es un teorema si $\phi_1 ... \phi_n$ son no teoremas"), una de cuyas instancias más conocida es:

$$Si \qquad \nvdash \varphi \qquad infiera \qquad \neg\varphi$$

Esto tiene, intrínsecamente, un problema de difícil (sino imposible) resolución: la no existencia de lo que se denomina teorías de prueba, salvo para el caso proposicional o bajo ciertas restricciones (Bossu y Siegel en [BS85]). Puesto que, si consideramos una lógica, como la de primer orden, cuyos no teoremas son no recursivamente enumerables (si lo fueran, los teoremas formarían un conjunto recursivo), resulta que no existe un algoritmo tal que, dada una fórmula φ, pueda establecer que no es teorema, aún en el caso de que esto sea así. Sin embargo, los inconvenientes de este tipo de razonamientos no se agotan allí, un ejemplo ilustrativo de las dificultades que subsisten, lo suministran Hanks y McDermott en [HM86] con el "shooting problem".

Un elemento común que se puede apreciar en varios formalismos propuestos es la apelación a cierto concepto de "minimalidad" (modelos mínimos, intersección de puntos fijos, extensiones minimales, etc). Shoham en [Sho86], propone una visión unificadora en base a dos perspectivas:

1. Priorizar las caracterizaciones semánticas por sobre las sintácticas, que son las predominantes en las lógicas "default", no monotónica y autoepistémica. La idea es fijar un lenguaje lógico no necesariamente de primer orden, y luego proveerlo de una semántica adecuada a la relación de derivación que cada aplicación puede necesitar.

[2] La frase textual es: "[I]f two pleople are arguing 'Si ϕ will ψ?' y both in doubt as to ϕ, they are adding ϕ hypothetically to their stock of knowledge y are arguing on that basis about ψ"

2. La relación de derivación en cuestión, debería estar definida en términos de "verdad en todos los modelos minimales de la axiomatización dada" donde el criterio de minimalidad sería dependiente de la aplicación.

Para Shoham, una axiomatización de un dominio de aplicación, junto con una caracterización de los modelos mínimos deseados, es una especificación suficiente para la relación de derivación no monotónica requerida.

Basado en estas ideas, en [Sho87], este autor propuso una teoría de modelos general para las inferencias no monótonas. Como ya fue mencionado en al capítulo 2, en la lógica clásica, una proposición ψ se sigue lógicamente de otra proposición ϕ, y lo notamos: $\phi \models \psi$ si y sólo si ψ se satisface en todos los modelos de ϕ. Es inmediato que con dicha definición la consecuencia lógica $\models$ es monótona, por ser los modelos de $\phi \wedge \chi$ un subconjunto de los de ϕ. Shoham sostiene que una noción de consecuencia lógica no monótona puede caracterizarse a partir de algún subconjunto de los modelos de ϕ: $\phi \mid\!\sim \psi$ si y sólo si ψ se satisface en los modelos "preferidos" de ϕ. Dada una lógica "standard" $\mathcal{L}$, Shoham construye una lógica Preferencial $\mathcal{L}_<$, añadiendo al conjunto de interpretaciones de $\mathcal{L}$, una relación de "preferencia" $<$ entre ellas. La relación de preferencia es un orden parcial y un mundo ν es preferible a otro mundo ω, si se considera a ν como "más normal" que ω. Así es posible, dado ϕ, concluir "por defecto" ψ , si todos los mundos "más normales" entre los ϕ-mundos, también satisfacen ψ. En otras palabras, ψ se sigue "por defecto" de ϕ en $\mathcal{L}_<$, si los ψ-mundos son un superconjunto de los ϕ-mundos "más normales". Esta noción de "normalidad" es una generalización de la Hipótesis de Mundo Cerrado y Circunscripción. Más aún, Shoham demuestra que varios de los sistemas no monótonos conocidos (en particular Circunscripción, lógica Autoepistémica y el propuesto en Bossu y Siegel ([BS85]) pueden tener una semántica en términos de una relación de preferencia adecuada. En Makinson ([Mak89]) se generaliza la definición de las estructuras de modelos preferenciales. Una estructura M es una terna : $M = \langle W, \models, < \rangle$, donde W es un conjunto arbitrario no vacío ("estados" o "mundos"), $<$ una relación (de "preferencias") en W y $\models$ una relación (de "satisfactibilidad") entre las sentencias del lenguaje $\mathcal{L}$ y los elementos de W. Una estructura de modelo preferencial M induce una relación de inferencia $\mid\!\sim$ de la siguiente manera: $\phi \mid\!\sim \psi$ si y sólo si, para todo $\omega \in W$, si $\omega \models_< \phi$, (satisface preferencialmente ϕ según la relación $<$), entonces $\omega \models \psi$, donde $\omega \models_< \phi$ si y sólo si $\omega \models \phi$ y no existe $\omega' \in W$, con $\omega' < \omega$ tal que $\omega' \models_< \phi$. Como es indicado por Makinson en [Mak94], esta casi arbitraria estructura (en el sentido que W es cualquier conjunto, $<$ es una relación cualquiera entre fórmulas y $\models$ es una relación arbitraria entre elementos de W y fórmulas) tiene un buen comportamiento puesto que satisface las condiciones de inclusión, idempotencia y corte (obseración 3.4.2 pag. 73). La caracterización mas precisa de los elementos del modelo permite definir distintas familias de relaciones de inferencia inducidas, y estudiar las propiedades que poseen. Un ejemplo son los modelos preferenciales "stoppered" (se dice que $M = \langle W, \models, < \rangle$ es "stoppered" si, dado cualquier subconjunto V de W y un elemento ν en él, o bien ν es $<$-minimal, o bien existe ν' en V, $\nu' < \nu$ y ν' es minimal). Con estas herramientas, en [Mak94], se analizan diferentes sistemas de RNM propuestos en la literatura.

Casi simultáneamente a estos enfoques semánticos D. Gabbay, en [Gab85] se preguntaba: dada una relación $\mid\!\sim$ entre enunciados, cuáles serían las propiedades formales que podrían caracterizarla como una relación de inferencia de un sistema no monótono. El punto de partida para ese análisis fue tomar una de las caracterizaciones posibles de la noción de consecuencia sintáctica $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$, que se lee "$\psi$ es conclusión sintáctica de las premisas $\phi_1, \ldots, \phi_n$", la cual definicionalmente corresponde a la existencia de una secuencia de enunciados del lenguaje utilizado $\mathcal{L}$, tal que el último de la secuencia es ψ y donde los enunciados de la secuencia o bien son los ϕ_i $(1 \leq i \leq n)$ o bien se van construyendo a partir de los anteriores en base a reglas de inferencia. Una presentación de las propiedades estructurales básicas de dicha noción de consecuencia, es la siguiente:

Reflexividad: $\phi_1, \ldots, \phi_n, \psi \vdash \psi$

Corte: Si $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \chi$ y $\phi_1, \ldots, \phi_n, \chi \vdash \psi$ entonces $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$

Monotonía: Si $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ entonces $\phi_1, \ldots, \phi_n, \chi \vdash \psi$

Nótese que estas tres propiedades las cumple una noción de inferencia sintáctica aún cuando no existan reglas de inferencia. Por lo tanto, la propia definición de consecuencia sintáctica tiene incorporada la idea de monotonía, y sólo tolerará reglas de inferencia "libres de contexto". Gabbay arriba a la conclusión de que una noción de inferencia no monótona requiere otra caracterización estructural básica que no incluya la tercer regla y que sea correlato de una consecuencia sintáctica que admita reglas globales. Con este objetivo, Gabbay propuso, para una relación de inferencia no monótona $\mid\!\sim$, mantener Reflexividad y Corte y reemplazar Monotonía por una forma más débil, que fuera bautizada en [Mak89] como monotonía cautelosa ('cautious monotony'):

Monotonía Cautelosa: Si $\phi_1, \ldots, \phi_n \mid\!\sim \chi$ y $\phi_1, \ldots, \phi_n \mid\!\sim \psi$ entonces $\phi_1, \ldots, \phi_n, \chi \mid\!\sim \psi$

Reflexividad expresa la idea de que toda fórmula se deduce a sí misma. Si bien esta propiedad parece mas que razonable, algunos sistemas paraconsistentes (i.e. que permiten trabajar con algún tipo de inconsistencia interna en una base de conocimiento sin trivializar la inferencia) como el que propone Benferhat et al. ([BDP97]) en el contexto de una semántica posibilística, no la satisfacen plenamente.

Corte representa el hecho de que una conclusión plausible es tan segura como los supuestos en los que está basada, y por lo tanto se puede "acumular" en las premisas. En otras palabras, no hay pérdida de confianza en la cadena de derivaciones plausibles. Esto no ocurre en las inferencias de tipo probabilístico, y es un hecho que este tipo de inferencias no satisface Corte. Similar situación se plantea en los sistemas de infencia basados en similitud mencionados en el Capítulo 2.

Monotonía Cautelosa expresa el hecho de que incorporar una nueva premisa, cuya verdad había sido concluída plausiblemente de los conocimientos previos, no debería invalidar las viejas conclusiones. Siguiendo a Makinson, se define una relación de inferencia como *cumulativa* si y sólo si satisface Reflexividad, Corte y Monotonía Cautelosa. En particular, la clase de las relaciones cumulativas coincide con las inducidas por las estructuras de modelos preferenciales "stoppered" (observación 3.4.3, en [Mak94], pag. 74).

Como fue mencionado en el Capítulo 6, los distintos sistemas deductivos conocidos se obtienen agregando diversas propiedades a un conjunto mínimo. Ese camino es el seguido por Kraus, Lehmann y Magidor ([KLM90]), al caracterizar varias familias de relaciones de consecuencia preferenciales en términos sintácticos y semánticos. Para ello, aumentan el conjunto de propiedades propuesto por Gabbay, de modo de tratar con un lenguaje que posea las conectivas clásicas. Cada familia de relaciones se identifica con cierto tipo de modelos de tipo preferencial. A la vez, todas las relaciones de consecuencia definidas por los distintos modelos de una dada familia están cerradas por un determinado conjunto de reglas de inferencia que las caracterizan sintácticamente. Las dos familias que han sido más tratadas desde entonces son la Preferencial y la Racional. El sistema P (preferencial) presenta las propiedades:

Reflexividad:
$\phi \mid\!\sim \phi$.

Preservación de Equivalencia Lógica a Izquierda
Si $\models \phi \leftrightarrow \psi$ y $\phi \mid\!\sim \chi$ entonces $\psi \mid\!\sim \chi$

Debilitamiento a Derecha
Si $\models \chi \rightarrow \psi$ y $\phi \mid\!\sim \chi$ entonces $\phi \mid\!\sim \psi$.

Conyuntividad a Derecha
Si $\phi \mid\!\sim \psi$ y $\phi \mid\!\sim \chi$ entonces $\phi \mid\!\sim \psi \wedge \chi$.

Cumulatividad
Si $\phi \mid\!\sim \psi$ y $\psi \models \phi$ entonces $\phi \mid\!\sim \chi$ si y sólo si $\psi \mid\!\sim \chi$.

Disyuntividad a Izquierda
Si $\phi \mid\!\sim \psi$ y $\chi \mid\!\sim \psi$ entonces $\phi \vee \chi \mid\!\sim \psi$

y resulta correcto y completo respecto a la familia de modelos prefenciales "stoppered" y tales que en cada uno de ellos la relación $\models$ respeta a todas las conectivas veritativas funcionales del lenguaje $\mathcal{L}$ (i.e. para todo $\omega \in W$ y ϕ y ψ en $\mathcal{L}$, $\omega \models \neg\phi$ si y sólo si $\omega \not\models \phi$ y $\omega \models \phi \wedge \psi$ si y sólo si $\omega \models \phi$ y $\omega \models \psi$). Además, en el sistema P la regla de *Corte* es una regla derivada, lo que permite definir a la operación de inferencia caracterizada por el sistema P como cumulativa. Un sistema es racional (R), si está caracterizado por todas las reglas de P, más la siguiente de monotonía racional ('rational monotony'):

Monotonía Racional
Si $\phi \mid\!\sim \psi$ y $\phi \not\mid\!\sim \neg\chi$ entonces $\phi \wedge \chi \mid\!\sim \psi$

que expresa, a juicio de los autores, el grado más alto de monotonía compatible con una noción de inferencia no monótona. Este sistema es correcto y completo respecto al conjunto de todos los modelos preferenciales "stoppered", con $\models$ respetando las conectivas y tal que la relación de preferencia es *ranqueada* (propiedad también conocida como *modular* y definida como: si $\omega < \nu$ y $\upsilon \not< \nu$ entonces $\omega < \upsilon$).

Varios autores han observado que los modelos preferenciales (y por tanto los sistemas inferenciales que de ellos se derivan) no satisfacen la siguiente razonable propiedad:

Preservación de Consistencia:
Si $\phi \mid\!\sim \bot$ entonces $\phi \models \bot$.

la cual establece que un sistema no monótono genera una inconsistencia sólo si ésta se generaba clásicamente. En [GM94] es mostrado que el sistema (R) extendido con la anterior propiedad de preservación de consistencia es correcto y completo respecto de la familia de modelos que ellos llaman "elegantes" (nice) y se corresponden con los anteriores modelos ranquedos que además satisfacen la propiedad de "amplitud" (ample) con respecto a la noción de consecuencia lógica clásica Cn definida como: para toda proposición ϕ consistente respecto a Cn, hay un $\omega \in W$ tal que $\omega \models \phi$ (teorema 3.8). Sin embargo, en dicho trabajo este es un resultado marginal.

El principal objetivo del mismo es dar sustento formal a la perspectiva epistémica, intuitivamente plausible según ellos, de que las expectativas que un agente tiene acerca de diferentes aspectos del mundo tengan distintas intensidades y/o importancia. Para formalizar esa idea, Makinson y Gärdenfors asumen la existencia de un orden $\leq^E$ entre las sentencias de un lenguaje $\mathcal{L}$. Así, dadas dos sentencias ϕ y ψ, $\phi \leq^E \psi$ debería ser interpretado como "ψ es al menos tan esperado como ϕ" o "ϕ es al menos tan sorprendente como ψ" (escribiremos"$\phi <^E \psi$" para representar "not $\psi \leq^E \phi$"). Makinson y Gärdenfors enuncian tres propiedades, las cuales argumentan deben ser verificadas por cualquier ordenamiento razonable de sentencias que busque representar un orden de expectativas entre ellas. A continuación las presentamos y comentamos:

dominancia Si $\phi \models \psi$, entonces $\phi \leq^E \psi$.
Este axioma garantiza cierta coherencia, en el sentido que una sentencia ψ tiene que ser al menos tan importante como los argumentos que la sostienen lógicamente. En particular valdrá reflexividad ($\phi \leq^E \phi$).

conyuntividad $\phi \leq^E (\phi \wedge \psi)$ o $\psi \leq^E (\phi \wedge \psi)$.
Observe que en concordancia con dominancia esta propiedad establece que: $\phi \approx^E (\phi \wedge \psi)$ o $\psi \approx^E (\phi \wedge \psi)$. Lo cual establece que el orden epistémico de una conyunción es equivalente al menor de los órdenes de sus conyuntos.

transitividad Si $\phi \leq^E \psi$ y $\psi \leq^E \chi$, entonces $\phi \leq^E \chi$.
Esta propiedad, junto con las dos anteriores, establece que la relación entre fórmulas será un preorden total.

Note que las tres condiciones implican conectividad ($\phi \leq^E \psi$ o $\psi \leq^E \phi$), lo que es considerado por varios autores como un requerimiento epistémico demasiado fuerte (para algunos de ellos equiparable con el de omnisciencia) debido a que impone que todo par de fórmulas sea comparable. Es relevante mencionar que esos tres axiomas son parte de las cinco condiciones usadas en [Gär88] y [GM88] para definir la noción de *atrincherarmiento epistémico*[3] empleada para dar una perspectiva alternativa de la lógica de cambio de teoría. Volveremos sobre este aspecto más adelante.

Esa clase de órdenes pueden ser utilizados para determinar cuando ϕ implica no monótonicamente a ψ, como el caso en el que ψ se deduce clásicamente desde ϕ en conyunción con todas las proposiciones que son más esperables. De acuerdo a Makinson y Gärdenfors, la forma natural de seleccionar las fórmulas que "acompañarán" a ϕ para verificar si se deriva ψ no monotónicamente, consiste en tomar el conjunto de ellas cuyo orden epistémico es estrictamente mayor que $\neg\phi$. Eso motiva la siguiente definición.

Definición 7.1 *Una relación $\mid\!\sim$ entre proposiciones es una relación de consecuencia* comparativa *(o de expectativa) si y sólo si hay un orden $\leq^E$ satisfaciendo transitividad, dominancia y conyuntividad tal que la siguientes condiciones suceden:*

$$\phi \mid\!\sim \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \phi \models \psi \quad \textit{o hay una proposición } \chi \textit{ tal que } \phi \wedge \chi \models \psi \textit{ y } \neg\phi <^E \chi.$$

En [GM94] ha sido demostrado que estas relaciones comparativas entre fórmulas satisfacen las propiedades de Supraclasicalidad, Preservación de Equivalencia Lógica a Izquierda, Conyuntividad a Derecha, Preservación de Consistencia, Corte, Disyuntividad a Derecha y Monotonía Racional y viceversa. Así, esas propiedades caracterizan a la familia de relaciones de consecuencia comparativas. Teniendo en cuenta los resultados mencionados más arriba, resulta claro que para cada operador de inferencia generado por un orden epistémico también existe un modelo *elegante* que lo caracteriza semánticamente y viceversa (teorema 3.9 en [GM94]).

Una forma alternativa de definir un orden $\leq^F$ entre sentencias fue propuesto en [FHL94], al cual se lo denominó *orden de posibilidad* y del cual se requiere que satisfaga las propiedades de transitividad, dominancia y:

disyuntividad $\phi \vee \psi \leq^F \phi$ o $\phi \vee \psi \leq^F \psi$

la cual estable una propiedad dual a conyuntividad y que en presencia de dominacia determina que $\phi \vee \psi \approx^F \phi$ o $\phi \vee \psi \approx^F \psi$. En este caso, $\phi \leq^F \psi$ denota que ψ es al menos tan posible como ϕ.

Tal como es apuntado en [FHL94], el dual de un orden de posibilidad, definido como $\phi \leq^E \psi$ si y sólo si $\neg\psi \leq^F \neg\phi$, es un orden de expectativa en el sentido de Gärdenfors y Makinson. Así, si la condición $\neg\phi <^E \chi$ es cambiada por $\neg\chi <^F \phi$ en la Definición 7.1, obtenemos una equivalente relación de consecuencia comparativa. Más aún, en [FHL94] es probado que las siguientes tres expresiones son equivalentes para un orden de posibilidad $\leq^F$:

1. hay una proposición χ tal que $\phi \wedge \chi \models \psi$ y $\neg\chi <^F \phi$.
2. $\phi \wedge \neg\psi <^F \phi$.
3. $\phi \wedge \neg\psi <^F \phi \wedge \psi$.

Por lo tanto a través de esas condiciones podemos dar diferentes (pero equivalentes) versiones de la Definición 7.1 p.ej. $\phi \mid\!\sim_F \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \phi \models \psi$ ó $\phi \wedge \neg\psi <^F \phi \wedge \psi$.

Terminaremos esta sección destacando que han sido tres los enfoques a través de los cuales hemos presentados las relaciones de consecuencia no monótona: la semántica basada en un orden entre mundos posibles; la metalingüística basada en la descripción en términos de reglas de secuentes de sus propiedades; la epistémica basada en un orden de preferencia entre fórmulas. Estas tres caracterizaciones volverán a aparecer cuando demos cuenta tanto de los contrafácticos como de las teorías de revisión de creencias y actualización de bases de conocimiento.

[3] En ingles epistemical entrenchment

7.3 Lógicas de contrafácticos

Lewis en [Lew73] inicia su análisis de los contrafácticos con el siguiente ejemplo "Si los canguros no tuvieran cola serían muy inestables y se caerían". Él asegura que ese enunciado debe ser interpretado como afirmando que en las condiciones más similares al contexto donde dicha sentencia es enunciada y tales que efectivamente los canguros no posean cola, será el caso que estos mamíferos serán inestables y que se caerán con facilidad. Esencialmente el problema que se plantea en este contexto es el de formalizar lógicamente los enunciados condicionales usados en el lenguaje natural que se caracterizan por tener un antecedente que es falso en el momento de ser emitido (de allí el nombre de contrafáctico) y cuya objetivo es establecer una conclusión en condiciones hipotéticas (las de las premisas). En el caso de este tipo de condicionales parece claro que el hecho de poseer un antecedente falso no es condición suficiente para que la proposición condicional sea considerada verdadera. Ejemplos como el mencionado muestran que estos serán considerados verdaderos o falsos, según las creencias u opiniones que el hablante tenga respecto a su contenido significativo. Esto conlleva directamente a descartar la posibilidad de dar sus condiciones de verdad en base a tablas tal como sucede con los operadores veritativos funcionales.

Esta situación, someramente descrita, ha llevado a muchos lógicos a enfocar el problema de interpretación de los contrafácticos desde una perspectiva modal haciendo uso de la semántica de Kripke.

En los años recientes, se han hecho intentos por adaptar la semántica de mundos posibles de la lógica modal ordinaria, para proveer un análisis de los condicionales contrafácticos. La idea es tratar una proposición de la forma "Si fuera el caso de ϕ entonces sería el caso de ψ" como verdadera en un mundo ω si y sólo si es verdadera en el mundo (o los mundos, o "la mayoría" de los mundos) que se "parecen" a ω. El enfoque hace uso entonces de una función $f(\phi,\omega)$, conocida como función de ajuste, o función de selección, la cual actúa, dada una proposición ϕ y un mundo ω, devolviendo un mundo en particular o un conjunto de mundos (dependiendo de cual sea el enfoque que se utilice) en los cuales ϕ es verdadero pero que son en alguna forma, minimalmente diferentes de ω. En ese contexto, la verdad de una proposición condicional $\phi > \psi$ en un mundo ω es asumida cuando el consecuente ψ es verdadero en todos los mundos seleccionados por la función de selección, o sea en $f(\phi,\omega)$ y falso en caso contrario. Las diferentes teorías de condicionales contrafácticos surgen a través de determinar las propiedades que dicha función de selección debe satisfacer. Así, por ejemplo, Stalnaker ([Sta68]) considera una semántica constituida por:

1. Un conjunto W de mundos posibles;
2. Una relación de accesibilidad R entre elementos de W, que es reflexiva pero que puede tener otras propiedades que originarán distintos sistemas;
3. Un mundo absurdo designado por λ en el cual todas las contradicciones son verdaderas;
4. La función de selección $f : \mathcal{L} \times W \mapsto W \cup \{\lambda\}$, a la cual se le requiere satisfacer las siguientes condiciones para todo antecedente ϕ y ϕ', y mundo ω:
   (a) $f(\phi,\omega)$ pertenece a los modelos de ϕ, es decir la verdad de un condicional debe ser evaluada en un único ϕ-mundo;
   (b) $f(\phi,\omega) = \lambda$ si y sólo si no hay ningún mundo posible respecto de ω en el que ϕ sea verdadero (en particular si el antecedentes es inconsistente);
   (c) Si ϕ es verdadero en ω, entonces $f(\phi,\omega) = \omega$, i.e., si la proposición condicional tiene un antecedente que es verdadero en el mundo de referencia ω entonces la función de selección debe elegirlo como único contexto para evaluar el condicional. Esto resulta muy intuitivo si tenemos en cuenta que que el mundo a seleccionar debería ser el más similar al mundo de referencia y en tal sentido (como ya fue asumido en nuestra disertación) parece legítimo y natural que la función elija en el caso en cuestión al mundo actual, puesto que no puede haber un mundo más parecido a él que él mismo.

(d) Si ϕ es verdadero en $f(\phi', \omega)$ y ϕ' es verdadero en $f(\phi, \omega)$ entonces $f(\phi', \omega) = f(\phi, \omega)$. O sea que si ϕ es verdadero en un mundo seleccionado donde ϕ' es verdadero y viceversa, entonces el mundo seleccionado para ϕ' es el mismo que para ϕ. De ahí que si una función de selección establece al mundo ν como más parecido a ω que el mundo υ, ninguna otra instancia de la función de selección podrá determinar lo contrario, i.e., que υ es más parecido a ω que lo que lo es ν.

Las condiciones (a) y (b) de f, sugieren que no hay otras diferencias entre el mundo de referencia y el seleccionado fuera de las implicadas por el antecedente del condicional y que la función de selección está basada en un orden de mundos posibles según su parecido al mundo de referencia. Las condiciones (c) y (d) establecen precisamente un orden total entre los mundos posibles, en el cual el mundo de referencia precede a todos los demás.

5. Una función [ ] que asigna a cada sentencia del lenguaje ϕ un subconjunto de W (todos los mundos donde ϕ es verdadera).

En el trabajo mencionado, Stalnaker caracteriza la lógica correspondiente a esta semántica (a la que denomina **C2**) mediante un conjunto de axiomas y reglas de inferencia de la que nosotros daremos una formulación equivalente debida a Nute ([NC00]):

Tau Tautologías de la lógica proposicional.

ID $\phi > \phi$.

MP $(\phi > \psi) \to (\phi \to \psi)$.

MOD $(\neg\phi > \phi) \to (\psi > \phi)$.

CSO $[(\phi > \psi) \wedge (\psi > \phi)] \to [(\phi > \chi) \leftrightarrow (\psi > \chi)]$.

CV $[(\phi > \psi) \wedge \neg(\phi > \neg\chi)] \to [(\phi \wedge \chi) > \psi)]$.

CEM $(\phi > \psi) \vee (\phi > \neg\psi)$.

y las siguientes reglas de inferencias.

MP Si $\vdash \phi$ y $\vdash \phi \to \psi$ inferir $\vdash \psi$.

RCK Si $\vdash (\phi_1, \ldots, \phi_n) \to \psi$ inferir $\vdash [(\chi > \phi_1) \wedge \cdots \wedge (\chi > \phi_n) \to (\chi > \psi)$ con $n \geq 0$.

Nótese que algunos de estos axiomas y reglas de inferencia ya aparecieron en el Capítulo 3.

Lewis en [Lew73] presenta una semántica alternativa para condicionales contrafácticos que aborda los problemas que surgen de la propuesta por Stalnaker al satisfacer el principio **CEM** del tercero excluído. Así, Lewis trata de abandonar dos de los principales compromisos que asumía aquel enfoque: el *supuesto del límite* (en inglés Limit Assumption) que establece que para todo mundo ω y antecedente ϕ existen mundos posibles más cercanos (o similares) a ω donde se satisface ϕ; y la *unicidad* de dicho conjunto. Para ello, Lewis primero reduce la anterior noción de modelo a un triplete $\langle W, f, [\,]\rangle$ donde W y [ ] representan lo mismo que en aquel caso y f es una función de selección en $\mathcal{L} \times W \mapsto \mathcal{P}(W)$ y que satisface las siguientes propiedades:

1. $f(\phi, \omega)$ está incluido en los modelos de ϕ, es decir se cambia la idea de pertenencia de Stalnaker por la de inclusión;

2. Si ϕ es verdadero en ω, entonces $f(\phi, \omega) = \omega$;

3. Si $f(\phi, \omega) = \emptyset$ entonces para todo proposición ψ entonces $f(\psi, \omega) \bigcap [\phi] = \emptyset$;

4. Si ϕ es verdadero en $f(\phi', \omega)$ y ϕ' es verdadero en $f(\phi, \omega)$ entonces $f(\phi', \omega) = f(\phi, \omega)$;

5. $f(\psi,\omega) \bigcap [\phi] \neq \emptyset$, entonces $f(\psi \wedge \phi, \omega) \subseteq f(\phi, \omega)$.

Esta primera propuesta de Lewis, donde la idea de mundo absurdo λ es representada por la de conjunto vacío y la idea de selección unitaria es reemplazada por una múltiple, salva algunos inconvenientes de la propuesta por Stalnaker. Sin embargo, Lewis termina cuestionando esta semántica de función de selección por asumir por definición, el supuesto de límite, que él considera tan insatisfactorio como el supuesto de unicidad. Consecuentemente, Lewis hace una propuesta superadora que denominó semántica de sistemas de esferas y que consiste en un triplete $\langle W, \$, [\,] \rangle$ donde W y $[\,]$ representan lo mismo que en las anteriores semánticas y \$ es una función con dominio W y rango 2^{2^W} tal que $\$(\omega)$ es un conjunto de subconjuntos de mundos satisfaciendo:

1. $\$(\omega)$ es un sistema anidado de conjuntos llamados esferas (**SP**), i.e., $\$(\omega)$ está totalmente ordenado por inclusión.

2. $\$(\omega)$ es cerrado bajo unión e intersección[4].

En particular:

- Si $\bigcup\{\mathbf{SP} \mid \mathbf{SP} \in \$(\omega)\} = W$ para todo $\omega \in W$ entonces el sistema de esferas es llamado *universal.*

- Si ω pertenece a todo $\$(\omega)$, entonces el sistema de esferas es llamado *débilmente centrado.*

- Si $\{\omega\} \in \$(\omega)$ para todo mundo ω de W, el sistema de esferas es referido como *centrado.*

- Si $\$(\omega) = \$(\omega')$ para todo par de mundos ω, ω' en W, entonces se dice que el sistema de esferas es *absoluto.*

En este contexto, se afirmará que $\phi > \psi$ es verdadero en ω si y sólo si $\$(\omega) \cap [\phi]$ es vacío o si hay una esfera $\mathbf{S} \in \$(\omega)$ tal que $\mathbf{S} \cap [\phi] \neq \emptyset$ y $\mathbf{S} \cap [\phi] \subseteq [\psi]$. Es importante remarcar que en los casos en que existe un conjunto de ϕ-mundos más cercanos a ω, las condiciones de verdad en ω para un condicional con antecedente ϕ bajo la semántica de esferas centradas o bajo la de función de selección de Lewis, son equivalentes. Esta "equiparación" entre semántica de sistemas de esferas centradas y de función de selección es aún más relevante si se tiene en cuenta que ambas caracterizan a la misma lógica, i.e., el supuesto del límite no es discriminable desde el lenguaje objeto.

Lewis llamó **VC** al sistema lógico que es correcto y completo respecto a esas dos semánticas, el cual es un subsistema propio de **C2** consistente en reemplazar el axioma **CEM** por el siguiente:

CS $(\phi \wedge \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$.

Para Lewis este es el sistema que recoge más apropiadamente la noción de condicional contrafáctico y en su libro le dedica ese rol preponderante. Sin embargo no todos los autores coinciden con tal distinción y proponen modelos alternativos. A continuación, señalamos dos de estas propuestas a modo de ejemplos ilustrativos. La primera corresponde a Pollock ([Pol76]) quien rechaza la tesis **CV**. La lógica condicional que este autor llama **SS** es el más pequeño conjunto de fórmulas cerrado bajo todas las reglas listadas para **VC** y que contiene todas sus tesis salvo que **CV** es reemplazada por:

CA $[(\phi > \psi) \wedge (\chi > \psi)] \rightarrow [(\phi \vee \chi) > \psi]$.

Esto da como resultado un sistema propiamente más débil que el de Lewis dado que **CA** es un teorema de **VC**. Obviamente, **SS** no está determinado por una semántica donde la función de selección satisface (1)-(5), sino que debemos reemplazar la condición (5) por:

[4]Si Σ es un subconjunto de $\$(\omega)$ entonces tanto $\bigcap\{\mathbf{SP} \mid \mathbf{SP} \in \Sigma\}$ como $\bigcup\{\mathbf{SP} \mid \mathbf{SP} \in \Sigma''\}$ pertenecen a $\$(\omega)$

5′. $f(\phi \vee \psi, \omega) \subseteq f(\phi, \omega) \bigcup f(\psi, \omega)$.

Entonces **SS** está determinado por la clase de todos los modelos de la forma $\langle W, f, [\,]\rangle$ donde W y $[\,]$ son como antes y f satisface las condiciones (1)-(4) de Lewis y (5'). Como consecuencia de estos cambios en la semántica, resulta que la noción de comparación subyacente es un orden parcial y no uno completo tal como sugieren Lewis y Stalnaker, i.e., podemos tener dos mundos ω y ν tal que su similitud a un tercero υ es incomparable.

Otro sistema de lógica condicional fue propuesto por Åqvist en [Åqv73]. Su principal motivación era presentar un sistema lógico que captura la idea de que los contextos que son seleccionados para evaluar una sentencia condicional no son los "más" similares sino los "suficientemente" similares al mundo de referencia. Semánticamente, eso remite a abandonar la condición (2) sobre la función de selección y reemplazarla por:

2′. Si ϕ es verdadero en ω, entonces $\omega \in f(\phi, \omega)$.

Así, la familia de todos los modelos $\langle W, f, [\,]\rangle$ donde W y $[\,]$ son como antes y f satisface las condiciones (1) y (3)-(5) de Lewis, y (2') caracteriza a la lógica llamada **VW** que sólo se distingue de **VC** por no contener a la tesis **CS**. Este sistema también es mencionado por Lewis y puede ser caracterizado en términos de la semática de esferas a través de la familia de sistemas débilemente centrada.
Para terminar la presentación de las nociones básicas de contrafácticos, debemos mencionar dos sistemas que caracterizaremos más tarde y que son extensiones conservativa del sistema VC

Hasta aquí hemos mencionado los principales sistemas de lógicas contrafáticas. Ahora comentaremos su relación con las LNM.

Como ya fuera mencionado en la introducción ha habido varios intentos de representar los "defaults" con un conectivo condicional especial inspirado en las lógicas de contrafácticos. Nute en [Nut80] intentó construir un razonador no monótono por medio de un demostrador de teoremas para dichas lógicas. La idea de Nute era reconstruir afirmaciones prototípicas y "reglas por defecto" del tipo "típicamente los pájaros vuelan", como: $\forall x(Pajaro(x) > Vuela(x))$. El atractivo original del uso de este tipo de sistemas lógicos estaba fundado en el hecho de que los mismos no satisfacen las propiedades de refuerzo del antecedente, transitividad y contraposición. Sin embargo, en [Nut84] Nute abandona su intento, ya que en estas lógicas condicionales (LCOND) "clásicas" contienen el axioma de *modus ponens*, que como ya fuera ejemplificado en la introducción, constituye un contrasentido para la no monotonía.

Otros autores siguieron trabajando en esa línea. Por ejemplo, Delgrande en [Del87], desarrolla el sistema condicional N, sin el axioma **MP**, para la representación de propiedades prototípicas. Este sistema también está en la línea de los sistemas de representación de la obligación condicional (ver [Wri86], [Han86] y las críticas en [Alc96] y [BFR+99]). El sistema N es el conjunto de fórmulas en un lenguaje condicional que contiene a los axiomas **ID**, **CV**, **CA**

CC $[(\phi > \psi) \wedge (\phi > \chi)] \rightarrow (\phi > (\psi \wedge \chi))$

RT $\vdash \phi > \psi \rightarrow ((\phi \wedge \psi) > \chi) \rightarrow (\phi > \chi))$

y cerrado por la regla

RCM Si $\vdash \psi \rightarrow \chi$, de $\phi > \psi$ se sigue $\phi > \chi$.

Nótese que **CC** y **RT** son teoremas del sistema **VC** de Lewis y que **RCM** es una regla derivada en dicho sistema. Además es interesante observar la similitud entre estos cinco axiomas y las reglas de Reflexividad, Monotonía Racional, Disyuntividad a Izquierda, Conyuntividad a Derecha, y Corte, del sistema R de Kraus, Lehmann y Magidor, así como entre la regla **RCM** y la de debilitamiento a derecha de ese mismo sistema. Sin embargo, hay que señalar como restricción en estas comparaciones, que el signo $\mid\!\sim$, no permite anidamiento (ocurrencias iteradas), ya que está

reflejando una noción metalingüística de consecuencia. Por lo tanto, una correspondencia con el condicional especial $>$ de las lógicas condicionales, sólo debería tener en cuenta aquellas fórmulas $\phi > \psi$ donde ni ϕ ni ψ contienen a su vez el símbolo $>$ (fórmulas no anidadas o 'flat'). Por otra parte, desde el punto de vista semántico, la verdad de un condicional $\phi > \psi$ en un mundo de referencia ω se establece cuando ψ es verdadero en ciertos ϕ-mundos "seleccionados", respecto de ω. Pero en las LNM no aparece la noción de mundo de referencia, con lo que la relación de preferencia entre mundos es única en cada modelo preferencial (algo que remite a los modelos absolutos de Lewis). A partir de los trabajos de Arlo Costa y Carnota (por ejemplo [ACC89]) se comenzaron a establecer formalmente los primeros resultados que conectan sistemas de lógicas condicionales y los sistemas de tipo preferencial de las LNM. Posteriormente estas conexiones fueron extendidas por Arlo Costa y Shapiro en [ACS92]. Otro interesante aporte en esa dirección es ofrecido por Boutelier en [Bou92].

Más allá de las cuestiones formales de uno u otro enfoque condicional (i.e., el basado en reglas metalingüística y el basado en un conectivo nuevo en el lenguaje objeto), ambos comparten un problema, que se liga a la diferencia existente entre lógicas de Contrafácticos y lógicas para Condicionales No Monótonos (tanto en al campo de IA, como en el de las obligaciones legales): el problema del Modus Ponens del condicional. En [Rei87], se señalaba, a propósito del trabajo de Delgrande: "...As Delgrande observes, one motivation for considering conditional logics is that they allow us to reason about typicality within the logic....Unfortunately, for our purposes,these logics...are extremely weak. For example, modus ponens cannot be a rule of inference for conditional statements. This is so puesto que otherwise, from $\phi > \chi$, $\phi \wedge \psi > \neg\chi$ y $\phi \wedge \psi$ we could derive both χ y $\neg\chi$. This failure of modus ponens means that we can not infer default conclusions...Despite these short comings, a few researchers have proposed basing nonmonotonic reasoning systems on such logics. In all cases, nonmonotonicity is achieved by pragmatic considerations affecting how the logic is used. Unfortunately, this destroys the principled semantics on which these logics were originally based, so it is unclear what the advantages are of pursuing this approach to nonmonotonic reasoning...". El condicional no monótono no sólo no debe poseer refuerzo del antecedente, sino que tampoco puede tener modus ponens. Pero en este caso, la lógica resulta demasiado débil para poder ser efectivamente utilizada en la extracción de conclusiones por defecto. Desde el punto de vista semántico, en una lógica condicional con **MP** los mundos seleccionados se caracterizan como los "más próximos" al de referencia en los cuales ϕ es verdadero. En un extremo, si el mundo de referencia ω es un ϕ-mundo, el seleccionado será el mismo ω. En cambio, en sistemas sin **MP**, que como se vio arriba resultan los adecuados para representar "defaults", los mundos seleccionados que se pueden interpretar como los "más normales" o "menos excepcionales" referidos a una situación dada se definen como los "más próximos" posibles de los mundos "absolutamente normales" (donde no ocurren excepciones). Ésto los caracteriza como los "más próximos" a los mundos sin excepciones y no como los "más próximos" al mundo real, como es el caso de los sistemas con MP, del tipo de los contrafácticos. Este mismo razonamiento se puede hacer respecto de las lógicas de la obligación condicional, en el campo deóntico: los mundos "absolutamente normales" son los "mundos ideales" donde todas las obligaciones y deberes son respetados. Las únicas conclusiones que se pueden extraer con los condicionales no monótonos (sistemas de LCOND sin MP), son conclusiones en los mundos ideales o "más normales" (para un análisis más detallado, ver [Alc96; **?**]). Tanto en las LNM preferenciales P y R, como en las LCOND correspondientes es válida esta regla (o teorema) de "modus ponens debilitado": (WMP) Si $true \mid\!\sim \phi$, y $\phi \mid\!\sim \psi$ entonces $true \mid\!\sim \psi$. El (WMP) nos dice que si ϕ es verdadero en los mundos'absolutamente más preferidos' (que no suelen incluir al actual), entonces, de la verdad de la aserción condicional $\phi \mid\!\sim \psi$ se puede inferir que ψ es verdadero en dichos mundos "ideales". Nada nos dice sobre el mundo actual. El (WMP) sirve para razonar sobre las condiciones ideales, pero no sobre las condiciones reales. Indudablemente, lo que hace crisis es la posibilidad de dar cuenta de los procedimientos del RNM, por medios puramente lógicos, y, en consecuencia, de poder aplicar en los esquemas de IA sistemas de LCOND sin las consideraciones pragmáticas mencionadas en la cita de Reiter.

En Kraus, Lehmann, Magidor (1990) se sugiere la posibilidad de usar sistemas como P para

obtener una respuesta de una base de conocimiento (BC) a la pregunta : "Es esperable ψ?". La propuesta es: si se tiene el total de la evidencia en una situación dada representado por la fórmula ϕ y un conjunto de condicionales y se deriva, a partir de ellos y mediante las reglas de P, el condicional $\phi \mid\!\sim \psi$, la respuesta es positiva. Esto equivale a sostener el modus ponens para $\mid\!\sim$, pero restringido a los casos en que a la izquierda de $\mid\!\sim$ aparece la representación de toda la evidencia disponible. Si bien el comentario es informal, resulta claro que si se tuviese el condicional $\chi \mid\!\sim \theta$ y también $\delta \mid\!\sim \neg\theta$, y la evidencia total disponible fuese equivalente a $\chi \wedge \delta$, no se sigue ninguna contradicción, ya que los únicos condicionales sobre los cuales estaría autorizado el detachment serían de la forma $\chi \wedge \delta \mid\!\sim \theta$?. En particular, si χ es pájaro, δ es pingüino y θ la propiedad de volar, del hecho adicional de que los pingüinos son pájaros ($\delta \vdash \chi$ y por propiedades básicas de $\mid\!\sim$, $\delta \mid\!\sim \chi$) y por la regla(CM), se deriva $\chi \wedge \delta \mid\!\sim \neg\theta$, y no se deriva $\chi \wedge \delta \mid\!\sim \theta$.

7.4 Revisión de Creencias

La teoría del cambio de creencias trata de la dinámica de los estados de creencias[5], con el objetivo de modelizar las actualizaciones de los estados de creencias de un agente o de un sistema de computación, como resultado de recibir nueva información. Existen varios tipos de cambios de creencias. El más simple es el que surge por el aprendizaje de algo nuevo que no entra en conflicto con lo ya establecido, y es conocido como *expansión*. A veces, sin embargo, estas nuevas evidencias contradicen creencias previamente aceptadas, lo que lleva a una *revisión* del estado de creencias con vistas a mantener su consistencia. Esta revisión requiere la eliminación de viejas creencias. Otras veces el descubrimiento de que las razones para sostener una creencia han caducado, conduce a una *contracción* del estado de creencias. Una revisión de un conjunto de creencias K, como resultado del aprendizaje de una evidencia ϕ, puede ser considerada como la sucesión de una contracción de dicho conjunto por la negación de ϕ, y luego el agregado (por expansión) de ϕ. El primer paso asegura que la incorporación de la nueva evidencia no provocará inconsistencia en K. Una operación de contracción (y por ende una de revisión) no es sencilla de definir: dado un conjunto K y una sentencia ϕ, existen varias formas de eliminar sentencias que puedan implicar ϕ. Si incorporamos, como criterio de racionalidad, que la operación redunde en la menor pérdida de información posible, una manera informal de visualizar una contracción de K por una creencia ϕ, es en términos de la familia de los subconjuntos maximales de K que no implican ϕ, que se denota $K \perp \phi$. Alchourrón, Gärdenfors y Makinson desarrollaron una teoría del cambio racional de creencias, presentando construcciones explícitas de las operaciones de cambio (en particular, las basadas en los subconjuntos maximales citados), así como postulados que dichas operaciones deberían cumplir. Los dos enfoques son vinculados en Alchourrón, Gärdenfors, Makinson ([AGM85]) a través de sendos teoremas de representación, dando lugar a lo que es conocido desde entonces como modelo AGM. Los postulados AGM de revisión racional de creencias, son ocho, seis de los cuales son denominados básicos y dos complementarios. Si denotamos con * la función de revisión, y consideramos conjuntos de creencias cerrados por consecuencia lógica clásica (teorías), siguiendo a Gärdenfors ([Gär88]), ellos son:

⋆ **1.** Si K es una teoría y ϕ una sentencia, K^*_ϕ es una teoría.

⋆ **2.** $\phi \in K^*_\phi$

⋆ **3.** $K^*_\phi \subseteq K^+_\phi$ (la expansión de K por ϕ)

⋆ **4.** Si $\neg\phi \notin K$, entonces $K^+_\phi \subseteq K^*_\phi$

⋆ **5.** $K^*_\phi = K_\perp$ si y sólo si $\models \neg\phi$ (donde $K_\perp$ denota el conjunto de creencias inconsistente)

⋆ **6.** Si $\models \phi \Leftrightarrow \psi$ entonces $K^*_\phi = K^*_\psi$

[5] En este contexto los tomaremos por estado de creencias a cualquier conjunto de fórmulas de un lenguaje formal

⋆ **7.** $K^*_{(\phi\wedge\psi)} \subseteq (K^*_\phi)^+_\psi$

⋆ **8.** Si $\neg\psi \notin K^*_\phi$, entonces $(K^*_\phi)^+_\psi \subseteq K^*_{(\phi\wedge\psi)}$

Consideremos un ejemplo en el que un estado de creencias de un sistema está reflejado por una BC y sus consecuencias lógicas. Esta situación es la normal en la práctica, y se dice que BC es una base del conjunto de creencias K. Las funciones que efectivizan cambios en teorías apelando a cambios en sus bases, son llamadas *revisiones de bases* y están siendo estudiadas entre los investigadores de IA. Sea, en una situación dada, la BC constituída por:

(1) $\forall x(Pajaro(x) \rightarrow Vuela(x))$

(2) $\forall x(Pinguino(x) \rightarrow \neg Vuela(x))$

(3) $Pajaro(Pi - pio)$

Entre las creencias implícitas del sistema estarán:

(4) $Vuela(Pi - pio)$

(5) $\neg Pinguino(Pi - pio)$

Si ahora obtenemos una nueva evidencia:

(6) $Pinguino(Pi - pio)$

para acomodar (6) a la BC, manteniendo la consistencia, debemos eliminar alguna creencia previa, entre (1), (2) o (3). La elección de qué creencias se eliminan (o de qué subconjunto se prefiere conservar) dependerá de algún criterio de preferencia entre las creencias (o entre los subconjuntos maximales que no implican (5)). Entre las funciones de contracción propuestas en Alchourrón, Gärdenfors, Makinson (1985), la *partial meet contraction* de K por una sentencia ϕ , se define como la intersección de una subfamilia de $K\perp\phi$. Esta subfamilia es elegida por medio de una función de selección $\mathcal{S}$, que, si bien puede ser arbitraria, es razonable de suponer que escoja los subconjuntos "mejores" de un cierto orden: $\mathcal{S}(K\perp\phi) = \{K' \in K\perp\phi \mid K" < K' \text{ para todo } K" \in K\perp\phi\}$. La contracción K^-_ϕ resulta luego:

$$K^-_\phi = \bigcap \mathcal{S}(K\perp\phi)$$

De acuerdo al criterio indicado antes, la revisión de K por ϕ, notada $K^*\phi$, se puede representar como:

$$K^*_\phi = Cn(\bigcap \mathcal{S}(K\perp\neg\phi) \cup \{\phi\}) \tag{7.1}$$

Cabe destacar que el uso de los conjuntos maximales $K\perp\neg\phi$ para la definición de funciones de contracción (revisión) es sólo una de las seis posibles presentaciones del modelo AGM. A continuación mencionaremos tres de esas alternativas por tener relación directa con las propuestas desarrolladas en nuestro trabajo.

La primera corresponde a la idea de que para decidir sobre cuáles sentencias deben ser abandonadas conjuntamente con ϕ en una contracción por ϕ es necesario contar con un orden de prioridades o preferencias entre fórmulas del lenguaje. De esa manera, las fórmulas más importante son conservadas en detrimento de las menos importantes. Gärdenfors y Makinson propusieron lo que ellos llamarón un atrincheramiento epistémico $\leq^E_K$ (para una teoría K) y del cual requirieron que satisfaga las propiedades ya mencionadas para el orden de expectativas (ver final de la sección 7.2):

dominancia Si $\phi \models \psi$, entonces $\phi \leq^E_K \psi$.

conjunctividad $\phi \leq^E_K (\phi \wedge \psi)$ o $\psi \leq^E_K (\phi \wedge \psi)$.

transitividad Si $\phi \leq_K^E \psi$ y $\psi \leq_K^E \chi$, entonces $\phi \leq_K^E \chi$.

y las más específicas:

minimalidad Si $K \neq Cn(\emptyset)$ entonces $\psi \notin K \Longleftrightarrow \forall \phi \in \mathcal{L} : \psi \leq_K^E \phi$.
Cuyo significado corresponde a la idea que lo que no está en K es lo menos prioritario.

maximalidad Si $\forall \phi \in \mathcal{L} : \phi \leq_K^E \psi$ entonces $\vdash \psi$.
Reflejando la intención de que las tautologías sean las únicas fórmulas con prioridad máxima.

La conexión entre funciones de contracción y órdenes de atricheramiento epistémicos fue investigada por in [Gär88]. Sin embargo por el contexto al que nos circunscribimos en esta memoria preferiremos referirnos a la interrelación entre funciones de revisión y órdenes epistémicos que puede ser presentadas a través de la siguientes equivalencias:

$(C*_{\leq})$ [LR91; Rot91] $\psi \in K * \phi$ si y sólo si : $(\phi \to \neg\psi) <_K (\phi \to \psi)$ ó $\phi \vdash \bot$.

$(C \leq_*)$ [Fer99] $\phi \leq_K \psi$ si y sólo si: Si $\phi \in K * \neg(\phi \wedge \psi)$ entonces $\psi \in K * \neg(\phi \wedge \psi)$.

En el primer caso, los autores determinan que si $\leq_K$ es un atrincheramiento epistémico que satisface las cinco propiedades mencionadas anteriormente y K es consistente, entonces el operador $*$ definido por $C*_{\leq}$ satisface los ocho postulados de AGM y $(C \leq_*)$ también se verifica. En el segundo caso, Ferme prueba que dada un operador $*$ definido sobre una teoría consistente K tal que satisface los ocho postulados de AGM resulta que el orden $\leq_K$ generado a través de su definición $(C \leq_*)$, satisface las cinco propiedades de un atrincheramiento epistémico y la definición $(C*_{\leq})$ también se verifica.

En base a lo mencionado al final de la sección 7.2, cabría preguntarnos aquí cual es la interconexión entre operadores de revisión y relaciones de consecuencia no monótonas. En [GM91], Makinson y Gärdenfors sugieren un método de traducción entre postulados de revisión de creencias y propiedades de las LNM. La idea básica es ver una expresión de la forma: $\psi \in K^*_\phi$, como una inferencia no monótona de ψ a partir de ϕ, dado K como conjunto de hipótesis (o expectativas por defecto) auxiliares. A la inversa, una expresión de la forma: $\phi \mid\!\sim \psi$ de una LNM, se traduce a una de la forma $\psi \in K^*_\phi$ en revisión, donde K es introducido como un conjunto de creencias fijo. La forma de traducción es, entonces:

$$\phi \mid\!\sim \psi \text{ si y sólo si } \psi \in K^*_\phi$$

Usando esta receta, es posible traducir los ocho postulados de revisión de AGM en reglas que definen propiedades del operador $\mid\!\sim$, en particular, válidas casi todas en el sistema R. A la inversa, los distintos postulados para las LNM se traducen en condiciones de cambio de creencias que son derivadas de los ocho postulados de la revisión AGM. Por ejemplo, la monotonía cautelosa, se traduce en: Si $\psi \in K^*_\phi$ y $\chi \in K^*_\phi$, entonces $\psi \in K^*_{(\phi\wedge\chi)}$, que se deriva de los postulados de revisión.

Esta idea es la que posteriormente se convertiría en el formalismo "basados en expectativas" publicado en [GM94]. Así queda claro que este formalismo se inspira directamente en distintos modelos de la teoría de cambio de creencias, aunque también puede verse como generalizaciones del trabajo de Poole ([Poo88]). Una operación de inferencia basada en conjuntos de expectativas puede definirse informalmente así: ϕ implica no monotónicamente ψ si y sólo si ψ se sigue lógicamente de ϕ junto con tantos elementos como sea posible del conjunto fijo K de expectativas, con la condición de que sean compatibles con ϕ[6]. Más formalmente, dado un conjunto de expectativas K no vacío y una función de selección $\mathcal{S}$ del tipo de la mencionada más arriba, la operación de inferencia no monótona C se define como:

$$C_{[K,S]}(\phi) = \bigcap Cn(\{\phi\} \cup \{K' : K' \in \mathcal{S}(K \bot \neg\phi)\})$$

[6]Esta definición es equivalente a tomar el conjunto de fórmulas estrictamente mayor a $\neg\phi$ en el orden epistémico

Esta caracterización es la misma de la formulación 7.1, donde se define una revisión de K por ϕ basada en una función de contracción *partial meet*. Lo interesante es que si $\mathcal{S}$ selecciona a los mejores subconjuntos según un orden transitivo, $C_{[K,S]}$ satisface todas las reglas del sistema R (así como la respectiva revisión cumple los ocho postulados), más una regla adicional que no todos los sistemas R cumplen, llamada *Preservación de Consistencia* y que es la traducción del K*5 (si $\phi \mid\!\sim \bot$, entonces $\phi \vdash \bot$).

Desde el punto de vista semántico, se puede ver que hay una relación uno a uno entre los ϕ-mundos y los subconjuntos de la familia $K\bot\neg\phi$, por lo que el resultado de la aplicación sobre ellos de una función de selección que elige según un orden transitivo, tiene las mismas características de una selección de mundos "preferidos" en una lógica preferencial del tipo de la de Shoham.

Todos estos desarrollos evidencian una correspondencia formal muy sólida entre cierto tipo de revisión de creencias (la denominada AGM) y ciertos sistema de inferencia no monótonos.

En Alchourrón ([Alc94]) se caracterizan los condicionales default $\phi > \psi$ por medio de condicionales generales $f\phi \to \psi$, donde $f\phi$ se define en términos de mundos posibles como: $\omega \in |f\phi|$ si y sólo si $\omega \in [\mathcal{S}(\phi)]$, es decir que el contenido de $f\phi$ está dado por los ϕ-mundos seleccionados por el mecanismo no monótono (o por la LCOND, si de ella se tratase). Cada cambio de la BC genera un cambio de la función $\mathcal{S}$ (como se vió en el ejemplo anterior, donde $\mathcal{S}$ selecciona los mundos con menos anormalidades, o como puede verse formalmente en la semántica de Lukasiewicz para la lógica default de Reiter, y, en consecuencia, un cambio del contenido conceptual del condicional default $\phi > \psi$. La conclusión de dicho trabajo es que el condicional default está enmascarando distintos condicionales generales, cuyos contenidos se van revisando a medida en que cambia el contexto en que dicho condicional se inscribe. El pasaje a las conclusiones en un condicional default, en cada procedimiento no monótono, dependerá de las características de la BC: cuando la función de selección $\mathcal{S}$ sea tal que los $\mathcal{S}(\phi)$-mundos (los ϕ-mundos seleccionados) sean un subconjunto de los ψ-mundos (o lo que es lo mismo, cuando $f\phi \to \psi$ se verifique), entonces el condicional default $\phi > \psi$ se podrá "disparar". Es claro entonces que incluir en sistemas de LCOND que pretendan representar las inferencias no monótonas, un axioma de MP es un contrasentido, pues dicho axioma sanciona el pasaje incondicional a las conclusiones del condicional, dados sus antecedentes, independientemente de todo criterio de preferencia. Al especificarse las propiedades de un operador $\mid\!\sim$ mediante reglas al estilo de los sistemas P o R, se establecen las condiciones de derivación de condicionales a partir de condicionales (en cualquier modelo, con cualquier criterio de preferencia en que valen los condicionales de partida serán válidos los de llegada). En este sentido se trata de postulados generales que caracterizan completamente una clase de relaciones de inferencia, pero no un procedimiento inferencial particular. Este hecho es el que justifica su extrema debilidad inferencial.

Inspirado en la teoría los contrafácticos de Lewis y Stalnaker, Grove presenta un modelo de revisión de creencias basado en mundos posibles y esferas de accesibilidad. Esencialmente, dada una teoría consistente K Grove considera un sistema de esferas $\$_K$ universal y centrado en K, el cual cubre el rol de representar a la noción de minimalidad. En este contexto, revisar K por ϕ consiste en tomar:

$$[K^*_\phi] = [\phi] \bigcap s(\phi)$$

donde $s(\phi)$ pertenece a $\$_K$ y representa a la primera esfera que contiene ϕ-mundos. Grove muestra que la clase de funciones de revisión que queda determinada por su definición es exactamente la AGM.

Alternativamente, Grove propone en el trabajo ya mencionado, una caracterización de las funciones de revisión a partir de lo que él denomina relaciones de *plausibilidad* entre fórmulas. Intuitivamente, su idea es que una fórmula ϕ es más plausible que otra ψ (lo cual es escrito como $\phi \leq^G_K \psi$) si ϕ es más aceptable que ψ, o sería más rápidamente adoptado, como una creencia si la oportunidad naciera. El orden que postula Grove satisface las siguientes propiedades:

(G1) $\phi \leq^G_K \psi$ o $\psi \leq^G_K \phi$.

(G2) Si $\phi \leq_K^G \psi$ y $\psi \leq_K^G \chi$ entonces $\phi \leq_K^G \chi$.

(G3) Si $\vdash \phi \rightarrow (\psi \vee \chi)$ entonces $\chi \leq_K^G \phi$ o $\psi \leq_K^G \phi$.

(G4) Si $\neg\phi \notin K$ entonces $\forall \psi \in \mathcal{L} : \phi \leq_K^G \psi$.

(G5) Si $\vdash \neg\phi$ entonces $\forall \psi \in \mathcal{L} : \psi \leq_K^G \phi$.

Grove demostró que estas relaciones son inducidas por los sistemas de esferas universales y centrados en K, por medio de la siguiente definición:

$$\phi \leq_K^G \psi \qquad \Longleftrightarrow \qquad s(\phi) \subseteq s(\psi)$$

y que recíprocamente, todo sistema de esferas universal y centrado en K proviene de una relación de plausibilidad. Por lo tanto él enuncia que este tipo de órdenes es apropiado para definir funciones de revisión a través de la siguiente expresión:

$$\psi \in K_\phi^* \qquad \Longleftrightarrow \qquad \phi \wedge \psi <_K^G \phi \wedge \neg\psi$$

entendiendo, como siempre, que $\psi <_K^G \phi$ significa que $\psi \leq_K^G \phi$ y $\phi \not\leq_K^G \psi$ suceden. Finalmente, Gärdenfors mostró en [Gär88] que el orden $\leq^E$, definido como $\phi \leq^E \psi$ si y sólo si $\neg\phi \leq_K^G \neg\psi$, va a satisfacer los cinco propiedades de un atrincheramiento epistémico si y sólo si $\leq_K^G$ satisface las cinco propiedades de un orden de plausibilidad. Nótese que esta idea es la génesis de la posterior propuesta de Fariñas del Cerro et al. en [FHL94] mencionada al final de la sección de no monotonía.

Por otra parte, tal como señala Boutelier en [Bou92], un sistema de esferas puede ser visto como un generador de un preorden total entre mundos por considerar que para todo par $\omega \leq \nu$ si y sólo si ω está contenido en toda esfera que contiene a ν. Esta idea remite directamente al modelo propuesto por Katsuno y Mendelson en [KM90]. Ellos dan una caracterización del modelo AGM por medio de pre-órdenes sobre mundos cuando el lenguaje $\mathcal{L}$ es finito. Recordemos que un pre-orden $\leq$ sobre W es una relación reflexiva y transitiva y que es total si para todo par de mundo $\omega, \nu \in W$ es el caso $\omega \leq \nu$ o que $\nu \leq \omega$. Ellos consideran una función que a cada teoría K le asigna un pre-orden $\leq_K$ sobre W y declaran que esa asignación es "*fiel*" (en inglés: faithful) si las siguientes tres condiciones son observadas:

1. Si ω,$\omega' \in [K]$ entonces $\omega \approx_K \omega'$;

2. Si $\omega \in [K]$ y $\omega' \notin [K]$ entonces $\omega <_K \omega'$;

3. Si $K \equiv \phi$ entonces $\leq_K \equiv \leq_\phi$.

donde $\omega \approx_K \omega'$ significa que $\omega \leq_K \omega'$ y $\omega' \leq_K \omega$, y $\omega <_K \omega'$ representa que $\omega \leq_K \omega'$ y $\omega \not\leq_K \omega'$

Si V es un subconjunto de W entonces se dice que ω es minimal en V con respecto a $\leq_K$ si $\omega \in V$ y no hay $\omega' \in V$ tal que $\omega' <_K \omega$. Así, $Min(V, \leq_K)$ representará el conjunto de todos los minimales de V. Con estas herramientas Katsuno y Mendelzon prueban el siguiente resultado de caracterización de operadores de revisión AGM.

Teorema 7.1 *Un operador de revisión $\star$ satisface las condiciones $(\star 1) \sim (\star 8)$ si y sólo si existe una asignación "fiel" que para cada teoría K le asigna un pre-orden total $\leq_K$ tal que*

$$[K_\phi^\star] = Min([\phi], \leq_K)$$

Katsuno y Mendelzon van más allá de este resultado y , en [KM91], cuestionan el grado de generalidad del modelo AGM. Ellos ponen en evidencia su inadecuación con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 7.1 *Supongamos que tenemos una compuerta XOR cuya salida es positiva, luego podemos representar nuestro conocimiento con* $BC = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$*, donde* $p =$ *la entrada 1 es positiva y* $q =$ *la entrada 2 es positiva. Supongamos que con posterioridad medimos la entrada 1 que resulta ser positiva, entonces tendremos que revisar nuestra base de conocimiento* BC *con* $\phi = p$*. En el modelo AGM, puesto que no hay conflicto, resultaría que* $Cn(BC)^*_\phi = Cn(BC \wedge \phi) = Cn(p \wedge \neg q)$ *(una expansión). Cuyo resultado claramente responde a las intuiciones. Sin embargo, si ahora cambiamos la interpretación que fuera dada a las fórmulas de manera tal que ahora:* $p =$ *el libro está sobre la mesa ,* $q =$ *la revista está sobre la mesa y que nuestro conocimiento es que la revista o el libro esta sobre la mesa pero no ambos. Así, en este caso* BC *será representada por la misma fórmula que antes. Suponiendo que la nueva información es que un robot dejó el libro sobre la mesa, al revisar nuestra teoría con* $\phi = p$ *con el modelo AGM, obtenemos el mismo resultado que antes, i.e.,* $Cn(BC)^*_\phi = Cn(p \wedge \neg q)$*. Lo cual no resulta del todo intuitivo, ya que supone que el robot se encontró con la situación en que la revista ya estaba sobre la mesa y no hizo nada. Luego no considera el caso en que la revista estaba sobre el piso y el robot ejerció una acción para levantarla y ponerla en la mesa en cuyo caso el resultado sería que* $Cn(BC)^*_\phi = Cn(p \wedge q)$ *(ya que suponemos que sobre la revista no ejerció ninguna acción). Los autores sugieren que en esta segunda interpretación, sería más razonable suponer que la acción modifica igualmente cada una de las dos alternativas o situaciones posibles (i.e., es el caso que "el libro está sobre la mesa y la revista no", ó es el caso que "la revista está sobre la mesa y el libro no) y que el resultado de la revisión debería ser la disyunción de resultados de los cambios de cada una de ellas.*

Con esta consideración en mente, es que Katsuno y Mendelzon proponen un nuevo modelo al que denominan *actualización* (en inglés: updating). Ellos usan $K^\diamond_\phi$ para denotar el resultado de actualizar una teoría K con una sentencia ϕ y caracterizan dicha operación a través de los siguientes postulados:

- $\diamond$ 1. $K^\diamond_\phi \models \phi$.
- $\diamond$ 2. Si $K \models \phi$ entonces $K^\diamond_\phi \equiv K$.
- $\diamond$ 3. Si K y ϕ son satisfactibles entonces, $K^\diamond_\phi$ es satisfactible.
- $\diamond$ 4. Si $K_1 \equiv K_2$ y $\phi_1 \equiv \phi_2$ entonces, $(K_1)^\diamond_{\phi_1} \equiv (K_2)^\diamond_{\phi_2}$.
- $\diamond$ 5. $K^\diamond_\phi \bigcup \{\nu\} \models K^\diamond_{\phi \wedge \nu}$.
- $\diamond$ 6. Si $K^\diamond_{\phi_1} \models \phi_2$ y $K^\diamond_{\phi_2 \models \phi_1}$ entonces, $K^\diamond_{\phi_1} \equiv K^\diamond_{\phi_2}$.
- $\diamond$ 7. Si K es maximalmente consistente entonces, $K^\diamond_{\phi_1} \bigcup K^\diamond_{\phi_2} \models K^\diamond_{\phi_1 \vee \phi_2}$.
- $\diamond$ 8. $(K_1 \bigcap K_2)^\diamond_\phi \equiv (K_1)^\diamond_\phi \bigcap (K_2)^\diamond_\phi$.

El siguiente teorema de representación fue establecido por operadores de actualización cuando el lenguaje $calL$ es finito.

Teorema 7.2 *Un operador de actualización* $\diamond$ *satisface las condiciones* ($\diamond$1) $\sim$ ($\diamond$8) *si y sólo si existe una asignación "fiel" que a cada mundo* ω *le adjudica un pre-orden parcial* $\leq_\omega$ *tal que*

$$[K^\diamond_\phi] = \bigcup_{\omega \in [K]} Min([\phi], \leq_\omega)$$

Este resultado pone de relieve que hay al menos dos diferencias entre revisar y actualizar. Por un lado que revisión es caracterizado por pre-órdenes totales mientras las actualizaciones son definidas en base a familias de pre-órdenes parciales. Sin embargo esa no es la diferencia más significativa, puesto que es posible construir una clase de operadores de actualización basados en una familia de pre-órdenes totales, la cual es caracterizada por reemplazar los postulados ($\diamond$6) y ($\diamond$7) por:

$\diamond$ 9. Si K es maximalmente consistente y $K^{\diamond}_{\phi} \bigcup \{\psi\}$ es satisfactible entonces, $K^{\diamond}_{\phi} \bigcup \{\psi\} \subseteq K^{\diamond}_{\phi \wedge \psi}$.

el cual es un caso particular de $\star$8. La segunda diferencia es que en las actualizaciones se considera un orden para cada mundo que satisface K, mientras que en revisión hay un único orden. Ese comportamiento "local" de las actualizaciones contrasta con el comportamiento "global" de las revisiones. Para cerrar esta presentación de los operadores de actualizar, vale la pena mencionar que la caracterización de estos operadores para lenguajes infinitos fue presentada por Becher en [Bec99] y corresponde a reemplazar el postulado $\diamond$8 por el siguiente:

$\diamond$ 8'. Si $K = \bigcap H_i$ entonces $K^{\diamond}_{\phi} = \bigcap (H_i{}^{\diamond}_{\phi})$

que determina que la actualización de una intersección es la intersección de las actualizaciones. Note que $\diamond$ 8' implica $\diamond$ 8.

Para finalizar podemos repetir la receta propuesta por Makinson y Gärdenfors para vincular operadores de revisión y relaciones de consecuencia no monótonas, pero ahora definiendo una relación $\mid\!\approx$ en base a un operador de actualización $\diamond$ de la siguiente forma:

$$\phi \mid\!\approx_K \psi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \psi \in K^{\diamond}_{\phi}$$

Observación 7.1 *Este operador $\diamond$ será monótono puesto que satisface la siguiente propiedad:*

$\diamond$ *mon. Si $K \subseteq H$ entonces $K^{\diamond}_{\phi} \subseteq H^{\diamond}_{\phi}$)*

Además, tal como es señalado por Makinson en [Mak93], si tomamos como modelo de actualización a una terna $\mathcal{M} = \langle W, r, \models \rangle$ donde W es un conjunto no vacío de mundos, r es la función de asignación "fiel" y $\models$ es la asignación de valuación para cada mundo entonces $\phi \mid\!\approx_K \psi$ sucederá en $\mathcal{M}$ si y sólo si para todo mundo $\nu \in W$ con $\nu \models K$ resulta que $\nu \models \phi > \psi$ donde la evaluación del contrafáctico es tomada en la forma mencionada en la respectiva sección. En este sentido podemos decir que la actualización es a lo contrafactual lo que la revisión es a la no monotonía. Formalmente este vínculo fue estudiado por Grahne en [Gra91] cuando propone una lógica para las actualizaciones utilizando un conectivo binario $>$ que satisface todas las propiedades de la lógica VC de Lewis.

Hasta aquí hemos presentado diferentes modelos para formalizar lo que hemos dado en llamar la dinámica de cambio de teorías. Esencialmente tres han sido los enfoques presentados: los semánticos que utilizan un orden entre mundos (ya sea por por una relación entre mundos o un sistema de esferas) para establecer cuales son los mundos más cercanos o preferidos; los epistémicos que a partir de órdenes entre fórmulas determinan niveles de importancia entre ellas, y aquellos que se basan en la noción de conjuntos maximalmente consistentes. Esta forma de presentaciones repite el esquema de las anteriores y facilita el entendimiento de los vínculos mencionados al final de la presente sección. Así damos por terminado el resumen de los antecedentes de estos tres tópicos y pasamos a presentar nuestro enfoque basado en las distintas medidas de Consistencia e Implicación introducidas en el Capítulo 2.

7.5 Inferencia no-monotónica inducida por medidas de consistencia

En esta sección focalizaremos nuestra atención sobre los órdenes generados a través de una base de conocimiento K y una medida de similitud S sobre mundos posibles, cuando la correspondiente medida de consistencia $C_S(\cdot \mid K)$ es usada para ranquear las proposiciones. Puesto que (como ya fuera mencionado en el Capítulo 1) $C_S(\cdot \mid K)$ es una medida de posibilidad, el orden inducido sobre fórmulas definido por

$$\phi \leq_C \psi \text{ si y sólo si } C_S(\phi \mid K) \leq C_S(\psi \mid K),$$

leído como ψ es al menos tan consistente con respecto a K, como lo es ϕ, es una relación *cualitativa posibilística* en el sentido de Dubois [Dub86], i.e. la cualitativa contraparte de una medida de posibilidad. Una relación de posibilidad cualitativa es un orden posibilístico (como definido anteriormente) que adicionalmente satisface el siguiente axioma

No-trivialidad: $\bot <_C \top$

donde $<_C$ es la parte estricta del orden $\leq_C$. En concordancia a la sección previa, la correspondiente relación de consecuencia comparativa $\mid\!\sim_C$ es entonces definible como

$$\phi \mid\!\sim_C \psi \text{ si y sólo si } \phi \models \psi \text{ o } \phi \wedge \neg\psi <_C \phi \wedge \psi.$$

Aunque uno es más fuerte que el otro, en [FHL94] está demostrado que las relaciones de posibilidad cualitativa y los órdenes de posibilidad generan la misma familia de relaciones de consecuencia no monótonas. Claramente, las relaciones de posibilidad cualitativa generan una subfamilia de las relaciones de inferencia no monótona que generan los órdenes de posibilidad. Para ver el caso inverso sólo es necesario considerar un orden de posibilidad trivial donde $\top \approx \bot$, así para cualquier par de fórmulas ϕ y ψ tenemos que $\phi \approx \psi$. Luego sólo será posible determinar que $\phi \mid\!\sim_C \psi$ en el caso clásico que $\phi \models \psi$, porque la segunda alternativa nunca se satisfacerá. Para elegir la relación de posibilidad cualitativa que logre el mismo comportamiento tomamos la relación que asigna: $\phi \approx \top$ si ϕ es consistente y $\phi \approx \bot$ si ϕ es inconsistente. Esta relación cualitativa se comporta exactamente que el orden de posibilidad trivial.

Si en la definición anterior de $\mid\!\sim_C$, removemos la condición clásica ($\phi \models \psi$), y dado que $C_S(\cdot \mid K)$ es una medida de posibilidad, la relación de consecuencia que es obtenida es exactamente la llamada *consecuencia posibilística* propuesta por Benferhat et al. [BDP97]:

$$\phi \mid\!\sim_{pos} \psi \text{ si y sólo si } \phi \wedge \psi >_C \phi \wedge \neg\psi.$$

Notesé que la última definición hace caer la propiedad de supraclasicalidad, por ejemplo cuando $\phi \equiv \bot$. Las relaciones de consecuencia posibilísticas han sido caracterizada por un conjunto sensiblemente diferente de siete axiomas: Disyuntividad a Izquierda (OR), Reflexividad Restringida (RR), Preservación de Consistencia Fuerte (SCP), Preservación de Equivalencia Lógica a Izquierda (LLE), Conyuntividad a Derecha (AND), Debilitamiento a Derecha (RW), y Monotonía Racional (RM). El teorema de representación para las relaciones de consecuencia posibilísticas dado por Benferhat et al. (ver [BDP97]) establece que para para cualquier relación de consecuencia $\mid\!\sim$ que satisface esas propiedades hay una medida de posibilidad Π sobre fórmulas tal que $\phi \mid\!\sim \psi$ si y sólo si $\Pi(\phi \wedge \psi) > \Pi(\phi \wedge \neg\psi)$. Así que como corolario podemos presentar el siguiente resultado.

Corolario 7.1 *Una relación de consecuencia $\mid\!\sim$ satisface OR, RR, SCP, LLE, AND, RW y RM si y sólo si existe un conjunto de proposiciones K y una relación de similitud S sobre mundos posibles tal que $\phi \mid\!\sim \psi$ si y sólo si $C_S(\phi \wedge \psi \mid K) > C_S(\phi \wedge \neg\psi \mid K)$.*

Prueba: La prueba es una directa consecuencia del hecho que a partir de cualquier distribución de posibilidad normalizada π sobre el dominio de mundos posibles W siempre es posible encontrar un subconjunto $E \subseteq W$ y una función de similitud S tal que $\pi(\omega) = \sup\{S(\omega,\omega') \mid \omega \in E\}$ (ver capítulo 2). Por lo tanto basta tomar K como el conjunto de fórmulas cuyos modelos son exactamente esos en E y verificar que la medida de consistencia $C_S(\cdot \mid K)$ es una medida de posibilidad generada por π. Pero esto último es obvio. $\square$

Este corolario ofrece una perspectiva alternativa de resultados bien conocidos. Ciertamente, aunque los órdenes de sentencias definidos por una medida de consistencia $\leq_C$ pertenecen a la clase de posibilidad cualitativa, ellos tienen un significado completamente diferente porque $\phi \leq_C \psi$ significa que ψ es al menos tan consistente respecto a K como lo es ϕ, donde el nivel de consistencia es entendido como el grado de verosimilitud respecto a K. Esa forma de interpretar el orden es distinto de aquellos que se refieren a posibilidad o preferencia. En la próxima sección propondremos

otra forma de definir relaciones de consecuencias no monótonas que presentan una perspectiva más interesante y novedosa.

Para terminar mencionemos que es posible extender el modelo aquí propuesto dando una versión graduada de las nociones de consecuencia no monótonas. En tal sentido, dada una relación $\mid\!\sim$ entre fórmulas, y una relación de similitud borrosa S, una *relación de consecuencia graduada no monótona* $\mid\!\sim^{\alpha}$ podría ser definida por:

$$p \mid\!\sim^{\alpha} q \qquad \text{si y sólo si} \qquad p \mid\!\sim q_{\alpha} \tag{7.2}$$

donde q_{α} denota a una proposición cuyo conjunto de modelos es $[q]_{\alpha} = \{\omega \mid S(\omega, \omega') \geq \alpha$ para algún $\omega' \models q\}$. Si $\mid\!\sim$ es una relación de consecuencia comparativa definida por un orden $\leq_C$, podemos reescribir la definición como:

$$p \mid\!\sim^{\alpha}_{C} q \qquad \text{si y sólo si} \qquad p \models^{\alpha}_{S} q \text{ ó } p \wedge q_{\alpha} >_C p \wedge \neg q_{\alpha}.$$

En particular, si S es de separación, la original noción de consecuencia comparativa es recuperada cuando $\alpha = 1$. Las relaciones de consecuencia $\mid\!\sim^{\alpha}_{C}$, así definidas, son no monótonas pero no pertenecen a la clase de las comparativas aún cuando $\mid\!\sim$ que la define si lo sea. A continuación analizaremos su comportamiento en términos de dichas propiedades.

Supraclasicalidad:

Se satisface trivialmente puesto que como $\mid\!\sim$ satisface esta propiedad resulta que si $\phi \models \psi$ entonces $\phi \mid\!\sim \psi$ y eso implica que $\phi \mid\!\sim \psi_{\alpha}$ puesto que $\psi \models \psi_{\alpha}$.

Preservación de Equivalencia Lógica a Izquierda

Esta propiedad también es trivialmente verificada porque la expresión 7.2 deja intacta las precondiciones.

Conyuntividad a Derecha

Esta propiedad no se verifica debido, esencialmente, al hecho de que la intersección de los α-cortes de dos conjuntos, digamos $[\phi]_{\alpha} \cap [\psi]_{\alpha}$, no es equivalente al α-corte de la intersección de los núcleos de dichos conjuntos, i.e., $([\phi] \cap [\psi])_{\alpha}$. Esto hace que $\phi \mid\!\sim (\psi_{\alpha} \wedge \chi_{\alpha})$ no sea equivalente a $\phi \mid\!\sim (\psi \wedge \chi)_{\alpha}$.

Cumulatividad

Tampoco se satisface puesto que puede ser el caso que $\phi \mid\!\sim^{\alpha}_{C} \psi$, $\psi \models \phi$ y $\phi \mid\!\sim^{\alpha}_{C} \chi$ pero $\psi \not\mid\!\sim^{\alpha}_{C} \chi$. Por ejemplo en el caso que los "mejores" ϕ-mundos son también $\neg\psi$-mundos y que estos estén incluidos en ψ_{α}-mundos y en los χ_{α}-mundos. Pero que los "mejores" ψ-mundos no lo estén en los χ_{α}-mundos.

Disyuntividad a Izquierda

Se comprueba fácilmente, ya que por definición Si $\phi \mid\!\sim \psi_{\alpha}$ y $\chi \mid\!\sim \psi_{\alpha}$ entonces $\phi \vee \chi \mid\!\sim \psi_{\alpha}$, lo que se traduce en: $\phi \mid\!\sim^{\alpha}_{C} \psi$ y $\chi \mid\!\sim^{\alpha}_{C} \psi$ entonces $\phi \vee \chi \mid\!\sim^{\alpha}_{C} \psi$

Monotonía Racional

En este caso sólo debe tenerse en cuenta que la condición $\phi \not\mid\!\sim^{\alpha}_{C} \neg\chi$ es más fuerte que $\phi \not\mid\!\sim \neg\chi$. Por lo tanto a partir de la condición sobre $\mid\!\sim$ se concluye la propiedad para $\mid\!\sim^{\alpha}_{C}$.

Preservación de Consistencia:

Inmediato si se tiene presente que $\perp = \perp_{\alpha}$ para todo α.

Una caracterización completa de estos operadores graduados está pendiente.

7.6 Consecuencia no monótona inducida por medidas de implicación

Como es señalado por Makinson en [Mak94, pag. 46], si buscamos abandonar monotonía entonces también debemos abandonar contraposición. Sin embargo, en muchas ocasiones, la información disponible está presente en una forma distinta a la que nos sería útil. Por ejemplo, es sabido que si la batería de un coche está descargada el coche en cuestión no arrancará, eso lleva a establecer la siguiente regla de diagnóstico de falla: "Si el motor de un auto no enciende entonces posiblemente la batería está descargada". Y desde esa regla de decisión, podríamos buscar derivar, por contraposición, otra regla, en este caso predictiva: "Si la batería está cargada entonces probablemente el motor encienda". Nótese que ambas reglas son no monótonas en el sentido que ellas no buscan afirmar que el antecedente por si solo es una condición suficiente para inferir el consecuente, sino que éste, conjuntamente con un conjunto de supuestos comúnmente aceptable en su contexto pueden hacerlo. En esta sección nos proponemos presentar una noción de consecuencia no monótona $\phi \mid\!\sim \psi$ que está basada en el grado de implicación de $\neg\phi$ por $\neg\psi$.

Como ya hemos mencionado, una medida de implicación $I_S(\cdot \mid K)$ no verifica ninguna propiedad de descomposición interesante y esto hace bastante difícil determinar qué propiedades puede satisfacer un orden sobre proposiciones definido como

$$\phi \leq_I \psi \text{ si y sólo si } I_S(\phi \mid K) \leq I_S(\psi \mid K)$$

Sin embargo, uno puede encontrar una definición alternativa razonando por reciprocidad. Puesto que $I_S(\phi \mid K)$ mide cuando ha de ser extendida la satisfactibilidad de ϕ con el objetivo de cubrir a K, es posible considerar otra medida de implicación que indicaremos $L_S(\phi \mid K)$ la cual mensure el grado en que $\neg\phi$ implica $\neg K$ definiendola como sigue

$$L_S(\phi \mid K) = I_S(\neg K \mid \neg\phi).$$

al cual denominaremos *contra-implicación*. Es fácil mostrar ahora que, fijada una teoría consistente K, la medida $L_S(\cdot \mid K)$ cumple las propiedades siguientes:

1. $L_S(\top \mid K) = 1$
2. $L_S(\phi \wedge \psi \mid K) = \min(L_S(\phi \mid K), L_S(\psi \mid K))$

pero falla a satisfacer que $L_S(\bot \mid K) = 0$. Esto significa que $L_S(\cdot \mid K)$ es casi una medida de necesidad. El fracaso de esta última propiedad pone de manifiesto el hecho que la distribución $\pi^*_{S,K} : W \to [0,1]$ que es generadora de la medida de necesidad,

$$L_S(\phi \mid K) = \inf_{\omega \not\models \phi} 1 - \pi^*_K(\omega)$$

realmente puede ser no normalizada. De hecho, se puede verificar que $\pi^*_{S,K}$ es definida por

$$\pi^*_{S,K}(\omega) = 1 - \pi_{S,\neg K}(\omega) = 1 - \sup_{\omega' \not\models K} S(\omega, \omega')$$

y que, claramente, nada fuerza a $\pi^*_{S,K}$ tener que alcanzar el valor 1 para algún modelo. Es más uno tiene $\pi^*_{S,K}(\omega) = 0$ para cada mundo ω tal que $\omega \not\models K$. Las distribuciones de posibilidad no-normalizadas juegan un papel importante en la representación de información parcialmente inconsistente (ver [BDP97]).

El orden inducido por L_S,

$$\phi \leq_L \psi \text{ si y sólo si } L_S(\phi \mid K) \leq L_S(\psi \mid K),$$

es ciertamente un genuino orden de expectativa, i.e. que satisface transitividad, dominancia y conyuntividad. Debido a la falta de normalización de π_K^*, en general el orden $\leq_L$ no es una relación de necesidad cualitativa, el dual de una relación de posibilidad cualitativa, puesto que la condición, $\perp <_L \top$ puede no suceder si S no es de separación. Un estudio formal de esta noción de necesidad (donde no se requiere que $n(\perp) = 0$) se da en [BG92].

La relación de inferencia comparativa inducida por $\leq_L$ es por lo tanto definida como sigue:

$$\phi \mid\!\sim_L \psi \text{ si y sólo si } \phi \models \psi \text{ ó } \phi \to \psi >_L \phi \to \neg\psi,$$

donde $\to$ denota a la implicación material. Nuevamente, esta relación de inferencia no monótona $\mid\!\sim_L$ satisface las mismas propiedades que $\mid\!\sim_C$, esto es, Supraclasicalidad (SC), Equivalencia Lógica a Izquierda (LLE), Conyuntividad a Derecha (AND), Disyuntividad a Izquierda (OR), Monotonía Racional (RM), Preservación de Consistencia (CP) y Cumulatividad (CU). Lo cual nos permite proveer el siguiente corolario.

Corolario 7.2 *Una relación de inferencia $\mid\!\sim$ satisface SC, LLE, And, Or, RM, CP y CU si y sólo si existe un conjunto de proposiciones K y una similitud S sobre mundos posibles tal que $\phi \mid\!\sim \psi$ si y sólo si $\phi \models \psi$ ó $L_S(\phi \to \psi \mid K) > L_S(\phi \to \neg\psi \mid K)$.*

Note que si S es de separación, el axioma de no-trivialidad para $\leq_L$ es verificado y un análogo al Corolario 1 también sucede para la relación de inferencia definida como $\phi \mid\!\sim_{nec} \psi$ si y sólo si $L_S(\phi \to \psi \mid K) > L_S(\phi \to \neg\psi \mid K)$.

Es interesante también expresar $\mid\!\sim_L$ en términos de las relaciones de consecuencia graduadas presentadas en el Capítulo 2 $\models^\alpha$. Simplemente aplicando la definición, resulta que la siguiente condición:

$$\phi \mid\!\sim_L \psi \text{ si y sólo si } \phi \models \psi \text{ o}$$
$$\text{existe un } \alpha \in [0,1] \text{ tal que } \phi \wedge \neg\psi \models^\alpha \neg K \text{ y } \phi \wedge \psi \not\models^\alpha \neg K.$$

En otras palabras, ψ se sigue no monotónicamente desde ϕ, en el contexto de K y S, si $\neg K$ es aproximadamente inferido por $\neg(\phi \to \psi)$ a un grado más alto que $\neg(\phi \to \neg\psi)$, o en términos más estrictos, falsificar $\phi \to \psi$ falsifica *más* a K que cuando se falsifica $\phi \to \neg\psi$.

Como en la sección precedente, la definición de noción de consecuencia no monótona graduada es aplicable. Sin embargo en el presente contexto es mas interesante hacer mención de otra definición de consecuencia no monótona graduada y basada en una medida de implicación, propuesta por Esteva, García y Godo en [EGG94a]. La motivación en este caso proviene de observar que la medida de implicación $I_S(\psi \mid \phi)$ puede ser estrictamente mayor que cero aún cuando las proposiciones ψ y ϕ son mutuamente excluyentes. La versión modificada de esa medida apareció por primera vez en [EGG94b] y corresponde a:

$$J^2_{S,K}(\psi \mid \phi) = \inf_{\omega \in [K]} I_S(\phi \mid \bar{\omega}) \ \otimes\!\!\longrightarrow I_S(\psi \wedge \phi \mid \bar{\omega}),$$

Obsérvese que cuando ψ y ϕ son mutuamente excluyentes y $\otimes\!\!\to$ es la residuada del la t-norma producto o del mínimos, entonces efectivamente $J^2_{S,K}(\psi \mid \phi) = 0$. Podemos remarcar además el hecho que si la proposición ϕ es una tautología entonces $J^2_{S,K}(\psi \mid \top) = I_S(\psi \mid K)$. Con esta medida el respectivo condicional se define como sigue:

$$\phi \mid\!\sim_{J^2_{S,K}} \psi \qquad \text{si y sólo si} \qquad J^2_{S,K}(\psi \mid \phi) \geq \alpha$$

A esta noción de consecuencia, que por simplicidad podemos denotar como $\mid\!\sim_{J^2}$, la denominaremos *de proximidad no monótona* debido a su parentesco con la respectiva noción presentada en la sección 5.2 del capítulo 2, y al hecho que no satisface la propiedad de refuerzo del antecedentes, i.e., puesto que puede ser el caso que $J^2_{R,K}(\psi \mid \phi) \geq \alpha$ pero $J^2_{R,K}(\psi \mid (\phi \wedge \chi) < \alpha$, por ejemplo cuando $[\phi] \cap [\psi] \neq \emptyset$ pero $[\phi] \cap [\psi] \cap [\chi] = \emptyset$.

Este operador no satisface las siguientes propiedades:

Conyuntividad a Derecha

Considere el caso en que $J^2_{S,K}(\psi \mid \top) \geq \alpha$ y $J^2_{S,K}(\neg\psi \mid \top) \geq \alpha$. Claramente sólo puede ser $J^2_{S,K}((\psi \wedge \neg\psi) \mid \top) = 0$

Cumulatividad

Tomemos una situación parecida a la propuesta anteriormente, donde $\top \mid\!\sim^{\alpha}_{J^2} \psi$, $\psi \models \top$ y $\top \mid\!\sim^{\alpha}_{J^2} \neg\psi$. Claramente puede ser el caso que $\psi \not\mid\!\sim^{\alpha}_{J^2} \neg\psi$.

Monotonía Racional

Este caso requiere un contraejemplo más elaborado. Supongamos que $[K] = \{\omega_1, \omega_2\}$, y que $\top \not\mid\!\sim^{\alpha}_{J^2} \neg\chi$ y $\top \mid\!\sim^{\alpha}_{J^2} \psi$. Asumamos también los siguientes grados de implicación $I_S(\neg\chi \mid \bar{\omega_1}) < \alpha$ (lo que da soporte a la primera inferencia negada e implica que $\omega_1 \models \chi$), $I_S(\chi \mid \bar{\omega_2}) < \alpha$ (luego $\omega_2 \models \neg\chi$), $I_S(\psi \mid \bar{\omega_i}) \geq \alpha$ para $i = 1, 2$ (lo que justifica la segunda inferencia). Nótese que las primeras dos condiciones combinadas con las dos que le siguen dan como consecuencia que: $I_S((\psi \wedge \chi) \mid \bar{\omega_1}) \geq \alpha$ y que $I_S((\psi \wedge \neg\chi) \mid \bar{\omega_2}) \geq \alpha$. Finalmente asumiendo que $I_S((\psi \wedge \chi) \mid \bar{\omega_2}) \leq \alpha_* < \alpha$ y que la t-norma es la del min. Usando todas estas condiciones resulta que

$$\chi \mid\!\sim_{J^2} \psi = \inf_{\omega \in \{\omega_1, \omega_2\}} I_S(\chi \mid \bar{\omega}) \ \otimes\!\!\longrightarrow I_S((\psi \wedge \chi) \mid \bar{\omega})$$

es igual a α_*.

Monotonía Cautelosa

El ejemplo dado para para refutar Conyuntividad a Derecha es aplicable en este caso también. Así $\top \mid\!\sim^{\alpha}_{J^2} \neg\psi$ y $\top \mid\!\sim^{\alpha}_{J^2} \psi$, obviamente puede ser que $\neg\psi \not\mid\!\sim^{\alpha}_{J^2} \psi$.

De esta manera queda probado que la noción de no monotonía que subyace en esta nueva definición no es cumulativa. Las propiedades que si verifica son las siguientes:

Supraclasicalidad:

Puesto que $\phi \models \psi$ es equivalente a $\phi \models (\psi \wedge \phi)$ y por lo tanto $I_S(\phi \mid \bar{\omega}) \leq I_S(\psi \wedge \phi \mid \bar{\omega})$.

Preservación de Equivalencia Lógica a Izquierda

Esta propiedad también es trivialmente verificada porque la medida de implicación I_S preserva equivalencia lógica.

Debilitamiento a Derecha

Para comprobarlo sólo debemos hacer notar que J^2 es monótonamente creciente en su primer parámetro y que si $\chi \models \psi$ entonces $I_S(\phi \wedge \psi \mid \bar{\omega}) \geq I_S(\phi \wedge \chi \mid \bar{\omega})$ para todo $\omega \in [K]$. Por lo tanto si $\chi \models \psi$ y $\phi \mid\!\sim^{\alpha}_{J^2} \chi$ resulta que $\phi \mid\!\sim^{\alpha}_{J^2} \psi$.

Disyuntividad a Izquierda

Para probarlo supongamos que $J^2_{S,K}(\psi \mid \phi) \geq \alpha$ y que $J^2_{S,K}(\psi \mid \chi) \geq \alpha$ y verifiquemos que $J^2_{S,K}(\psi \mid (\phi \vee \chi)) \geq \alpha$. Lo último es cierto si para todo $\omega \in [K]$ sucede que:

$$I_S(\phi \vee \chi \mid \bar{\omega}) \ \otimes\!\!\longrightarrow I_S((\psi \wedge \phi) \vee (\psi \wedge \chi) \mid \bar{\omega})$$

lo que es equivalente, por propiedades de la implicación sobre el consecuente y el antecedente, a:

$$\max((\max(I_S(\phi \mid \bar{\omega}); I_S(\chi \mid \bar{\omega})) \ \otimes\!\!\longrightarrow I_S((\psi \wedge \phi) \mid \bar{\omega})); (\max(I_S(\phi \mid \bar{\omega}); I_S(\chi \mid \bar{\omega})) \ \otimes\!\!\longrightarrow I_S((\psi \wedge \chi) \mid \bar{\omega})))$$

Luego como por hipótesis para cada $\omega \in [K]$ sucede que $I_S(\phi \mid \bar{\omega}) \ \otimes\!\!\longrightarrow I_S((\psi \wedge \phi) \mid \bar{\omega}) \geq \alpha$ y $I_S(\chi \mid \bar{\omega}) \ \otimes\!\!\longrightarrow I_S((\psi \wedge \chi) \mid \bar{\omega}) \geq \alpha$, resulta que la anterior expresión debe ser mayor o igual que α.

En general la recíproca no es cierta pero vale en el caso que la teoría K es maximalmente consistente.

Preservación de Consistencia:

Inmediato si se tienen presentes los casos en que $\phi \mid\!\sim^{\alpha}_{J^2} \psi$ con $\alpha > 0$ si y sólo si $[\phi] \cap [\psi] \neq \emptyset$. Obviamente esta propiedad no se satisfacerá en la t-norma de Lukasiewicz.

Corte

Esta propiedad expresada como:

$$\text{Si} \quad \phi \mid\!\sim^{\alpha}_{J^2} \psi \quad \text{y} \quad \phi \wedge \psi \mid\!\sim^{\beta}_{J^2} \chi \quad \text{entonces} \quad \phi \mid\!\sim^{\alpha\otimes\beta}_{J^2} \chi$$

Ahora supongamos que $J^2_{S,K}(\psi \mid \phi) \geq \alpha$ y que $J^2_{S,K}(\chi \mid \phi \wedge \psi) \geq \beta$, y así:

$$\begin{array}{ll}
\alpha \otimes \beta \leq J^2_{S,K}(\psi \mid \phi) \otimes J^2_{S,K}(\chi \mid \phi \wedge \psi) & = \\
\inf_{\omega\in[K]}\{I_S(\phi \mid \bar{\omega}) \ \otimes\!\!\longrightarrow I_S((\phi \wedge \psi) \mid \bar{\omega})\} \otimes \inf_{\omega'\in[K]}\{I_S((\phi \wedge \psi) \mid \bar{\omega}') \ \otimes\!\!\longrightarrow I_S((\phi \wedge \psi \wedge \chi) \mid \bar{\omega}')\} & \leq \\
\inf_{\omega\in[K]}\{\{I_S(\phi \mid \bar{\omega}) \ \otimes\!\!\longrightarrow I_S((\phi \wedge \psi) \mid \bar{\omega})\} \otimes \{I_S((\phi \wedge \psi) \mid \bar{\omega}) \ \otimes\!\!\longrightarrow I_S((\phi \wedge \psi \wedge \chi) \mid \bar{\omega})\}\} & \leq \\
\inf_{\omega\in[K]}\{I_S(\phi \mid \bar{\omega}) \ \otimes\!\!\longrightarrow I_S((\phi \wedge \psi \wedge \chi) \mid \bar{\omega})\} = J^2_{S,K}(\psi \wedge \chi \mid \phi) & \leq \\
J^2_{S,K}(\chi \mid \phi) &
\end{array}$$

La siguiente es una caracterización de esta familia de operadores no monótonos.

Teorema 7.3 *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional, y $\{\vdash^{\alpha}\}_{\alpha\in[0,1]}$ una familia anidada de relaciones binarias en $\mathcal{P}(\mathcal{L})$. Definimos $K = \{q \in \mathcal{L} \mid \{True\} \vdash^{1} \{q\}\}$. Si $K \neq \emptyset$ y la familia $\{\vdash^{\alpha}\}_{\alpha\in[0,1]}$ de relaciones de consecuencia satisface las propiedades de Supraclasicalidad, Corte, Disyuntividad a Izquierda, además de la siguiente:*

Coordinación

$\phi \vdash^{\alpha} \psi$ si y sólo si para todo $\omega \in [K]$ y para todo $\omega_1 \in [\phi]$ se verifica que:

$$\alpha \leq \bigvee_{\omega_2\in[\phi\wedge\psi]} (\bar{\omega} \vee \bar{\omega}_1 \mid\!\sim \bar{\omega}_1 \ \otimes\!\!\longrightarrow \bar{\omega} \vee \bar{\omega}_2 \mid\!\sim \bar{\omega}_2)$$

considerando que en este contexto $\phi \mid\!\sim \psi = \bigvee\{\alpha \mid \phi \vdash^{\alpha} \psi\}$

Homogeneidad

Si $\psi \models \phi$ entonces $\phi \vdash^{\alpha} \psi$ implica que para cualquier fórmula χ : $\phi \vee \chi \vdash^{\alpha} \psi \vee \chi$.

Refuerzo a Izquierda

Si $\chi \models \phi$ y $\phi \vdash^{\alpha} \psi$ entonces $\chi \vdash^{\alpha} \psi$.

Entonces, existe una relación reflexiva y $\otimes$-transitiva R en $\Omega \times \Omega$ tal que $\phi \vdash^{\alpha} \psi$ si y sólo si $J^2_{R,K}(\psi \mid \phi) \geq \alpha$.

Prueba: En primer término proponemos una definición para la relación de proximidad:

$$R(\omega_1, \omega_2) = (\bar{\omega}_1 \vee \bar{\omega}_2 \mid\!\sim \bar{\omega}_2)$$

Acto seguido, verificamos que es reflexiva, lo cual es evidente puesto que $\mid\!\sim$ satisface $\phi \mid\!\sim \phi$ y que es $\otimes$-transitiva de la siguiente forma:

$$\begin{array}{lll}
R(\omega_1, \omega_2) \otimes R(\omega_2, \omega_3) = (\bar{\omega}_1 \vee \bar{\omega}_2 \mid\!\sim \bar{\omega}_2) \otimes (\bar{\omega}_2 \vee \bar{\omega}_3 \mid\!\sim \bar{\omega}_3) & \leq & \\
(\bar{\omega}_1 \vee \bar{\omega}_2 \vee \bar{\omega}_3 \mid\!\sim \bar{\omega}_2 \vee \bar{\omega}_3) \otimes (\bar{\omega}_2 \vee \bar{\omega}_3 \mid\!\sim \bar{\omega}_3) & \leq & \text{(por homogeneidad)} \\
\bar{\omega}_1 \vee \bar{\omega}_2 \vee \bar{\omega}_3 \mid\!\sim \bar{\omega}_3 & \leq & \text{(por corte)} \\
\bar{\omega}_1 \vee \bar{\omega}_3 \mid\!\sim \bar{\omega}_3 = R(\omega_1, \omega_3) & & \text{(por refuerzo a izquierda)}
\end{array}$$

Ahora vamos a probar que $\phi \vdash^{\alpha} \psi$ si y sólo si $J^2_{R,K}(\psi \mid \phi) \geq \alpha$. Para ello tranformemos equivalentemente la expresión $\phi \vdash^{\alpha} \psi$ usando Coordinación:

$$\forall\omega \in [K] \text{ y } \forall\omega_1 \in [\phi] : \alpha \leq \bigvee_{\omega_2 \in [\phi\wedge\psi]} (\bar{\omega} \vee \bar{\omega}_1 \mid\!\sim \bar{\omega}_1 \ \otimes\!\!\longrightarrow \bar{\omega} \vee \bar{\omega}_2 \mid\!\sim \bar{\omega}_2)$$

y puesto que la desigualdad se verifica para todo $\omega \in [K]$ y $\omega_1 \in [\phi]$ resulta que sigue verificandose si tomando ínfimos sobre esos conjuntos:

$$\alpha \leq \bigwedge_{\omega\in[K]} \bigwedge_{\omega_1\in[\phi]} \bigvee_{\omega_2\in[\phi\wedge\psi]} (\bar{\omega} \vee \bar{\omega}_1 \mid\!\sim \bar{\omega}_1 \ \otimes\!\!\longrightarrow \bar{\omega} \vee \bar{\omega}_2 \mid\!\sim \bar{\omega}_2)$$

Inecuación que moviendo los ínfimos y supremos hacia el interior de la implicación resulta equivalente a:

$$\alpha \leq \bigwedge_{\omega\in[K]} (\bigvee_{\omega_1\in[\phi]} (\bar{\omega} \vee \bar{\omega}_1 \mid\!\sim \bar{\omega}_1) \ \otimes\!\!\longrightarrow \bigvee_{\omega_2\in[\phi\wedge\psi]} (\bar{\omega} \vee \bar{\omega}_2 \mid\!\sim \bar{\omega}_2))$$

y aplicando nuestra definición de relación de proximidad obtenemos lo buscado:

$$\alpha \leq \bigwedge_{\omega\in[K]} (\bigvee_{\omega_1\in[\phi]} R(\omega,\omega_1) \ \otimes\!\!\longrightarrow \bigvee_{\omega_2\in[\phi\wedge\psi]} R(\omega,\omega_2)) = J^2_{R,K}(\psi \mid \phi)$$

□

Como en el caso de los operadores de consecuencia de Proximidad presentadas en el Capítulo 2, la anterior caracterización puede parecer artificial. Sin embargo creemos que este es un primer paso en esa línea de trabajo. También consideramos que el estudio de este tipo de operadores es importante porque se sustancia sobre una noción más débil que la de distancia

7.7 Órdenes y Sistemas de Esferas

En esta sección intentaremos dar énfasis a la diferencia entre los operadores de inferencia no monótona definidos por medidas de consistencia y aquellos definidos por medidas de implicación. Para ello, usaremos la noción de sistemas de esferas centrada en un conjunto de mundos $[K]$ dada por Lewis. En ese contexto, definiremos dos tipos diferentes de órdenes entre fórmulas. El primero tomará en cuenta los "mejores" o "más cercanos" modelos y se asociará con C_S. El segundo considerará los "peores" o "más distantes" modelos para comparar dos fórmulas y se relacionará a I_S.

Teniendo en cuenta el concepto de sistemas de esferas dado en la sección 7.3, podemos dar dos definiciones de órdenes entre sentencias que surgen naturalmente a partir de tales sistemas.

Definición 7.2 *Un orden de* intersección *sobre sentencias inducido por un sistema universal de esferas centradas en* $[K]$, $\$_K$, *es definido de la siguiente manera:*

$$\phi \leq^{\min}_{\mathbf{SP}} \psi \ \textit{ si y sólo si } \ \forall \mathbf{S}_i \in \$_K \ \textit{ si } [\psi] \cap \mathbf{S}_i \neq \emptyset \ \textit{ entonces } \ [\phi] \cap \mathbf{S}_i \neq \emptyset.$$

El significado de la relación $\phi \leq^{\min}_{\$_K} \psi$ refiera a que los "mejores" modelos de ϕ son al menos "tan buenos" como los "mejores" modelos de ψ, donde "mejor" y " tan bueno" corresponde a un elección y comparación de mundos en relación a su cercanía a los mundos que satisfacen K según $\$_K$. Como ya fuera señalado en las anterior secciones, la idea de identificar calidad con proximidad es ampliamente usada en la teoría de revisión de creencias [Gro88] y la teoría de los condicionales no monótonos y contrafactuales [Lew73; NC00]. En términos de *verosimilitud*, Niiniluoto interpreta los órdenes de intersección como expresando que ϕ es al menos tan cercano a la verdad (e.g. $[K]$) como ψ (ver [Nii87, Pag. 200]). En ese contexto, él también propone otro tipo de orden que da cuenta de la idea que una proposición ϕ es más informativa que otra ψ respecto de la verdad de una teoría K.

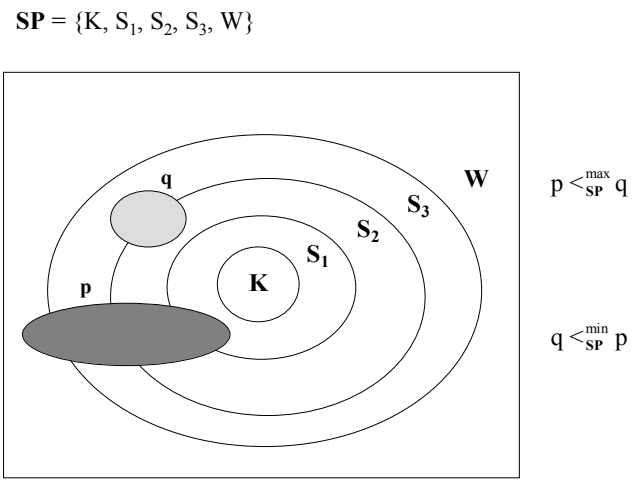


Figura 7.1: Órdenes Inclusión e Intersección.

Definición 7.3 *Un orden de* inclusión *inducido por un sistema de esferas universal y centrado en* $[K]$ *,* $\$_K$*, es definido como:*

$$\phi \leq^{\max}_{\$_K} \psi \;\; \textit{si y sólo si} \;\; \forall \mathbf{S}_i \in \$_K \;\; \textit{si} \; [\psi] \subseteq \mathbf{S}_i \;\; \textit{entonces} \;\; [\phi] \subseteq \mathbf{S}_i.$$

El orden de inclusión así definido da lugar a un tipo de evaluación que podríamos denominar *pesimista* porque $\phi \leq^{\max}_{\$_K} \psi$ enuncia que los "peores" mundos de ϕ son "tan buenos" como los peores mundos de ψ, donde obviamente la idea de "peor" está asociada a la de más lejano desde $[K]$ en $\$_K$.

Los órdenes de inclusión e intersección son duales en el sentido que: dado un sistema de esferas finito $\$_K = \{K \subseteq \mathbf{S}_1 \subseteq \mathbf{S}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathbf{S}_n \subseteq W\}$, resulta que $\phi \leq^{\min}_{\$_K} \psi$ si y sólo si $\psi \leq^{\max}_{\overline{\$_K}} \phi$, donde $\overline{\$_K}= \{W-\mathbf{S}_n \subseteq W-\mathbf{S}_{n-1} \subseteq W-\mathbf{S}_{n-2} \subseteq \cdots \subseteq W-K \subseteq W\}$ es otro sistema de esferas pero centrado en $\overline{K} = \{\phi \in \mathcal{L} \mid [\phi] \subseteq W-\mathbf{S}_n\}$. Para ilustrar la diferencia entre órdenes de inclusión e intersección presentamos en la figura 7.1 dos casos paradigmáticos.

A continuación, presentaremos algunas propiedades que son satisfechas por los órdenes de intersección e inclusión. respectivamente.

Proposición 7.1 *Dado un sistema de esferas universal* $\$_K$ *centrado en* $[K]$*, el orden* $\leq^{\min}_{\$_K}$ *tal como fuera definido anteriormente satisface las siguientes propiedades:*

1. $\top \leq^{\min}_{\$_K} \phi$.
2. *Si* $\phi \models \psi$ *entonces* $\psi \leq^{\min}_{\$_K} \phi$.
3. *Si* $\phi \leq^{\min}_{\$_K} \psi$ *y* $\psi \leq^{\min}_{\$_K} \chi$ *entonces* $\phi \leq^{\min}_{\$_K} \chi$.
4. $\phi <^{\min}_{\$_K} \bot$.
5. $\phi \leq^{\min}_{\$_K} \phi \vee \psi$ *ó* $\psi \leq^{\min}_{\$_K} \phi \vee \psi$.
6. $K \leq^{\min}_{\$_K} \phi$.

Esas propiedades son equivalentes a las que propuso Grove ([Gro88]) con el objetivo de dar una semántica alternativa para el modelo AGM de revisión de creencias ([AGM85]).

Proposición 7.2 *Dado un sistema universal de esferas $\$_K$ centrado en $[K]$, el orden $\leq^{\max}_{\$_K}$ tal como fuera anteriormente definido, satisface las siguiente propiedades:*

1. $\phi \leq^{\max}_{\$_K} \top$.
2. *Si* $\phi \models \psi$ *entonces* $\phi \leq^{\max}_{\$_K} \psi$.
3. *Si* $\phi \leq^{\max}_{\$_K} \psi$ *y* $\psi \leq^{\max}_{\$_K} \chi$ *entonces* $\phi \leq^{\max}_{\$_K} \chi$.
4. $\bot <^{\max}_{\$_K} \phi$.
5. $\phi \vee \psi \leq^{\max}_{\$_K} \phi$ *o* $\phi \vee \psi \leq^{\max}_{\$_K} \psi$.
6. $K \leq^{\max}_{\$_K} \phi$.

Nótese que las propiedades (1) $\sim$ (5) para $\leq^{\max}_{\$_K}$ son exactamente inversas a las propiedades (1) $\sim$ (5) para $\leq^{\min}_{\$_K}$, y curiosamente, ambos órdenes comparten la misma propiedad (6). Este último hecho se ve plenamente justificado si tomamos en cuenta que el conjunto de los "mejores" K-mundos coincide con el conjunto de los "peores" K-mundos en cualquier sistema de esferas centro en $[K]$.

El siguiente resultado establece la relación entre estos dos órdenes presentados aquí y aquellos de expectativa y posibilidad.

Teorema 7.4 *Los órdenes de expectativas y los órdenes de intersección son inter-definibles en el siguiente sentido:*

(i) dado un sistema de esferas $\$_K$, si definimos: $\phi \leq^E \psi$ si y sólo si $\neg\phi \leq^{\min}_{\$_K} \neg\psi$, entonces $\leq^E$ es un orden de expectativas; y

(ii) dado un orden de expectativas $\leq^E$, existirá un sistema de esferas \$ tal que resulta cierta la siguiente equivalencia: $\phi \leq^{\min}_{\$_K} \psi$ si y sólo si probado que no es el caso que $\phi \equiv \bot$ y $\psi \not\equiv \bot$.

Prueba: La condición (i) es muy fácil de verificar tomando en cuenta el resultado de la Proposición 7.1. En cuanto a la condición (ii), adaptaremos una técnica de [Sch97] para construir un sistema de esferas a partir de un orden de expectativas. La idea consiste en reconocer que $\leq^E$ distribuye al conjunto de proposiciones en clases de equivalencias $\mathcal{L}s/\approx^E = \{A_0, A_1, \ldots, A_m\}$, (donde $\phi \approx^E \psi$ si ϕ, ψ pertenecen a la misma clase A_i, y $\phi <^E \psi$ si $\phi \in A_i$ y $\psi \in A_j$ con $i < j$) que tienen la particularidad de estar totalmente ordenadas. Recordemos que, $\phi \approx^E \psi$ significa que $\phi \leq^E \psi$ y $\psi \leq^E \phi$. Nótese que $A_0 = \{\neg\phi \mid \neg\phi <^E \phi\}$, el cual es un conjunto de fórmulas inconsistente pues contiene a $\bot$. Entonces podemos definir $\$ = \{\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_m\}$ donde $\mathbf{S}_m = W$ y cada

$$\mathbf{S}_i = \bigcap_{\phi \in A_i} \{[\neg\phi] \cap \mathbf{S}_{i+1}\}$$

para $i = 0, 1, \ldots, m$. Así será el caso que $\mathbf{S}_0 = [K]$ y por lo tanto el \$ generado será centrado en $[K] = \bigcap\{[\neg\phi] \mid \phi \in A_0\}$. Aquí omitiremos la verificación de que el orden $\leq^{\min}_{\mathbf{SP}}$ generado a partir de ese sistema de esferas satisface las propiedad expresada en (ii), debido a que no ofrece ninguna dificultad. □

Entre los órdenes de expectativa y de inclusión, puede ser establecido un resultado similar, con sólo reemplazar en el teorema anterior $\phi \leq^{\min}_{\$} \psi$ por $\psi \leq^{\max}_{\$} \phi$.

Ahora estamos en condiciones de mostrar que los órdenes basados en medidas de consistencia y de implicación presentados en las secciones 7.5 y 7.6, respectivamente, corresponden a órdenes de intersección e inclusión para un apropiado sistema de esferas.

Teorema 7.5 *Sea K una proposición consistente y sea $S : W \times W \to [0,1]$ una relación de similitud entre mundos posibles y definiendo el sistema de esferas universal centrado en $[K]$ como $\$_K^S = \{[K]_\alpha \mid \alpha \in [0,1]\}$. Entonces sucede que:*

1. $C_S(\phi \mid K) \leq C_S(\psi \mid K)$ *si y sólo si* $\psi \leq^{min}_{\$_K^S} \phi$.
2. $L_S(\phi \mid K) \leq L_S(\psi \mid K)$ *si y sólo si* $\neg\psi \leq^{max}_{\$_{\neg K}^S} \neg\phi$.

La prueba es trivial. Las dos equivalencias son complementarias en el sentido que mientras la primera toma en cuenta el orden entre $\neg K$-mundos (debido a que un sistema de esferas centrado en $[K]$ sólo discrimina $\neg K$-mundos), la segunda sólo considera el orden sobre K-mundos. Nuevamente, esto revela sus diferencias intrínsecas.

Por lo tanto, los sistemas de esferas proveen una herramienta semántica para entender nuestros órdenes basados en medidas de similitud. Este vínculo entre sistemas de esferas y funciones de similitud graduadas, ya había sido mencionado en [RGG96; DEG+97]. En la próxima sección volveremos sobre este punto.

7.8 Similitudes y Contrafácticos

En esta sección, presentaremos la teoría de contrafácticos basada en medidas de consistencia e implicación. Para ello primero introduciremos la forma de definir sistemas de esferas a partir de una relación de similitud S entre mundos posibles.

Definición 7.4 *Una α-esfera ($\alpha \in [0,1]$) centrada en un mundo ω y basada en una función de similitud S es definida como:*

$$\mathbf{SP}_\omega^\alpha = \{\omega' \mid S(\omega,\omega') \geq \alpha\}$$

Definición 7.5 *Un sistema de esferas $\$^S$ basado en una relación de similitud S es una función que para cada mundo $\omega \in W$ es definida como:*

$$\$^S(\omega) = \{\mathbf{SP}_\omega^\alpha\}_{\alpha \in [0,1]}$$

Nótese que el sistema de esferas será débilmente centrado si S es reflexiva y será centrado si S satisface la propiedad de separación. Esta definición difiere de la presentada con motivo de la demostración del teorema 5 de la anterior sección. La diferencia radica en que $\$_K^S$ es un sistema de esferas absoluto centrado en K tal como se la define a continuación:

Definición 7.6 *Una α-esfera ($\alpha \in [0,1]$) basada en un conjunto de fórmulas K y una relación de similitud S es definida como:*

$$\mathbf{SP}_{K,S}^\alpha = \{\omega' \mid \sup_{\omega \in [K]} S(\omega,\omega') \geq \alpha\}$$

Definición 7.7 *El sistema de esferas absoluto $\$_K^S$ basada en una relación de similitud S y una base de conocimiento K es una función que asigna a todo mundo $\omega \in W$ el conjunto de esferas*

$$\{\mathbf{SP}_K^\alpha\}_{\alpha \in [0,1]}$$

Es fácil reconocer que dado que S es una función total los sistemas definidos $\$^S$ y $\$_K^S$ son universales.

A partir de aquí supondremos que la función S satisface las propiedades de separación, simetría y transitividad. Dada una función de similitud S, el siguiente teorema sintetiza el vínculo entre los sistemas de contrafácticos **VCU** y **VCA** propuestos por Lewis, y las medidas de consistencia C_S y C_S^2.

Teorema 7.6 *$K \models \phi > \psi$ de acuerdo al sistema de esferas $\$_K^S \iff [\phi \wedge \neg\psi] = \emptyset$ o existe un mundo ω tal que para algún α, $C_{S,K}(\bar{\omega}) = \alpha$, $\omega \models \phi \wedge \psi$ y para todo mundo ω' : si $C_{S,K}(\bar{\omega}') \geq \alpha$ entonces $\omega' \models \phi \rightarrow \psi$.*

Prueba: $\Longrightarrow$) Suponga que $K \models \phi > \psi$ (según $\$_K^S$) sucede. Entonces hay dos posibilidades:

1. No hay ningún ϕ-mundo perteneciente a alguna esfera $\mathbf{S} \in \$_K^S$. Puesto que el sistema de esferas es universal, entonces debe ser el caso que $[\phi]= \emptyset$. Así se cumple que $[\phi \wedge \neg\psi] = \emptyset$.

2. Hay alguna esfera $\mathbf{S}$ en $\$_K^S$ que contiene por lo menos un ϕ-mundo, y tal que $\phi \longrightarrow \psi$ se satisface en todos sus mundos. En este contexto, hay dos caso para analizar:

   (a) Si $\mathbf{S} = W$. Entonces todo mundo perteneciente a $\mathbf{S}$ satisface la fórmula $\phi \longrightarrow \psi$ y así $[\phi \wedge \neg\psi] = \emptyset$ es cierta.

   (b) Si $\mathbf{S} \neq W$. Entonces existe α tal que $\mathbf{S} = \mathbf{SP}_{K,S}^{\alpha}$, y con por lo menos un $\phi \wedge \psi$-mundo ω con $C_{S,K}(\bar{\omega}) \geq \alpha$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $C_{S,K}(\bar{\omega}) = \alpha$. Entonces tenemos por definición que todo mundo ω' en la esfera $\mathbf{SP}_{K,S}^{\alpha}$, satisface que $C_{S,K}(\bar{\omega}') \geq \alpha$ y que $\omega' \models \phi \longrightarrow \psi$, que es lo que necesitábamos probar.

$\Longleftarrow$) Ahora suponga que el lado derecho de la equivalencia ocurre para algunos α. Si tomamos la esfera $\mathbf{S} = \mathbf{SP}_{K,S}^{\alpha}$ entonces $\mathbf{S}$ será la esfera requerida por la definición de Lewis para verificar que $K \models \phi > \psi$. □

Corolario 7.3 *En particular, si $C_{S,K}(\neg\psi \wedge \phi) < C_{S,K}(\psi \wedge \phi)$ entonces $K \models \phi > \psi$ de acuerdo al sistema de esferas $\$_K^S$*

Prueba: Es suficiente probar que si $C_{S,K}(\neg\psi \wedge \phi) < C_{S,K}(\psi \wedge \phi)$ resulta verdadera entonces podemos encontrar una esfera $\mathbf{S} = \mathbf{SP}_{K,S}^{\alpha}$ con al menos un $\phi \wedge \psi$-mundo y satisfaciendo que si un mundo ω está en $\mathbf{S}$ entonces $\omega \models \phi \longrightarrow \psi$. Probemos eso entonces.

La primera desigualdad puede ser re-escrita como:

$$\underset{\omega_2 \models \phi \wedge \neg\psi}{SUP} \; \underset{\omega_1 \models K}{SUP} \; S(\omega_1, \omega_2) < \underset{\omega_4 \models \phi \wedge \psi}{SUP} \; \underset{\omega_3 \models K}{SUP} \; S(\omega_3, \omega_4).$$

Eso es equivalente a decir que existe un $\phi \wedge \psi$-mundo ω tal que para todo $\phi \wedge \neg\psi$-mundo ω' $C_{S,K}(\bar{\omega}') < C_{S,K}(\bar{\omega}) = \alpha$. Así, la esfera $\mathbf{S} = \mathbf{SP}_{K,S}^{\alpha}$ satisface las condiciones de Lewis para decidir que $K \models \phi > \psi$. □

Teorema 7.7 *$K \models \phi > \psi$ de acuerdo al sistema de esferas $\$^S \iff [\phi \wedge \neg\psi] = \emptyset$ o para cada mundo ω en $[K]$ hay un $\alpha_\omega \in [0,1]$ y un mundo ω' tal que, $C_{S,\bar{\omega}}(\bar{\omega}') = \alpha_\omega$, $\omega' \models \phi \wedge \psi$ y para todo mundo ω" si $C_{S,\bar{\omega}}(\bar{\omega}") \geq \alpha_\omega$ entonces $\omega" \models \phi \rightarrow \psi$.*

Prueba: $\Longrightarrow$) Supongamos que $K \models \phi > \psi$ (según $\$^S$) sucede. Entonces debemos analizar tres casos:

1. Si para algún $\omega \in [K]$ no hay ninguna esfera en $\$^S(\omega)$ que contenga un ϕ-mundo, entonces debido a la universalidad $[\phi]$ debe ser vacío y así $[\phi \wedge \neg\psi] = \emptyset$.

2. Si hay un ω mundo tal que la única esfera en $\$^S(\omega)$ que contiene al menos un ϕ-mundo es W. Entonces en ese caso $\phi \longrightarrow \psi$ es una tautología y $[\phi \wedge \neg\psi] = \emptyset$.

3. En cualquier otro caso, si para todo $\omega \in [K]$ hay una esfera $\mathbf{S}_\omega$ que contiene al menos un ϕ-mundo y tal que $[\phi \wedge \psi] \neq W$. Entonces podemos repetir el argumento de arriba y sin pérdida de generalidad podemos afirmar que para cada ω hay un $\alpha_\omega \in (0,1]$ tal que $\mathbf{S}_\omega = \mathbf{SP}_{\omega}^{\alpha_\omega}$ y en ese caso por definición $C_{S,\bar{\omega}}(\phi) \geq \alpha_\omega$, y todos los mundos en $\mathbf{S}_\omega$ son $\phi \longrightarrow \psi$-mundos con $C_{S,\bar{\omega}}(\phi \longrightarrow \psi) \geq \alpha_\omega$.

$\Longleftarrow$) Ahora supongamos que el lado derecho de la equivalencia ocurre. Si $[\phi \wedge \neg\psi] = \emptyset$ se verifica, entonces todo mundo perteneciente a W satisface $\phi \longrightarrow \psi$ y por lo tanto $K \models \phi > \psi$.

Si $[\phi \wedge \neg\psi] \neq \emptyset$ entonces para cada mundo $\omega \in [K]$ podemos considerar la esfera $\mathbf{S}_\omega = \mathbf{SP}_\omega^{\alpha_\omega}$ entonces $\mathbf{S}_\omega$ es la esfera requerida por Lewis para verificar que $K \models \phi > \psi$. □

Corolario 7.4 *En particular, si $C^2_{S,K}(\neg\psi \mid \phi) < 1$ entonces $K \models \phi > \psi$ de acuerdo al sistema de esferas $\$^S$*

Prueba: Supongamos que $C^2_{S,K}(\neg\psi \mid \phi) < 1$ es cierto. Eso significa que para cualquier mundo ω in K la desigualdad

$$C_{S,\bar{\omega}}(\phi \wedge \neg\psi) < C_{S,\bar{\omega}}(\phi \wedge \psi)$$

sucede y así

$$\underset{\omega_2 \models \phi \wedge \neg\psi}{SUP} S(\omega, \omega_2) \ < \underset{\omega_4 \models \phi \wedge \psi}{SUP} S(\omega, \omega_4).$$

Esto es equivalente a afirmar que para cada $\omega \in [K]$ existe un $\phi \wedge \psi$-mundo ω_1 tal que para todo $\phi \wedge \neg\psi$-mundo ω_2, $C_{S,\bar{\omega}}(\bar{\omega}_2) < C_{S,\bar{\omega}}(\bar{\omega}_1) = \alpha_\omega$. Así, si consideramos la esfera $\mathbf{S} = \mathbf{SP}_\omega^{\alpha_\omega}$ tenemos que la misma satisface las condiciones de Lewis para decidir que $K \models \phi > \psi$. □

Hasta aquí, nada hemos dicho acerca del supuesto del límite (en inglés: Limit Assumption). Si requerimos que esta condición se satisfaga o aún si consideramos el caso de lenguaje finito, tenemos que los siguientes resultados se verifican:

para cualquier conjunto de fórmulas K y cualquier fórmula ϕ: $C_{S,K}(\phi) = \alpha$ sí y sólo si existe un mundo ω tal que $\omega \models \phi \ \wedge \ C_{S,K}(\bar{\omega}) = \alpha$

Recírpocamente, es sencillo probar que imponiendo esa condición sobre la función de similitud S resulta que los sistemas de esferas $\$^S_K$ y $\$^S$ verifican la propiedad del supuesto del límite. Así, si esta propiedad es verdadera entonces podemos probar los siguiente teoremas:

Teorema 7.8 *$K \models \phi > \psi$ según $\$^S_K \Longleftrightarrow [\phi \wedge \neg\psi] = \emptyset$ o $C_{S,K}(\neg\psi \wedge \phi) \ < \ C_{S,K}(\psi \wedge \phi)$.*

Prueba: Debido al corolario 7.3 sólo es necesario probar la dirección ($\Longrightarrow$). Por lo tanto supongamos que $K \models \phi > \psi$ según $\$^S_K$. Entonces por definición existe un $\alpha \in [0,1]$ tal que $\mathbf{SP}^\alpha_K$ conteniendo al menos un $\phi \wedge \psi$-mundo y satisfaciendo que si un mundo ω está en $\mathbf{SP}^\alpha_K$ entonces $\omega \models \phi \longrightarrow \psi$. Así, tenemos que $C_{S,K}(\phi \wedge \psi) \geq \alpha$. Para terminar la prueba es suficiente verificar que

$$C_{S,K}(\phi \wedge \neg\psi) < \alpha$$

lo cual es obvio porque no podría ser ni mayor, puesto que no hay $\phi \wedge \neg\psi$-worlds in $\mathbf{SP}^\alpha_K$, ni igual dado por la suposición de límite debería también ser el caso que exista $\phi \wedge \neg\psi$-mundos en $\mathbf{SP}^\alpha_K$. □

Teorema 7.9 *$K \models \phi > \psi$ según $\$^S \Longleftrightarrow [\phi \wedge \neg\psi] = \emptyset$ o $C^2_{S,K}(\neg\psi \mid \phi) < 1$.*

Prueba: Debido al corolario 7.4 sólo es necesario probar la dirección $\Longrightarrow$. En tal sentido supongamos que $K \models \phi > \psi$ según $\$^S$. Entonces por definición para cada mundo ω en $[K]$ deberá existir un $\alpha_\omega \in [0,1]$ tal que $\mathbf{SP}^{\alpha_\omega}_\omega$ contiene al menos un $\phi \wedge \psi$-mundo y satisfaciendo que si un mundo ω' está en $\mathbf{SP}^{\alpha_\omega}_\omega$ entonces $\omega' \models \phi \longrightarrow \psi$. Si asumimos que $C^2_{S,K}(\neg\psi \mid \phi) = 1$ entonces mostraremos que nos encontraremos frente a una contradicción. Para ello basta observar que de acuerdo a la demostración del anterior teorema, en este caso tendríamos que para cada mundo ω en $[K]$

$$C_{S,\bar{\omega}}(\phi \wedge \neg\psi) < C_{S,\bar{\omega}}(\phi \wedge \psi)$$

Puesto que el operador mínimo es la t-norma más grande, podemos analizar este caso particular sin pérdida de generalidad. Así resulta que

$$C^2_{S,K}(\neg\psi \mid \phi) = \underset{\omega\in[K]}{SUP}\ C_{S,\bar{\omega}}(\phi\wedge\neg\psi) = C_{S,K}(\phi\wedge\neg\psi) = 1(\text{por hipótesis})$$

además como hemos asumido que la función de similitud verifica el supuesto del límite, debe existir un mundo ω" en $[K]$ tal que $\omega" \models \phi\wedge\neg\psi$ y eso es absurdo. □

Para terminar esta sección presentaremos un versión graduada del último operador contrafáctico que representaremos con el símbolo $>_\alpha$.

Definición 7.8 *Dada un conjunto de fórmulas K y una función de similitud S diremos que:*

$$K \models \phi >_\alpha \psi \ \textit{según}\ \$^S \qquad \textit{si y sólo si} \qquad \models \phi\to\psi \ \textit{ó}\ C^2_{S,K}(\neg\psi \mid \phi) < \alpha$$

Obviamente el operador $>_1$ se corresponde a la definición original.

7.9 Similitudes y Operadores de Revisión y Actualización

Tal como es sugerido por el título de la presente sección, aquí mostraremos como a través de funciones de similitud podemos definir operadores de revisión y actualización.

Para ello propondremos sendas definiciones y probaremos que los operadores que se obtienen a través de ellas tienen el comportamiento esperado, es decir que satisfacen la mayoría de los axiomas presentados para cada caso.

Definición 7.9 $\psi \in K^\star_\phi \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} [\phi\wedge\neg\psi] = \emptyset$ *ó* $C_{S,K}(\neg\psi\wedge\phi) < C_{S,K}(\psi\wedge\phi)$.

Definición 7.10 $\psi \in K^\diamond_\phi \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} [\phi\wedge\neg\psi] = \emptyset$ *ó* $C^2_{S,K}(\neg\psi \mid \phi) < 1$.

En la primera definición, una fórmula ψ pertenece a la revisión de K por ϕ si, y sólo si, ella es una consecuencia lógica de ϕ o los $\phi\wedge\psi$-mundos son más cercanos (o quizás sería mas apropiado decir "mas consistente") al conjunto de K-mundos que lo que los $\phi\wedge\neg\psi$-mundos lo son. En cambio la segunda definición, determina que una fórmula ψ pertenece a la actualización de K por ϕ si, y sólo si, ella es una consecuencia lógica de ϕ o los $\phi\wedge\psi$-mundos son más cercanos (o consistentes) a cada K-mundo que lo que los $\phi\wedge\neg\psi$-mundos lo son. Obviamente estas definiciones remiten directamente a las ya propuestas para los operadores contrafácticos.

Los operadores de cambio así definidos verifican la mayoría de los postulados mencionados para caracterizar operadores de revisión y actualización, respectivamente, tal como se establece en los siguientes teoremas. Para mayor claridad de las demostraciones presentaremos un resultado previo. A lo largo de esta sección también asumiremos que la función de similitud S satisface las propiedades de separación, simetría y $\otimes$-transitividad.

Lema 7.1 *Las siguientes condiciones se verifican:*

1. *Si ω es un ϕ-mundo tal que $C_{S,K}(\bar{\omega}) = 1$, entonces* $\omega \in [K^\star_\phi]$.
2. *Si ω es un ϕ-mundo tal que $C^2_{S,K}(\neg\psi \mid \phi) = 1$, entonces* $\omega \in [K^\diamond_\phi]$

Prueba:

1. Supongamos que $\omega \notin [K^\star_\phi]$ o equivalentemente que existe una fórmula $\psi \in K^\star_\phi$ tal que $\omega \models \neg\psi$ y que, $C_{S,K}(\bar{\omega}) = 1 = C_{S,K}(\phi\wedge\neg\psi)$. Pero puesto que por hipótesis $\psi \in K^\star_\phi$, resulta que $1 = C_{S,K}(\phi\wedge\neg\psi) < C_{S,K}(\phi\wedge\psi)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\omega \in [K^\star_\phi]$.
2. Supongamos que $\omega \notin [K^\diamond_\phi]$. Entonces, existe una fórmula $\psi \in K^\star_\phi$ tal que $\omega \models \neg\psi$. Por lo tanto, $1 = C^2_{S,K}(\bar{\omega} \mid \phi) \leq C^2_{S,K}(\neg\psi \mid \phi) < C^2_{S,K}(\psi \mid \phi)$. Lo cual claramente es una contradicción.

□

Teorema 7.10 *El operador $\star$ generado por la Definición 7.9 verifica los postulados* $(\star 1) \sim (\star 3)$ *y* $(\star 5) \sim (\star 8)$*, pero no* $(\star 4)$.

Prueba:

$\star$1. $K^\star_\phi = Cn(K^\star_\phi)$.
Es suficiente probar que $Cn(K^\star_\phi) \subseteq K^\star_\phi$. Supongamos que $\psi \in Cn(K^\star_\phi)$. Entonces por compacidad deben existir fórmulas ϕ_1,...,$\phi_n \in K^\star_\phi$ tal que $\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n \models \psi$ y $\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n \in K^\star_\phi$. Luego si $[\phi \wedge \neg\psi] = \emptyset$ entonces es claro que $\psi \in K^\star_\phi$.
Alternativamente, si $[\phi \wedge \neg\psi] \neq \emptyset$ será el caso que:

$$\begin{array}{lcl} C_{S,K}(\phi \wedge \psi) \geq C_{S,K}(\phi \wedge (\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n)) & > & (\text{ puesto que } [\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n] \subseteq [\psi]) \\ C_{S,K}(\phi \wedge \neg(\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n)) & \geq & (\text{ porque por hipótesis } \phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n \in K^\star_\phi) \\ C_{S,K}(\phi \wedge \neg\psi) & & (\text{ dado que } [\neg(\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n] \supseteq [\neg\psi]) \end{array}$$

Por lo tanto, $\psi \in K^\star_\phi$.

$\star$2. $\phi \in K^\star_\phi$. Su verificación sólo requiere tener en cuenta que $[\phi \wedge \neg\phi] = \emptyset$.

$\star$3. $K^\star_\phi \subseteq Cn(K \cup \{\phi\})$.
Es suficiente probar que $[K^\star_\phi] \supseteq [K \cup \{\phi\}]$ y eso es inmediato a partir del lema anterior si tomamos en cuenta que si $\omega \in [K \cup \{\phi\}]$ entonces, $C_{S,K}(\bar{\omega}) = 1$ y es un ϕ-mundo.

$\star$5. Si $Cn(\phi) \neq \mathcal{L}$ entonces $K^\star_\phi \neq \mathcal{L}$.
Supongamos que $K^\star_\phi = \mathcal{L}$ y que $\phi \not\models \bot$. Luego podemos asumir que hay una fórmula consistente $\chi \in \mathcal{L}$ tal que $\phi \models \chi$ y así $[\phi \wedge \chi] \neq \emptyset$. Ahora, puesto que $\neg\chi \in K^\star_\phi$ resulta que, $C_{S,K}(\neg\chi \wedge \phi) > C_{S,K}(\chi \wedge \phi) = C_{S,K}(\phi)$, lo cual entra en contradicción con la definición de $C_{S,K}$. Por lo tanto, $K^\star_\phi \neq \mathcal{L}$.

$\star$6. Si $\phi \equiv \nu$ entonces $K^\star_\phi \equiv K^\star_\nu$.
Si $\phi \equiv \nu$ entonces para todo $\chi \in \mathcal{L}$, $[\phi \wedge \chi] = \emptyset$ si y sólo si $[\nu \wedge \chi] = \emptyset$ y $C_{S,K}(\neg\chi \wedge \phi) < C_{S,K}(\chi \wedge \phi)$ si y sólo si $C_{S,K}(\neg\chi \wedge \nu) < C_{S,K}(\chi \wedge \nu)$.

$\star$7. $K^\star_{\phi\wedge\nu} \subseteq Cn((K^\star_\phi) \cup \{\nu\})$.
Si $\neg\nu \in K^\star_\phi$ entonces $Cn((K^\star_\phi) \cup \{\nu\}) = \mathcal{L}$. Así $K^\star_{\phi\wedge\nu} \subseteq Cn((K^\star_\phi) \cup \{\nu\})$.
Si $\neg\nu \notin K^\star_\phi$ entonces, para cualquier mundo $\omega \in [K^\star_\phi] \bigcap [\nu]$, sucede que $C_{S,K}(\bar{\omega}) = 1$ y por lo tanto todos esos mundos están en $[K^\star_{\phi\wedge\nu}]$, por el lema anterior.

$\star$8. Si $\neg\nu \notin K^\star_\phi$ entonces $Cn((K^\star_\phi) \cup \{\nu\}) \subseteq K^\star_{\phi\wedge\nu}$.
Sea ψ una fórmula en el lenguaje $\mathcal{L}$, tal que $\psi \in Cn((K^\star_\phi) \cup \{\nu\}) = Cn((K^\star_\phi) \cup Cn(\{\nu\}))$. Consideremos los siguientes casos:

- Si $\psi \in Cn(\{\nu\})$ entonces, $[\phi \wedge \nu \wedge \neg\psi] = \emptyset$. Así, $\psi \in K^\star_{\phi\wedge\nu}$.
- Si $\psi \in K^\star_\phi$ entonces, $[\phi \wedge \neg\psi] = \emptyset$ o $C_{S,K}(\phi \wedge \neg\psi) < C_{S,K}(\phi \wedge \psi)$.
  Si $[\phi \wedge \neg\psi] = \emptyset$ entonces, $[\phi \wedge \nu \wedge \neg\psi] = \emptyset$ y por lo tanto $\psi \in K^\star_{\phi\wedge\nu}$.
  Si $C_{S,K}(\phi\wedge\neg\psi) < C_{S,K}(\phi\wedge\psi)$ podemos asumir que, $C_{S,K}(\phi\wedge\psi\wedge\nu) \geq C_{S,K}(\phi\wedge\psi\wedge\neg\nu)$ (ya que $\neg\nu \notin K^\star_\phi$). Por lo tanto, tomando en cuenta que $C_{S,K}(\phi \wedge \psi) = \max\{C_{S,K}(\phi \wedge \psi \wedge \nu), C_{S,K}(\phi \wedge \psi \wedge \neg\nu)\}$ tenemos que, $C_{S,K}(\phi \wedge \psi \wedge \nu) = C_{S,K}(\phi \wedge \psi)$, y puesto que $\psi \in K^\star_\phi$, tenemos $C_{S,K}(\phi \wedge \psi) > C_{S,K}(\phi \wedge \neg\psi) \geq C_{S,K}(\phi \wedge \neg\psi \wedge \nu)$. Así, ψ está en $K^\star_{\phi\wedge\nu}$.

  Para probar que nuestra presunción $C_{S,K}(\phi\wedge\psi\wedge\nu) \geq C_{S,K}(\phi\wedge\psi\wedge\neg\nu)$ fue correcta, hagamos un razonamiento por el absurdo. Supongamos que $C_{S,K}(\phi \wedge \psi \wedge \nu) < C_{S,K}(\phi \wedge \psi \wedge \neg\nu)$.

Puesto que $\neg\nu \notin K^\star_\phi$ entonces $[\phi \wedge \neg\nu] \neq \emptyset$ y $C_{S,K}(\phi \wedge \nu) \geq C_{S,K}(\phi \wedge \neg\nu)$. Como además por hipótesis $C_{S,K}(\phi \wedge \psi) > C_{S,K}(\phi \wedge \neg\psi)$, lo cual resulta equivalente a:

$$\max\{C_{S,K}(\phi\wedge\psi\wedge\nu), C_{S,K}(\phi\wedge\psi\wedge\neg\nu)\} > \max\{C_{S,K}(\phi\wedge\neg\psi\wedge\nu), C_{S,K}(\phi\wedge\neg\psi\wedge\neg\nu)\} \quad (7.3)$$

En tal caso, $C_{S,K}(\phi\wedge\psi\wedge\neg\nu)\} = \max\{C_{S,K}(\phi\wedge\psi\wedge\nu), C_{S,K}(\phi\wedge\psi\wedge\neg\nu)\} > C_{S,K}(\phi\wedge\neg\psi\wedge\neg\nu)$ y así $C_{S,K}(\phi\wedge\neg\nu) = C_{S,K}(\phi\wedge\psi\wedge\neg\nu)$. Por otra parte, de la ecuación 7.3 también podemos concluir que $C_{S,K}(\phi \wedge \psi \wedge \neg\nu)\} > C_{S,K}(\phi \wedge \neg\psi \wedge \nu)$. Luego sumando la hipótesis original resulta que:

$$C_{S,K}(\phi\wedge\neg\nu) = C_{S,K}(\phi\wedge\psi\wedge\neg\nu) > \max\{C_{S,K}(\phi\wedge\neg\psi\wedge\nu), C_{S,K}(\phi\wedge\psi\wedge\nu)\} = C_{S,K}(\phi\wedge\nu)$$

lo cual entra en contradicción con $\neg\nu \notin K^\star_\phi$.

- Si $\psi \in Cn(K^\star_\phi \cup \{\nu\})$, $\psi \notin K^\star_\phi$ y $\psi \notin Cn(\{\nu\})$ entonces, existe $\phi_1.....\phi_n \in K^\star_\phi \cup \{\nu\}$ tal que $\phi_1 \wedge ..... \wedge \phi_n \models \psi$. Por lo tanto, si $\phi_i \in K^\star_\phi \cup \{\nu\}$ entonces, $\phi_i \in Cn(K^\star_\phi) \cup Cn(\{\nu\})$ y usando el resultado anterior obtenemos que $\phi_i \in K^\star_{\phi\wedge\nu}$. Puesto que $\phi_1 \wedge ..... \wedge \phi_n \models \psi$ y $\phi_i \in K^\star_{\phi\wedge\nu}$, al usar la propiedad $\star 1$, tenemos que ψ está en $K^\star_{\phi\wedge\nu}$. Esto da por terminada nuestra prueba de $\star 8$.

Finalmente, para probar que [$\star$4.], i.e., si $\neg\phi \notin K$ entonces, $Cn(K \cup \{\phi\}) \subseteq K^\star_\phi$, no necesariamente se verifica con nuestra definición, bastará dar un contraejemplo. Sea $\omega_1, ..., \omega_n, ...$ una secuencia de $\phi-$mundos tal que, para cualquier $i \leq 1 : \omega_i \in [K]$, $S(\omega,\omega_i) < 1$. Sea ω' un mundo tal que $\omega' \notin [K \cup \{\phi\}]$ y $\lim_{n\to\infty} S(\omega, \omega_n) = 1$. En ese caso, puesto que $C_{S,K}(\bar{\omega}')$=1 y tomando en consideración que si $\neg\phi \notin K$ entonces para cualquier ϕ-mundo $\omega \in [K]$, $C_{S,K}(\bar{\omega}) = 1$, tenemos que $\omega' \in [K^\star_\phi]$.

□

Antes de proseguir con la comprobación de que nuestra definición de operador de actualización cumple con las propiedades señaladas por Katsuno y Mendelson en [KM91], creemos conveniente destacar que bajo nuestra definición dicho operador es cerrado por la consecuencia lógica clásica, i.e.

$$K^\diamond_\phi = Cn(K^\diamond_\phi)$$

Para comprobarlo sólo es necesario recordar que Cn es compacta y verificar que:

1. Si $\psi \in K^\diamond_\phi$ y $\psi \models \chi$ entonces $\chi \in K^\diamond_\phi$, y
2. Si $\psi, \chi \in K^\diamond_\phi$ entonces $\psi \wedge \chi \in K^\diamond_\phi$

Pero 1 es inmediato puesto que, si $[\phi \wedge \neg\psi] = \emptyset$ entonces también es el caso que $[\phi \wedge \neg\chi] = \emptyset$, y si $C^2_{S,K}(\neg\psi \mid \phi) < 1$ entonces por monotonía resulta que $C^2_{S,K}(\neg\chi \mid \phi) \leq C^2_{S,K}(\neg\psi \mid \phi) < 1$. Luego en ambos casos $\chi \in K^\diamond_\phi$.
Para 2 basta hacer un análisis similar. Si $[\phi \wedge \neg\psi] = \emptyset$ y $[\phi \wedge \neg\chi] = \emptyset$ entonces claramente $\phi \models (\psi \wedge \chi)$ y por 1: $\psi \wedge \chi \in K^\diamond_\phi$. Si suponemos que sólo uno de esos casos se dan, por ejemplo $[\phi \wedge \neg\chi] = \emptyset$ (lo que implica que $C^2_{S,K}(\chi \mid \phi) = 1$ y que $C^2_{S,K}(\neg\chi \mid \phi) < 1$) puesto que estamos suponiendo que S es de separación), y que en el otro caso resulta que $C^2_{S,K}(\neg\psi \mid \phi) < 1$ entonces como $C^2_{S,K}(\neg(\psi \wedge \chi) \mid \phi) = \max\{C^2_{S,K}(\neg\psi \mid \phi), C^2_{S,K}(\neg\chi \mid \phi)\}$ tenemos que $\psi \wedge \chi \in K^\diamond_\phi$. En el caso que $C^2_{S,K}(\neg\psi \mid \phi) < 1$ y que $C^2_{S,K}(\neg\chi \mid \phi) < 1$ por la regla de descomposición mencionada anteriormente resulta que debe ser que $C^2_{S,K}(\neg(\psi \wedge \chi) \mid \phi) < 1$.

Teorema 7.11 *El operador $\diamond$ propuesto por la Definición 7.10 verifica los postulados* ($\diamond$1), ($\diamond$2′), *y* ($\diamond$3) $\sim$ ($\diamond$8), *donde el nuevo postulado ($\diamond$ 2') es:*

$\diamond$ 2'. Si $K \models \phi$ entonces $K \models K^\diamond_\phi$

Prueba: Consideraremos el caso de cada propiedad independientemente:

◇ **1.** $K^{\diamond}_{\phi} \models \phi$.
Puesto que $[\phi \wedge \neg\phi] = \emptyset$, tenemos $\phi \in K^{\diamond}_{\phi}$. Así, $K^{\diamond}_{\phi} \models \phi$.

◇ **2'.** Si $K \models \phi$ entonces $K \models K^{\diamond}_{\phi}$.
Asumamos que $\nu \in K^{\diamond}_{\phi}$ y probemos que $K \models \nu$. Consideremos los siguientes casos:

- Si $[\phi \wedge \neg\nu] = \emptyset$ entonces, $\phi \models \nu$ y así $K \models \nu$.
- Si $C^2_{S,K}(\neg\nu \mid \phi) < 1$ entonces, para cualquier $\omega \in [K] : (C_{S,\bar{\omega}}(\phi) > C_{S,\bar{\omega}}(\phi \wedge \neg\nu)$ dado que, para todo $\omega \in [K] : C_{S,\bar{\omega}}(\phi) = 1$ y por lo tanto, $C_{S,\bar{\omega}}(\phi \wedge \neg\nu) < 1$. Por ello, $\forall\omega \in [K] : \omega \not\models (\phi \wedge \neg\nu)$ y puesto que $\omega \models \phi$, necesariamente tenemos que $\omega \models \nu$ cualquiera sea el $\omega \in [K]$. De lo que se concluye que $K \models \nu$.

◇ **3.** Si K y ϕ son satisfactible entonces $K^{\diamond}_{\phi}$ lo es también.
Asumamos que $K^{\diamond}_{\phi}$ no satisfactible. Si ϕ lo es, entonces $[\phi] \neq \emptyset$. Por hipótesis $\neg\phi \in K^{\diamond}_{\phi}$, de lo que concluimos que $C^2_{S,K}(\phi \mid \phi) < 1$. Por otra parte, puesto que K es satisfactible, resulta por definición que $C^2_{S,K}(\phi \mid \phi) = 1$. Lo cual da lugar a una contradicción.

◇ **4.** Si $K_1 \equiv K_2$ y $\phi_1 \equiv \phi_2$ entonces, $(K_1)^{\diamond}_{\phi_1} \equiv (K_2)^{\diamond}_{\phi_2}$.
Esta propiedad es de verificación inmediata tomando en consideración que $[\phi_1 \wedge \neg\psi] = \emptyset$ si y sólo si $[\phi_2 \wedge \neg\psi] = \emptyset$, y que $C^2_{S,K_1}(\neg\psi \mid \phi_1) < 1$ si y sólo si $C^2_{S,K_2}(\neg\psi \mid \phi_2) < 1$.

◇ **5.** $K^{\diamond}_{\phi} \bigcup \{\nu\} \models K^{\diamond}_{\phi\wedge\nu}$.
Esta condición es equivalente a $K^{\diamond}_{\phi\wedge\nu} \subseteq Cn((K^{\diamond}_{\phi}) \cup \{\nu\})$. Supongamos que $\chi \in K^{\diamond}_{\phi\wedge\nu}$. Si $[\phi \wedge \nu \wedge \neg\chi] = \emptyset$ entonces, $\phi \wedge \nu \models \chi$. Así $\chi \in Cn((K^{\diamond}_{\phi}) \cup \{\nu\})$.
Si $C^2_{S,K}(\neg\psi \mid \phi \wedge \nu) < 1$ entonces, por definición,

$$\sup_{\omega\in[K]} (C_{S,\bar{\omega}}(\phi \wedge \nu) \otimes\!\!\longrightarrow C_{S,\bar{\omega}}(\neg\psi \wedge \phi \wedge \nu)) < 1$$

Puesto que $\otimes\!\!\longrightarrow$ es una función decreciente respecto a su primer argumento y $C_{S,\bar{\omega}}(\phi) \geq C_{S,\bar{\omega}}(\phi \wedge \nu)$ tenemos que $C_{S,\bar{\omega}}(\phi) \otimes\!\!\longrightarrow C_{S,\bar{\omega}}(\neg\psi \wedge \phi \wedge \nu)) \leq C_{S,\bar{\omega}}(\phi \wedge \nu) \otimes\!\!\longrightarrow C_{S,\bar{\omega}}(\neg\psi \wedge \phi \wedge \nu)$ para cualquier $\omega \in [K]$. Por lo tanto, $C^2_{S,K}(\neg\nu \vee \psi \mid \phi) = \sup_{\omega\in[K]}(C_{S,\bar{\omega}}(\phi) \otimes\!\!\longrightarrow C_{S,\bar{\omega}}(\neg\psi \wedge \phi \wedge \nu)) \leq \sup_{\omega\in[K]}(C_{S,\bar{\omega}}(\phi \wedge \nu) \otimes\!\!\longrightarrow C_{S,\bar{\omega}}(\neg\psi \wedge \phi \wedge \nu)) < 1$ y por definición, $\neg\nu \vee \psi \in K^{\diamond}_{\phi}$. Así $\psi \in Cn((K^{\diamond}_{\phi}) \cup \{\nu\})$.

◇ **6.** Si $K^{\diamond}_{\phi_1} \models \phi_2$ y $K^{\diamond}_{\phi_2} \models \phi_1$ entonces $K^{\diamond}_{\phi_1} \equiv K^{\diamond}_{\phi_2}$.
Puesto que el operador de actualización es deductivamente cerrado, probaremos algo equivalente: si $\phi_2 \in K^{\diamond}_{\phi_1}$ y $\phi_1 \in K^{\diamond}_{\phi_2}$ entonces $K^{\diamond}_{\phi_1} = K^{\diamond}_{\phi_2}$. Cuya prueba resulta como consecuencia inmediata de los siguientes resultados intermedios:

- Si $\phi_1 \in K^{\diamond}_{\phi_2}$ y $\phi_2 \in K^{\diamond}_{\phi_1}$ entonces, para cualquier $\omega \in [K]$ sucede que:

$$C_{S,\bar{\omega}}(\phi_1) = C_{S,\bar{\omega}}(\phi_1 \wedge \phi_2) = C_{S,\bar{\omega}}(\phi_2)$$

Prueba: Consideremos el caso que $C^2_{S,K}(\neg\phi_2 \mid \phi_1) < 1$ y $C^2_{S,K}(\neg\phi_1 \mid \phi_2) < 1$ (dado que los restantes casos son muy sencillos). Luego, tomando en cuenta que $u \otimes\!\!\longrightarrow v = 1$ si y sólo si $u \leq v$, las dos desigualdades asumidas implican que, para cualquier $\omega \in [K]$, debemos tener

$$C_{S,\bar{\omega}}(\phi_1) > C_{S,\bar{\omega}}(\phi_1 \wedge \neg\phi_2), \text{ y } C_{S,\bar{\omega}}(\phi_2) > C_{S,\bar{\omega}}(\neg\phi_1 \wedge \phi_2)$$

y eso nos lleva a que $C_{S,\bar{\omega}}(\phi_1) = C_{S,\bar{\omega}}(\phi_1 \wedge \phi_2)$ y $C_{S,\bar{\omega}}(\phi_2) = C_{S,\bar{\omega}}(\phi_1 \wedge \phi_2)$. □

- Si $\phi_1 \in K^{\diamond}_{\phi_2}$ y $C_{S,\bar{\omega}}(\phi_1) = C_{S,\bar{\omega}}(\phi_2)$ para cualquier $\omega \in [K]$, entonces $K^{\diamond}_{\phi_1} \subseteq K^{\diamond}_{\phi_2}$. Análogamente, si $\phi_2 \in K^{\diamond}_{\phi_1}$ y $C_{S,\bar{\omega}}(\phi_1) = C_{S,\bar{\omega}}(\phi_2)$ para cualquier $\omega \in [K]$, entonces $K^{\diamond}_{\phi_2} \subseteq K^{\diamond}_{\phi_1}$.

Prueba: Sólo probaremos la primera afirmación puesto que el segundo caso es equivalente. Sea $\phi_1 \in K^{\diamond}_{\phi_2}$. Entonces, será el caso que: $[\phi_2 \wedge \neg\phi_1] = \emptyset$ o $C^2_{S,K}(\neg\phi_1 \mid \phi_2) < 1$.

- Consideremos primero el caso $[\phi_2 \wedge \neg\phi_1] = \emptyset$ y $\psi \in K^{\diamond}_{\phi_1}$. Entonces en ese contexto las situaciones alternativas son: $[\phi_1 \wedge \neg\psi] = \emptyset$ or $C^2_{S,K}(\neg\psi \mid \phi_1) < 1$.
  1. Si fuera $[\phi_1 \wedge \neg\psi] = \emptyset$ entonces también será $[\phi_2 \wedge \neg\psi] = \emptyset$. Con lo cual, $\psi \in K^{\diamond}_{\phi_2}$.
  2. Si fuera $C^2_{S,K}(\neg\psi \mid \phi_1) < 1$.
     Necesitamos probar que $C^2_{S,K}(\neg\psi \mid \phi_2) < 1$. Para ello, notemos primero que, dado que $[\phi_2] \subseteq [\phi_1]$, resulta que
     $$C_{S,\bar{\omega}}(\phi_2 \wedge \neg\psi) \leq C_{S,\bar{\omega}}(\phi_1 \wedge \neg\psi)$$
     Por lo tanto, para cada $\omega \in [K]$, pasará que
     $$\begin{array}{c} C_{S,\bar{\omega}}(\phi_2) \otimes\!\!\!\longrightarrow C_{S,\bar{\omega}}(\phi_2 \wedge \neg\psi) = \\ C_{S,\bar{\omega}}(\phi_1) \otimes\!\!\!\longrightarrow C_{S,\bar{\omega}}(\phi_2 \wedge \neg\psi) \leq \\ C_{S,\bar{\omega}}(\phi_1) \otimes\!\!\!\longrightarrow C_{S,\bar{\omega}}(\phi_1 \wedge \neg\psi) \end{array}$$
     Así, tomando supremos, tenemos que $C^2_{S,K}(\neg\psi \mid \phi_2) \leq C^2_{S,K}(\neg\psi \mid \phi_1) < 1$, por lo cual, $\psi \in K^{\diamond}_{\phi_2}$
- En el caso que $C^2_{S,K}(\neg\phi_1 \mid \phi_2) < 1$ y $\psi \in K^{\diamond}_{\phi_1}$, tendremos que $[\phi_1 \wedge \neg\psi] = \emptyset$ o $C^2_{S,K}(\neg\psi \mid \phi_1) < 1$. Analizando cada alternativa obtenemos:
  1. Si $[\phi_1 \wedge \neg\psi] = \emptyset$ entonces $[\neg\psi] \subseteq [\neg\phi_1]$. Así, $C^2_{S,K}(\neg\psi \mid \phi_2) \leq C^2_{S,K}(\neg\phi_1 \mid \phi_2) < 1$, y por lo tanto $\psi \in K^{\diamond}_{\phi_2}$.
  2. Supongamos ahora que $C^2_{S,K}(\neg\psi \mid \phi_1) < 1$. En ese contexto, notemos que la siguiente desigualdad se verifica
     $$\begin{aligned} C_{S,\bar{\omega}}(\phi_2 \wedge \neg\psi) &= \max\{C_{S,\bar{\omega}}(\phi_2 \wedge \neg\psi \wedge \phi_1), C_{S,\bar{\omega}}(\phi_2 \wedge \neg\psi \wedge \neg\phi_1)\} \\ &\leq \max\{C_{S,\bar{\omega}}(\phi_1 \wedge \neg\psi), C_{S,\bar{\omega}}(\phi_2 \wedge \neg\phi_1)\}. \end{aligned}$$
     Por lo tanto, tomando en cuenta que para cualquier $\omega \in [K]$ sucede que $C_{S,\bar{\omega}}(\phi_1) = C_{S,\bar{\omega}}(\phi_2)$, tenemos que:
     $$\begin{aligned} C^2_{S,K}(\neg\psi \mid \phi_2) &= \sup_{\omega\in[K]} C_{S,\bar{\omega}}(\phi_2) \otimes\!\!\!\longrightarrow C_{S,\bar{\omega}}(\phi_2 \wedge \neg\psi) \\ &\leq max\{\sup_{\omega\in[K]} C_{S,\bar{\omega}}(\phi_2) \otimes\!\!\!\longrightarrow C_{S,\bar{\omega}}(\phi_1 \wedge \neg\psi), \\ &\qquad \sup_{\omega\in[K]} C_{S,\bar{\omega}}(\phi_2) \otimes\!\!\!\longrightarrow C_{S,\bar{\omega}}(\phi_2 \wedge \neg\phi_1)\} \\ &= max\{C^2_{S,K}(\neg\psi \mid \phi_1), C^2_{S,K}(\neg\phi_1 \mid \phi_2)\} \\ &< 1 \end{aligned}$$
     Resultando que $\psi \in K^{\diamond}_{\phi_2}$.

□

Esto finaliza la prueba del postulado $\diamond$ 6.

$\diamond$ **7.** Si K es completa entonces $K^{\diamond}_{\phi_1} \bigcup K^{\diamond}_{\phi_2} \models K^{\diamond}_{\phi_1 \vee \phi_2}$.
Eso es equivalente a probar que $K^{\diamond}_{\phi_1 \vee \phi_2} \subseteq Cn(K^{\diamond}_{\phi_1} \bigcup K^{\diamond}_{\phi_2})$. Asumamos que $\psi \in K^{\diamond}_{\phi_1 \vee \phi_2}$, entonces $[(\phi_1 \vee \phi_2) \wedge \neg\psi]$ o $C^2_{S,K}(\neg\psi \mid (\phi_1 \vee \phi_2)) < 1$.
Si $[(\phi_1 \vee \phi_2) \wedge \neg\psi]$, entonces $[\phi_1 \wedge \neg\psi]$ o $[\phi_2 \wedge \neg\psi]$. Por lo tanto, $\psi \in K^{\diamond}_{\phi_1}$ o $\psi \in K^{\diamond}_{\phi_2}$.
Si $C^2_{S,K}(\neg\psi \mid (\phi_1 \vee \phi_2)) < 1$ entonces, para cualquier mundo $\omega \in [K]$) tenemos que $C_{S,\bar{\omega}}((\phi_1 \vee \phi_2) \wedge \psi) > C_{S,\bar{\omega}}((\phi_1 \vee \phi_2) \wedge \neg\psi)$. En estas condiciones, para cualquier $\omega \in [K]$: $\max\{C_{S,\bar{\omega}}(\phi_1 \wedge \psi), C_{S,\bar{\omega}}(\phi_2 \wedge \psi)\} > \max\{C_{S,\bar{\omega}}(\phi_1 \wedge \neg\psi), C_{S,\bar{\omega}}(\phi_2 \wedge \neg\psi)\}$. Puesto que K es completa, existe un único mundo $\omega \in [K]$. Por eso, $C_{S,\bar{\omega}}(\phi_1 \wedge \psi) > C_{S,\bar{\omega}}(\phi_1 \wedge \neg\psi)$ o $C_{S,\bar{\omega}}(\phi_2 \wedge \psi) > C_{S,\bar{\omega}}(\phi_2 \wedge \neg\psi)$. Así, ψ está en $K^{\diamond}_{\phi_1}$ o ψ está en $K^{\diamond}_{\phi_2}$.

$\diamond$ **8.** $(K_1 \bigcap K_2)^{\diamond}_{\phi} \equiv ((K_1)^{\diamond}_{\phi} \bigcap (K_2)^{\diamond}_{\phi})$.
Supongamos que ψ es una fórmula tal que $[\phi \wedge \neg\psi] = \emptyset$. En tal caso, la equivalencia es satisfecha. Asumamos que ψ es una fórmula tal que $[\phi \wedge \neg\psi] \neq \emptyset$ y $\psi \in (K_1 \bigcap K_2)^{\diamond}_{\phi}$. Entonces, $C^2_{S,K_1 \bigcap K_2}(\neg\psi \mid \phi) < 1$ y para cualquier mundo $\omega \in [K]$: $C_{S,\bar{\omega}}(\phi \wedge \psi) > C_{S,\bar{\omega}}(\phi \wedge \neg\psi)$. Puesto

que, $[K_1 \bigcap K_2] = [K_1] \bigcup [K_2]$, tenemos que $C^2_{S,K_1}(\neg\psi \mid \phi) < 1$ y $C^2_{S,K_2}(\neg\psi \mid \phi) < 1$. Ahora bajo la presunción de que ψ es una fórmula tal que $[\phi \wedge \neg\psi] \neq \emptyset$ y $\psi \in ((K_1)^\diamond_\phi \bigcap (K_2)^\diamond_\phi)$. Luego, $C^2_{S,K_1}(\neg\psi \mid \phi) < 1$ y $C^2_{S,K_2}(\neg\psi \mid \phi) < 1$. Obviamente, por definición $C^2_{S,K_1 \bigcap K_2}(\neg\psi \mid \phi) < 1$.

$\diamond$ **9.** Si K es completa y $K^\diamond_\phi \bigcup \{\nu\}$ es satisfactible entonces $K^\diamond_{\phi\wedge\nu} \models K^\diamond_\phi \bigcup \{\nu\}$.
Supongamos que ψ es una fórmula tal que $\psi \in K^\diamond_\phi \bigcup \{\nu\}$. Si ψ es ν, entonces por ($\diamond$ 1) $\psi \in K^\diamond_{\phi\wedge\nu}$. Si $\psi \in K^\diamond_\phi$ entonces, $[\phi \wedge \neg\psi] = \emptyset$ o $C^2_{S,K}(\neg\psi \mid \phi) < 1$. Si $[\phi \wedge \neg\psi] = \emptyset$ entonces, $\psi \in K^\diamond_{\phi\wedge\nu}$.
Finalmente, si $C^2_{S,K}(\neg\psi \mid \phi) < 1$, dado que K es completo, existirá un único mundo $\omega \in [K]$ tal que $C_{S,\bar{\omega}}(\phi \wedge \psi) > C_{S,\bar{\omega}}(\phi \wedge \neg\psi)$. Puesto que $K^\diamond_\phi \bigcup \{\nu\}$ es satisfactible, entonces $C_{S,\bar{\omega}}(\phi \wedge \nu \wedge \psi) > C_{S,\bar{\omega}}(\phi \wedge \nu \wedge \neg\psi)$. Así, $\psi \in K^\diamond_{\phi\wedge\nu}$.

□

Estos resultados no son sorprendentes. Las propiedades ($\star$4) y ($\diamond$2) pueden no satisfacerse en el caso de lenguajes infinitos. Pero cuando este es finito esas propiedades son recuperadas tal como lo veremos a continuación. Para ello, definiremos los siguientes pre-órdenes.

Definición 7.11 *Dada una función de similitud S, definimos para cada conjunto de fórmulas K un pre-orden total $\leq_K$ sobre el conjunto de mundos posibles:*

$$\omega_1 \leq_K \omega_2 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} C_{S,K}(\omega_1) \geq C_{S,K}(\omega_2).$$

Definición 7.12 *Dada una función de similitud S, por cada mundo ω definimos un pre-orden total $\leq_\omega$ sobre el dominio de mundos posibles como sigue:*

$$\omega_1 \leq_\omega \omega_2 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} C_{S,\bar{\omega}}(\omega_1) \geq C_{S,\bar{\omega}}(\omega_2).$$

Como ya adelantamos, cuando el lenguaje es finito los teoremas precedentes nos permiten definir operadores de revisión y de actualización, $\star_f$ y $\diamond_f$ respectivamente, usando los pre-órdenes que acabamos de definir. Dados un conjunto de fórmulas K y una fórmula ϕ sus respectivas definiciones en términos de modelos son:

$$[K^{\star_f}_\phi] = \{\omega' \in [\phi] \mid \exists\omega \in [K] : S(\omega, \omega') = C_{S,K}(\phi)\} \tag{7.4}$$

$$[K^{\diamond_f}_\phi] = \{\omega' \in [\phi] \mid \exists\omega \in [K] : S(\omega, \omega') = C_{S,\bar{\omega}}(\phi)\} \tag{7.5}$$

Ahora ya estamos en condiciones de presentar nuestro resultado para el caso de lenguajes finitos que establece que los operadores $\star^f$ y $\diamond^f$ obtenidos vía los teoremas de representación de Katsuno y Mendelzon basados en pre-órdenes de las definiciones 11 y 12, se corresponden exactamente con esos generados por las definiciones 7.9 y 7.10, respectivamente. Formalmente esto es expresado por los siguientes teoremas.

Teorema 7.12 *$\psi \in K^{\star_f}_\phi$ si y sólo si $[\phi \wedge \neg\psi] = \emptyset$ o $C_{S,K}(\neg\psi \wedge \phi) < C_{S,K}(\psi \wedge \phi)$.*

Prueba: $\psi \in K^{\star_f}_\phi$ si y sólo si $[K^{\star_f}_\phi] \subseteq [\psi]$. si y sólo si $\{\omega \in [\phi] \mid C_{S,K}(\bar{\omega}) = C_{S,K}(\phi)\} \subseteq [\psi]$.
Supongamos que, $C_{S,K}(\phi) = 0$ entonces, $\{\omega \in [\phi] \mid C_{S,K}(\bar{\omega}) = C_{S,K}(\phi)\} \subseteq [\psi]$ si y sólo si $[\phi] \subseteq [\psi]$ y por lo tanto si y sólo si $[\phi \wedge \neg\psi] = \emptyset$
Ahora supongamos que $C_{S,K}(\phi) > 0$. $\{\omega \in [\phi] \mid C_{S,K}(\bar{\omega}) = C_{S,K}(\phi)\} \subseteq [\psi]$ si y sólo si $C_{S,K}(\phi) = C_{S,K}(\phi \wedge \psi) \neq C_{S,K}(\phi \wedge \neg\psi)$ y si y sólo si $C_{S,K}(\phi \wedge \psi) > C_{S,K}(\phi \wedge \neg\psi)$. □

Teorema 7.13 *$\psi \in K^{\diamond_f}_\phi$ si y sólo si $[\phi \wedge \neg\psi] = \emptyset$ o $C^2_{S,K}(\neg\psi \mid \phi) < 1$.*

Prueba: $\psi \in K_\phi^{\diamond f}$ si y sólo si $[K_\phi^{\diamond f}] \subseteq [\psi]$ si y sólo si $\{\omega' \in [\phi] \mid$ existe $\omega \in [K]$ y $S(\omega,\omega') = C_{S,\varpi}(\phi)\} \subseteq [\psi]$. Asumamos que existe un $\omega \in [K]$ tal que $C_{S,\varpi'}(\phi) = 0$. Por lo tanto tenemos que $\{\omega' \in [\phi] \mid \exists\omega \in [K]$ y $S(\omega,\omega') = C_{S,\varpi}(\phi)\} \subseteq [\psi]$ si y sólo si $[\phi \wedge \neg\psi] = \emptyset$.
Ahora presuponiendo que $C_{S,\varpi'}(\phi) > 0$ para cualquier $\omega \in [K]$. Tenemos, $\{\omega' \in [\phi] \mid \exists\omega \in [K] : S(\omega,\omega') = C_{S,\varpi}(\phi)\} \subseteq [\psi]$ si y sólo si $C_{S,\varpi'}(\omega) = C_{S,\varpi'}(\phi) = C_{S,\varpi'}(\phi \wedge \psi) \neq C_{S,\varpi'}(\phi \wedge \neg\psi)$ para cualquier $\omega' \in [K]$, si y sólo si $C_{S,\varpi'}(\phi \wedge \psi) > C_{S,\varpi'}(\phi \wedge \neg\psi)$, para cualquier $\omega' \in [K]$, si y sólo si $C^2_{S,K}(\neg\psi \mid \phi) = \max_{\omega' \in [K]}(C_{S,\varpi'}(\phi) \otimes\!\!\longrightarrow C_{S,\varpi'}(\phi \wedge \neg\psi)) < 1$. □

A modo de reseña, podemos decir que en la presente sección hemos mostrado como operadores de revisión y de actualización pueden ser definidos en términos de funciones de similitud. Que en el fondo se corresponden a medidas de *posibilidad*. Esos operadores son algo diferentes de los propuestos por Dubois y Prade en [DP94b]. Nuestro enfoque resulta completamente compatible con las nociones de condicionales contrafácticos. Dicho con más precisión, nuestras definiciones de operadores de revisión y actualización se corresponden con las de operadores contrafácticos basados en similitudes en el siguiente sentido:

Corolario 7.5 $K \models \phi > \psi$ *según* $\$_K^S \iff \psi \in K_\phi^{\star f}$.

Corolario 7.6 $K \models \phi > \psi$ *según* $\$^S \iff \psi \in K_\phi^{\diamond f}$

Nótese que en el primer caso el operador corresponde al operador cuyo sistema lógico es el VCU, y en el segundo caso el operador debe ser pensado en el contexto de un sistema VCA.

Además vale la pena comentar que el operador mencionado en el corolario 7.5 es diferente del propuesto por Dubois y Prade en [DP94b] (pag. 75). En su caso, el condicional definido no verifica reflexividad ni supraclasicalidad (e.i $\models \phi > \phi$ y $\models \phi \longrightarrow \psi \implies \models \phi > \psi$), aspecto que fue mencionado en la anterior sección.

Por otra parte el operador de revisión referido en la Definición 7.4 tiene diferencias con el presentado por Dubois y Prade en [DP92a] donde se caracterizan operadores de revisión en el contexto de su Lógica Posibilística. Las dos diferencias más significativas son:

1. En nuestro caso la función de similitud nunca cambia y eso le da cierta "estabilidad" a la medida de posibilidad. En cambio sus funciones de revisión se basan en el cambio de la distribución de posibilidad a través de una definición de posibilidad condicional que en algún sentido es similar a la de probabilidad condicional. En su caso, esto conlleva a que la operación de revisión sea conmutativa. En nuestro caso el orden en que los cambios son realizados es significativo.

2. Por otra parte en su enfoque una vez que se asume nueva información la vieja es imposible de ser recuperada. Esto es así porque la distribución de posibilidad obtenida como resultado de una revisión tiene medida cero para los modelos descartados y tal característica produce un efecto "acumulativo" e "irreversible". En nuestro caso eso no sucede dado que el modelo propuesto se parece más a las *Revisiones Analíticas* estudiadas por Becher en [Bec99].

El operador de actualización definido por 7.5 también es diferente del propuesto por esos mismos autores via lo que ellos llaman imagen posibilística (en inglés: possibilistic imaging) en [DP94b]. La diferencia esencial es que nuestro enfoque no requiere de ninguna función de proximidad externa. Más aún la completa caracterización de nuestro operador de actualización no tiene correlato análogo en su enfoque.

Capítulo 8

Conclusiones y Futuros Trabajos

8.1 Contribuciones

Nuestro trabajo estuvo dedicado a contribuir al estudio teórico-formal del razonamiento basado en similitud. Existen en esencia dos perspectivas diferentes para abordar dicho estudio, uno cualitativo y otro cuantitativo. Los trabajos desarrollados independientemente por Nicod, Williamson, y Konikowska ([Nic70], [Wil88] y [Kon97], respectivamente) pertenecen a la primera tradición. En la segunda, es posible citar entre otros trabajos a [BJ96], [DEG+95], [DEG+97], [EGG94b], [Kla95], [Rus91], [Yin94] y [Wes87]. Nuestras contribuciones pertenecen al segundo enfoque puesto que damos una definición cuantitativa del grado de verosimilitud siguiendo la doctrina planteada por Niiniluoto en [Nii87] pág. 203. Nuestra visión está en coincidencia con la de Ruspini en [Rus91], donde se estudia una semántica para la lógica borrosa basada en las relaciones de equivalencia borrosa. La perspectiva de Ruspini es intrínsecamente modal, aunque él nunca produjo un marco lógico modal. En este trabajo tratamos de cubrir ese déficit al considerar una definición de verosimilitud basada en medidas de similitudes entre mundos la cual fue usada como la relación de accesibilidad en una semántica de Kripke.

Siguiendo las ideas de Ruspini, iniciamos nuestro análisis del razonamiento basado en similitud, a partir de una relación binaria borrosa $R : W \times W \mapsto L$ que vincula pares de mundos posibles con un elemento de un retículo L. Esas funciones fueron interpretadas como relaciones de remembranza o proximidad entre mundos posibles.

En nuestro trabajo, en la búsqueda de una propuesta lo más general posible, argumentamos por una noción de proximidad o similitud semántica representada por relaciones reflexivas que denominamos *aproximaciones superiores*, en contraste con otras propuestas que bregan por representaciones con relaciones de equivalencia (reflexivas, simétricas y transitivas). Más aún, mostramos como las *aproximaciones superiores* caracterizan a los conjuntos borrosos normales, lo que las vuelve una herramienta útil para la modelización del razonamiento borroso.

Desde ese nuevo punto de partida, redefinimos las medidas de implicación y de consistencia entre pares de conjuntos de fórmulas. Por consiguiente, las relaciones de consecuencia graduadas tomaron un carácter más general que el dado en [DEG+97] al poder ser definidas de la manera usual, entre un conjunto de fórmulas y una fórmula.

En esta memoria presentamos varias formalizaciones lógicas de esas relaciones de consecuencia graduadas usando dos técnicas diferentes una condicional y otra intensional y, dentro de cada una de ellas desarrollamos alternativas multi-modales y multivaluadas. La primera técnica consistió en definir una lógica condicional donde cada relación de consecuencia es directamente capturada o por una familia de sendos operadores binarios (enfoque multi-modal) o por sólo un par de operadores (enfoque multivaluado). En cualquier caso, los operadores condicionales no tendrán una

interpretación veritativa funcional, lo que hace diferente a nuestro enfoque respecto a otras modelizaciones del razonamiento aproximado. En comparación con los modelos condicionales clásicos (ver [Nut80]), nuestra propuesta se distingue por tomar la noción de verdad en un modelo como global, cuando la definición usual es local (i.e. dada respecto de cada modelo). Como contrapartida, esta idea de representar las medidas de consistencia y de implicación directamente en el lenguaje, nos permitió trasladar casi directamente las propiedades de los teoremas de caracterización dados en el Capítulo 2 como axiomas de la respectiva formalización lógica. El costo que tuvimos que pagar fue la restricción a lenguajes finitos.

Debido a esa limitación, es que nos volcamos a la segunda técnica que involucró una formalización indirecta de la relación de consecuencia graduada. Dada una proposición p, le asociaremos una nueva proposición borrosa p^* que leemos como "*aproximadamente-p*", donde p^* es pensada como la "distorsión" de la proposición p por medio de la relación borrosa R de la siguiente manera:

$$\mu_{p^*}(\omega) = [p]^*(\omega) = \sup_{\omega' \models p} R(\omega, \omega')$$

Esta idea fue tomada del trabajo publicado en [EGG94b] y la usamos para presentar varios tipos de consecuencias graduadas como "distorsión" o "relajación" del operador de consecuencia clásico. Esto dio lugar a la definición de varias familias de relaciones de consecuencia graduadas que en particular incluían a las aproximadas y de proximidad, sobre las cuales centramos nuestro interés.

En el lenguaje objeto, representamos la noción de "*aproximadamente-p*" a través de una familia de operadores modales unarios que dan cuenta de los α-cortes de p^* (enfoque multi-modal) o usando un único operador que representa directamente la proposición borrosa p^* (enfoque multi valuado).

Tanto para el enfoque condicional como para el intensional fue necesario establecer un contexto semántico. De acuerdo a nuestra interpretación de la noción de verosimilitud en términos de una relación de similitud borrosa, nos inclinamos por la estructura de modelo relacional de Kripke. Bajo esa estructura semántica fijamos varias familias de modelos y probamos completitud entre éstas y los correspondientes sistemas axiomáticos propuestos. Esos resultados se resumen de la siguiente manera:

Enfoque multicondicional

- El sistema multicondicional básico $\mathbf{CSI}(G, \otimes) = \mathbf{PL} + \mathbf{A} + \mathbf{ST} + \mathbf{ST'} + \mathbf{ST"} + \mathbf{OI} + \mathbf{OD} + \mathbf{RLO}$ cerrado bajo **MP** y **CI** es completo con respecto a Σ_{0f}. Más aún, probamos completitud con respecto a las subclases de modelos Σ_{2f}, Σ_{3f}, Σ_{4f} y $\Sigma_{\otimes f}$ cuando clausuramos por **RK** e incorporamos a $\mathbf{CSI}(G, \otimes)$ los axiomas **Sim**, $\otimes - \mathbf{T}$ y simultáneamente **Sim** y $\otimes - \mathbf{T}$, respectivamente.
- El sistema estricto $\mathbf{CSI}(G, \otimes)^+$, que consiste en incorporar el axioma ESC al sistema básico $\mathbf{CSI}(G, \otimes)$, es completo con respecto a la subclase de modelos Σ^+_{0f}. Nuevamente, extendimos esos resultados de completitud para las subclases de modelos $\Sigma^+_{2\ f}$, $\Sigma^+_{3\ f}$, $\Sigma^+_{4\ f}$ y $\Sigma^+_{\otimes f}$ cuando clausuramos por **RK** e incorporamos sucesivamente a $\mathbf{CSI}(G, \otimes)^+$ los axiomas **Sim**, $\otimes - \mathbf{T}$ y conjuntamente **Sim** y $\otimes - \mathbf{T}$.
- El sistema multicondicional de proximidad básico $\mathbf{CSJ}(G, \otimes) = \mathbf{PL} + \mathbf{A} + \mathbf{ST} + \mathbf{ST"} + \mathbf{OI} + \mathbf{OD} + \mathbf{IJ} + \otimes - \mathbf{T} + \mathbf{Res}$, y cerrado por la regla de inferencia **MP**, **CI** y **RK** es completo con respecto a Σ_{0f}. Además, cuando incorporamos el axioma **Rfx** a los anteriores pudimos encontrar completitud con respecto a la subclase de modelos Σ_{2f}.
- El sistema $\mathbf{CSJ}(G, \otimes)^+$, que puede ser obtenido a partir del sistema $\mathbf{CSJ}(G, \otimes)$ incorporando el axioma ESC, es completo con respecto a la subclase de modelos $\Sigma^+_{4\ f}$.

Enfoque condicional multivaluado

- El sistema de lógica condicional aproximada multivaluada básica $\mathbf{FCSI}(Q, \otimes)$ tiende los siguientes axiomas: **BL**, **ST'**, **ST"**, $\mathbf{A}_\otimes$, **rc1**, **rc2**, **Bool**, **OI**, **OD** (dónde $\mathbf{A}_\otimes$ es Ł

ó **G** ó $\{\mathbf{\Pi 1}, \mathbf{\Pi 2}\}$ según cual sea la t-norma subyacente) y que es cerrado tan sólo por la regla de inferencia **MP** si la t-norma es Gödel o Łukasiewicz y que en el caso de la t-norma producto se exige además clausura por **RI.** Ese sistema es completo con respecto a una subclase apropiada de modelos de Σ_{0f} (aquellos que interpretan correctamente los operadores multivaluados). Adicionalmente, obtuvimos completitud con respecto a una subclase apropiada de modelos de Σ_{2f}, Σ_{3f}, Σ_{4f} y $\Sigma_{\otimes f}$ cuando respectivamente, clausuramos con la regla **RK**, e incorporamos alternativamente los axiomas **Sim**, $\otimes$**−T**, y simultáneamente **Sim** y $\otimes$**−T.**

- Los resultados anteriores pueden trasladarse a los respectivos sistemas estrictos (i.e., que son cerrados por la regla **ESC**). Así, los sistemas **FCSI**$\cdot\#^+(Q,\otimes)$, donde $\# = \mathbf{T}, \mathbf{TB}, \mathbf{S4}, \mathbf{S5}$, resultan completos respecto a las correspondientes y apropiadas subclases de modelos estrictos ${\Sigma_{if}}^+$ con $i = 2, 3, 4$ o $\otimes$.
- El sistema de lógica condicional de proximidad multivaluada básica **FCSJ**$(Q,\otimes)$ corresponde al mínimo subconjunto de fórmulas de ${\mathcal{F}L_J}^k$ que contenga a los axiomas: **BL**, $\mathbf{A}_\otimes$, **rc1**, **rc2**, **Bool**, **OI**, **OD**, $\otimes$**-T** y **Res** (dónde $\mathbf{A}_\otimes$ es Ł o **G** o $\{\mathbf{\Pi 1}, \mathbf{\Pi 2}\}$) y que sea cerrado tan sólo por las reglas de inferencia **MP** y **RK** si la t-norma es Gödel o Łukasiewicz y que en el caso de la t-norma producto éste además clausura por **RI.** Éste será completo con respecto a la subclase apropiada de modelos de Σ_{0f}. Si al sistema básico le incorporamos el axioma de reflexividad **Rfx** podemos caracterizar una subclase apropiada de modelos de Σ_{2f}. Si además consideramos las correspondientes versiones estrictas al clausurar las anteriores por la regla **ESC**, podemos lograr resultados de completitud entre las subclases de modelos estrictos Σ^+_{0f} y Σ^+_{2f} y los asociados sistemas estrictos **FCSJ**$^+(Q,\otimes)$ y **FCSJ**$\cdot$**T**$^+(Q,\otimes)$, respectivamente.

Enfoque intensional multi-modal

- Si G es finito, entonces la lógica multimodal básica **MK**(G) (o **MK** para abreviar) que corresponde al mínimo conjunto de fórmulas que contiene a $PL + K^c + K^o + N^c + EX^c + EX^o + CO + OC$, y cerrado por las reglas de inferencia MP y RN^o es completa respecto de la subclase de modelos Σ_0. Más aún, las extensiones de esa lógica básica por incorporar sucesivamente los axiomas: T^c, B^c, $4^c_\otimes$ permiten obtener completitud respecto de las subclases: Σ_2, Σ_3 y $\Sigma_\otimes$, respectivamente. En este contexto finito también comprobaremos que las modalidades "abiertas" y "cerradas" son interdefinibles, y que por lo tanto los sistemas lógicos pueden ser simplificados.
- Además si G es finito e incorporamos el axioma C^c al sistema **MK**(G) y a cada una de sus extensiones, obtenemos las sistemas estrictos asociados que serán respectivamente completos con respecto a las clases de modelos: Σ^+_0, Σ^+_2, Σ^+_3 y $\Sigma^+_\otimes$.
- El sistema axiomático **MS5**$^{++}(G,\otimes) = PL + K^c + K^o + CO + OC + EX^c + EX^o + T^c + B^o + B^c + 4^o + 4^c + C^c$ y cerrado por modus ponens y necesitación, es completo con respecto a la subclase de modelos finitos de $\Sigma^*_\otimes$ cuando G es denso y enumerable, y la t-norma es $\otimes = \min$. En esas mismas condiciones, si removemos el axioma C^c del sistema **MS5**$^{++}(G,\otimes)$ obtenemos una lógica que es completa con respecto a la subclase de modelos $\Sigma_{\otimes f}$.

Enfoque intensional multivaluado

Nuestro objetivo inicial era mostrar que los sistemas **FM**$(\mathcal{C})$ (con $\mathcal{C} = BL$, Ł , G o Π) además de ser correctos con respecto a sus respectivas clases de modelos Σ_0, también eran completos. Desafortunadamente, no hemos tenido éxito en alcanzar esa meta. Pero en la búsqueda de la misma nos hemos encontrado con interesantes y relevantes resultados de los cuales dimos cuenta en el Capítulo 5. Esencialmente probamos que la Teoría de la Correspondencia, que permite concluir que propiedades de un *marco* modal están determinadas por una fórmula

modal, es aplicable en las lógicas multivaluadas. Este resultado nos permitió establecer los siguientes resultados atípicos de completitud:

$$(\forall i = 2,3,4,\otimes) \ : \ \models_{\Sigma_i} \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad (FM{\cdot}\#_i(\mathcal{C}))^* \vdash_{\mathcal{C}\forall} \varphi^*$$

dónde $\#_2 = T$, $\#_3 = TB$, $\#_4 = S4$ y $\#_\otimes = S5$. Es decir que probamos que una fórmula φ es válida en un *marco* Σ_i si y sólo si su traducción a primer orden φ^* tiene una prueba en el cálculo $\mathcal{C}\forall$ a partir de la teoría que contiene las transcripciones a primer orden de todos los axiomas del sistema $FM{\cdot}\#_i(\mathcal{C})$.

Combinando este resultado y los de correctitud que demostramos en el Capítulo 5 concluimos que para cualquier sistema $\mathcal{S}$ resulta

$$\textbf{Si} \quad \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \quad \textbf{entonces} \quad (\mathcal{S})^* \vdash_{\mathcal{C}\forall} \varphi^*$$

donde $\mathcal{S} = FM{\cdot}\#_i(\mathcal{C})$ con $\#_i$ como antes. Estos resultados nos permitieron afirmar que las lógicas que pretendimos caracterizar por los sistemas propuestos son recursivamente enumerables. Más aún, en el caso de $\mathcal{C} = G$ vimos que es posible extender el resultado a las lógicas del modelo estándar.

Después de estudiar el razonamiento por similitud desde una perspectiva à la Hilbert, pasamos a enfocar nuestro punto de análisis en aspectos más abstractos tal como sugieren los trabajos de Tarski sobre la noción de consecuencia lógica clásica. Empezamos proponiendo una nueva noción abstracta de consecuencia graduada, que denominamos *implicativa*, la cual probamos que cubre muchas de las nociones ad-hoc conocidas en la literatura. Presentamos un teorema de representación de esta noción en términos de conjuntos generadores y definimos las nociones asociadas de operadores de clausura implicativos y sistema de clausura implicativos. Probamos que estos tres conceptos tienen una interpretación muy intuitiva en términos de extensionalidad. Más aún, en base a esa interpretación estudiamos los operadores naturales propuestos por Boixader y Jacas ([BJ98]) y determinamos que la subfamilia de dichos operadores que son de clausura corresponden exactamente a la familia de nuestros operadores implicativos. También completamos la caracterización de los operadores de clausura definidos por preórdenes borrosos. En este contexto abstracto, analizamos las relaciones de consecuencia aproximadas y de proximidad y dimos algunos reveladores resultados tales como que ambas familias son más específicas que las relaciones graduadas de Chakroborty. También vimos que tienen una generalización natural para conjuntos borrosos como operadores de clausura de Pavelka pero no como operadores implicativos. Finalmente, sintetizamos todas las descripciones conocidas de operadores de clausura en el lenguaje de una BL-lógicas, lo que nos permitió dar un cuadro comparativo.

Para completar nuestro análisis del razonamiento basado en similitud, terminamos nuestra presentación estudiando las relaciones de consecuencia no monótonas, los operadores contrafácticos y los de revisión de creencias y actualización, definibles a través de las medidas de consistencia e implicación. En ese sentido, exploramos cierta clase de relaciones de consecuencia no monótonas que surgen al usar esas medidas para ordenar proposiciones à la Gärdenfors y Makinson [GM94]. Además de reproducir resultados ya conocidos en el contexto de una semántica basada en similitud, surgió una clase de operadores nomonótonos inducidos por medidas de implicación que tienen una interpretación muy diferente de las hasta ahora conocidas. Su particularidad esta dada por tener en cuenta las peores circunstancias y no las mejores como es lo usual. Otra novedad surgió al considerar una versión modificada del grado de implicación definidas en [EGG94b] como siguen:

$$I^2_{R,K}(q \mid p) = \inf_{w \models K} (I_R(p \mid w) \otimes\!\!\rightarrow I_R(q \wedge p \mid w))$$

tal que cuando p y q son mutuamente excluyentes, $I^2_{R,K}(q \mid p) = 0$. Esa medida fue usada para definir un operador de consecuencia que resultó ser no monótono en un sentido más débil que lo

usual y del cual terminamos presentando una caracterización al estilo de las dadas en el Capítulo 2.

Algo similar sucedió con los operadores contrafácticos dónde la semántica basada en similitud ya tenía tradición, al presentar no sólo una versión cuantitativa de estos operadores, sino que completamos el análisis ofreciendo definiciones de operadores contrafácticos graduados. En particular al considerar la versión modificada del grado de consistencia:

$$C^2_{R,K}(q \mid p) = \sup_{w \models K} (C_R(p \mid w) \otimes\!\rightarrow C_R(q \wedge p \mid w))$$

obtuvimos operadores contrafácticos definidos de una manera no usual y que permitía en forma sencilla dar una versión graduada de los mismos.

De todos estos resultados surgió naturalmente la inquietud por formalizar los operadores de revisión de teorías y de actualización a través de relaciones de equivalencia borrosas y a ello dedicamos el final de nuestro trabajo.

8.2 Lista de Publicaciones

La mayoría de las contribuciones mencionadas en la sección previa han sido registradas en las siguientes publicaciones:

- F. Esteva, P. Garcia, L. Godo, and R. Rodriguez. A modal account of similarity-based reasoning. *International Journal Of Approximate Reasoning*, 16(3-4):235–261, 1997.
- L. Godo and R. Rodriguez. A fuzzy modal logic for similarity reasoning. In G. Chen, M. Ying, and K. Cai, editors, *Fuzzy Logic and Soft Computing*, pages 33–48. Kluwer Academic, 1999.
- L. Godo and R. Rodriguez. A short note on nonmonotonic inferences induced by graded similarity. In AAAI, editor, *Workshop of Non Monotonic Reasoning and Uncertainty*, pages – , April 2000.
- L. Godo and R. Rodriguez. Graded similarity-based semantics for nonmonoonic inferences. In *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*. (accepted)
- R. Rodriguez, F. Esteva, P. Garcia, and L. Godo. Fuzzy approximation, modal structures and possibilistic logic. *Mathware*, 5(2-3):151—166, 1998.
- R. Rodriguez, F. Esteva, P. Garcia, and L. Godo. On fuzzy closure operators in approximate reasoning. In D. De Baets, J. Fodor, and L.T. Kóczy, editors, *Proceedings of EUROFUSE-SIC '99*, pages 149–154, Budapest, May 1999.
- R. Rodriguez, F. Esteva, P. Garcia, and L. Godo. On implicative closure operators in approximate reasoning. In *Proceeding of FUZZ-IEEE'2000*, volume 1, pages 197–202, Budapest, May 2000.
- R. Rodriguez, P. Garcia, and L. Godo. Relating similarity-based models, counterfactuals and theory change. In European Laboratory for Intelligent Techniques Enginnering, editor, *EUFIT'95*, pages 230–234, August 1995.
- R. Rodriguez, P. Garcia, and L. Godo. Similarity-based graded modal logic. In Departamento de Computación de la Universidad del Sur, editor, *ATIA'95*, pages 387–394, Octubre 1995.
- R. Rodriguez, P. Garcia, and L. Godo. Using fuzzy similarity relations to revise and update a knowledge base. *Mathware*, 3(3):357—370, 1996.

8.3 Trabajos futuros

A partir del trabajo desarrollado en cada uno de los capítulos de esta memoria han surgido o quedado pendientes muchas ideas que en este apartado trataremos de sintetizar en forma clara y ordenada. En algunos casos mencionaremos (sin prueba) algunos resultados exploratorios que no hemos incluido en el cuerpo principal de la memoria dado su estado embrionario o falta de "madurez".

Por ejemplo queda pendiente del capítulo 2 el estudio de varias relaciones de consecuencia que fueron dejadas de lado esencialmente porque no formaban parte del núcleo de nuestro interés, que era lo que dimos en llamar el silogismo extrapolativo. De la Definición 2.2 no consideramos la relación:

$$\Gamma \overset{3}{\models}^{\alpha} \psi \Longleftrightarrow \alpha \leq [\Gamma]^* \sqsubseteq [\psi]$$

En primera medida es sencillo reconocer que esta relación es más fuerte que la clásica. Pero algo más interesante puede ser dicho si consideramos el caso en que $*$ es una aproximación superior y que como consecuencia de la Proposición 2.2 existe una relación reflexiva R tal que $[\Gamma]^*(\omega) = \sup\{R(\omega,\omega') \mid \omega' \in [\Gamma]\}$. A partir de esas condiciones y considerando que $\sqsubseteq$ es la inclusión graduada definida a partir de una implicación residuada $\otimes\!\!\rightarrow$, tenemos rápidamente que $[\Gamma]^* \sqsubseteq [\psi] = \neg C_R(\neg\psi \mid \Gamma)$, dónde la negación $\neg x = x \otimes\!\!\rightarrow \bar{0}$. Lo que claramente puede ser definido como el grado de necesidad condicional de ψ dado Γ. La comprobación de que efectivamente es una medida de necesidad en su segundo argumento es inmediata. Esta observación vuelve interesante la relación y creemos que la hace merecedora de un mayor estudio.

Por otra parte cuando consideramos las relaciones de consecuencia de proximidad con contexto dejamos sin investigar el caso en el que la información de contexto viene dada por una teoría borrosa. Un primer enfoque podría suponer que dicha teoría viene descrita a través de la misma aplicación de aproximación que sustenta la relación de consecuencia. Esta simplificación está justificada por los resultados de Klawonn y Castro en [KC95] que demuestran que en el contexto del razonamiento borroso la clausura extensional del antecedente de una regla no tiene efectos sobre las conclusiones. Podemos entonces definir la siguiente noción de consecuencia.

Definición 8.1 *(***Consecuencia de proximidad borrosa***) Si $*$ denota la aplicación de aproximación correspondiente a una relación borrosa reflexiva R y T es la teoría de contexto. Entonces una relación de consecuencia de proximidad borrosa es indicada por $\overset{\alpha}{\models}_{R,T}$ y definida como:*

$$\Gamma \overset{\alpha}{\models}_{R,T} \psi \quad \textit{sii} \quad \alpha \leq ([\Gamma]^* \sqcap [T]^*) \sqsubseteq_{\otimes} [\psi]^*$$

Nuevamente, una nueva medida de implicación puede ser definida:

$$K_{R,T}(\psi \mid \Gamma) = \inf_{\omega \in \Omega} I_R(T \mid \hat{\omega}) \otimes\!\!\longrightarrow (I_R(\Gamma \mid \hat{\omega}) \ \otimes\!\!\longrightarrow I_R(\psi \mid \hat{\omega}))$$

de manera tal que la siguiente equivalencia se verifique:

$$\Gamma \overset{\alpha}{\models}_{R,T} \psi \text{ sii } K_{R,T}(\psi \mid \Gamma) \geq \alpha$$

La noción de consecuencia $\Gamma \overset{\alpha}{\models}_{R,T} \psi$ establece que si un modelo esta próximo a satisfacer la teoría T y las premisas Γ entonces esta próximo a satisfacer la conclusión ψ. Es sencillo verificar que las familia de relaciones verifica las siguientes propiedades siguiendo las técnicas desarrolladas en el Capítulo 2.

- Si $\Gamma \models \psi$ entonces $\Gamma \overset{1}{\models}_{R,T} \psi$.
- $\overset{0}{\models}_{R,T}$ es la relación de consecuencia universal.
- *Anidamiento*: Si $\Gamma \overset{\alpha}{\models}_{R,T} \psi$ entonces $\Gamma \overset{\beta}{\models}_{R,T} \psi$ para todo $\beta \leq \alpha$

- *Ó a izquierda*: $\Gamma \cong^{\alpha}_{R,T} \psi$ si y sólo si para todo $\hat{\omega} \in [\Gamma] : \hat{\omega} \cong^{\alpha}_{R,T} \psi$.

De nuevo creemos que esta clase de relaciones de consecuencia es interesante y que vale la pena su caracterización.

Otro interesante tema que hemos evitado en el Capítulo 2 es considerar una forma alternativa, pero equivalente, de definir la relación de consecuencia clásica para un par de fórmulas en el contexto de una teoría T, como:

$$\varphi \models_T \psi \iff [T] \subseteq [\varphi \to \psi]$$

La que bajo el criterio de relajación sugerido en ese capítulo (i.e., a través de una aproximación superior) resultan las siguientes definiciones alternativas:

$$\varphi \overset{1'}{\underset{T}{\models}}{}^{\alpha} \psi \iff \alpha \leq [T] \sqsubseteq [\varphi \to \psi]^* = [\neg\varphi]^* \sqcup [\psi]^*$$

$$\varphi \overset{2'}{\underset{T}{\models}}{}^{\alpha} \psi \iff \alpha \leq [T]^* \sqsubseteq [\varphi \to \psi]^* = [T]^* \sqsubseteq [\neg\varphi]^* \sqcup [\psi]^*$$

Obviamente estos operadores son diferentes que los generados con la primera definición, pero ¿Cuáles son sus interrelaciones? Más aún, la equivalencia entre las dos fórmulaciones en el caso clásico proviene del teorema de la deducción. ¿Podremos establecer una relación similar en este caso? Éstas y otras cuestiones similares serán las que trataremos de resolver en el futuro.

En el capítulo 4 hemos caracterizado las lógicas de algunas subclases de modelos de similitud. Por ejemplo, la subclase de los modelos finitos fue completamente axiomatizada. Sin embargo en el caso general queda pendiente mucho trabajo. Por ejemplo la lógica de $\Sigma^{[0,1]}_{Ł}$, i.e. el conjunto de fórmulas válidas en los *marcos* de las relaciones con rango en el [0,1] que satisfacen reflexividad, simetría y Ł-transitividad, no pudo ser capturada axiomáticamente. Sabemos que la técnica de modelo canónico no puede aplicarse. Un método alternativo consiste en probar que la lógica en cuestión satisface la propiedad de modelos finitos a través de las llamadas *filtraciones*. Pero tampoco es posible aplicar este método puesto que para garantizar que el modelo obtenido pertenece a la clase de los *marcos* Ł-transitivos es necesario que el conjunto de fórmulas por el cuál filtramos sea cerrado por modalidades. Pero no hemos podido probar que estas modalidades se reducen a un conjunto finito. Luego, no podemos restringirnos a conjuntos finitos usando filtraciones para obtener modelos de la clase deseada. Si bien no hemos renunciado a probar un teorema de reducción de modalidades tal como lo hicimos en el caso del operador del mínimo, creemos que es necesario cambiar el enfoque. Una perspectiva algebraica parece interesante. La principal razón es que el tratamiento algebraico permite aplicar técnicas y resultados más poderosos de la teoría del álgebra universal. Una razón adicional, como se señala en [BRY94], es que la semántica algebraica se comporta mejor que la semántica de *marcos* en el sentido que es posible obtener resultados de completitud más generales con la primera que con la segunda. Sin embargo, cabe indicar que este último beneficio no es de nuestro interés porque justamente la semántica en nuestro caso es fijada a priori. Sí tenemos expectativa de que algunos de los resultados de dualidad entre ambos enfoques nos permitan dar respuesta a nuestros interrogantes.

Claramente es en el Capítulo 5 donde dejamos la mayor cantidad de trabajo pendiente. En este caso creemos que algunos de los enfoques mencionados en el párrafo anterior pueden ofrecer buenos resultados también aquí. Por ejemplo, en el sentido algebraico el estudio de estos sistemas involucra el análisis de operadores interiores y de clausura dentro de las álgebras correspondientes. Este último aspecto es de significativo interés en el estudio de sistemas intuicionistas. Así, recientemente se han propuesto varias definiciones de conectivos intuicionistas cuyo estudio creemos importante con vistas a extender estas nociones intuicionistas a nuestros sistemas lógicos de Gödel.

Otra línea de trabajo consiste en tomar la llamada semántica de vecindad propuesta por Montague en [Mon74]. En el caso clásico es más general que la semántica relacional de Kripke, pero imponiendo condiciones sobre la estructura de la primera se logra reducirla a la segunda. En el contexto borroso esa reducción no es tan simple y requiere de un intensivo trabajo.

En relación a los operadores de clausura borrosos quedó pendiente la caracterizción de los operadores que son generados por una cadena de operadores clásicos. Pero más interesante es el estudio de la composición de un operador extensional de Gerla con uno generado por un preorden borroso o una relación de similitud de la siguiente manera:

$$\tilde{C}^*_S(A)(p) = C^* \circ \tilde{C}_S(A)(p)$$

Nótese que este operador puede ser visto como la contraparte sintáctica de la medida de implicción $I_S(p \mid A)$ si A es un conjunto clásico. Como caso particular, es posible obtener a partir de esta definición el operador de clausura definido en [BGY00], por Biacino, Gerla y Ying. Pero en general el operador propuesto no satisface idempotencia. Determinar bajo que condiciones el operador dado es uno de clausura será uno de nuestro objetivos futuros.

Siguiendo en la línea de ver enfoques alternativos creemos interesante el sugerido por Pert Hájek en una comunicación personal. La idea esencialmente consiste en olvidar el enfoque modal (ya sea condicional o intensional) e ir directamente a una representación de las medidas de implicación y consistencia en la lógica de primer orden multivaluada. De nuevo nos circunscribiríamos un lenguaje de predicados unarios con un único predicado binario y así $I_R(q \mid p)$ sería definido como el valor de verdad de la fórmula

$$(\forall\omega)(p(\omega) \to (\exists\omega')(R(\omega,\omega')\&q(\omega')))$$

de esta manera expresamos que para cada ω con $p(\omega)$ hay un similar ω' tal que $q(\omega')$. Nótese que esa fórmula corresponde a la traducción, según lo que vimos en el Capítulo 5, de la fórmula modal $p \to \Diamond q$. Además, en el caso particular de restringir los valores de verdad de los predicados unarios al 0 ó 1, recuperamos la definición original. Algo similar podemos hacer con la medida $C_R(q \mid p)$ si la definimos como:

$$(\exists\omega)(p(\omega)\&(\exists\omega')(R(\omega,\omega')\&q(\omega')))$$

Si bien este enfoque nos permitiría utilizar algunos de los resultados de completitud de la lógica de primer orden multivaluada, requiere estudiar especialmente el sublenguaje de predicados monádicos con un único relator binario.

Finalmente, toda una línea de investigación es proponer sistemas de pruebas para las lógicas estudiadas en esta memorias. En el caso de los sistemas basados en secuentes el trabajo realizado aquí sugiere que tipo de reglas deben incluirse. Una propuesta basada en un método de prueba tipo resolución requiere un poco más de trabajo.

Capítulo 9

Anexo 1: Conocimientos Previos

En esta sección haremos un raconto de las definiciones y propiedades de los conceptos que a lo largo de nuestra presentación daremos por conocidos. Cuatro serán los tópicos que presentaremos: Medidas de Implicación y Consistencia, Cálculo Proposicional, BL-lógica y BL-álgebras, y Lógicas Modales. En el resumen que presentaremos aquí y en el resto de todo este trabajo supondremos por conocidos los conceptos clásicos y básicos tanto de lógica proposicional como de primer orden. En ese sentido las breves menciones que haremos servirán sólo a los efectos de fijar el léxico que utilizaremos.

9.1 Medidas de Implicación y Consistencia: Definiciones y Propiedades

Las nociones de intersección e inclusión de conjuntos de modelos juegan un rol central en la lógica deductiva puesto que subconjuntos de modelos son formalmente equivalentes a proposiciones y así la validez de una implicación corresponde a la inclusión de los modelos del antecedente en el conjunto de modelos del consecuente y la satisfacción de un conjunción se reduce a verificar que los modelos de los conyuntos tiene intersección no vacía. Clásicamente sólo se reconocen dos grados de inclusión y de intersección: si o no. Ruspini en [Rus91] propone generalizar la definición de esas dos nociones de forma que admita grados intermedios. Para ello introduce una "medida" S entre modelos (o mundos posibles) que le permite formalizar la idea de vecindad alrededor de cada unos de ellos. La S será para Ruspini una relación borrosa $S : \Omega \otimes \Omega \mapsto [0,1]$ (donde Ω representa el conjunto de todos las interpretaciones booleanas del lenguaje proposicional $\mathcal{L}$) llamada de similitud y que satisface las siguiente propiedades:

Reflexividad	Para todo $\omega \in \Omega : S(\omega,\omega) = 1$.
Simetría	Para todo $\omega, \omega' \in \Omega : S(\omega,\omega') = S(\omega',\omega)$.
$\otimes$-Transitividad	Para todo $\omega, \omega', \omega'' \in \Omega : S(\omega,\omega') \otimes S(\omega',\omega'') \leq S(\omega,\omega'')$, donde $\otimes$ es una t-norma.

Con ese ingrediente se define el grado de implicación entre dos proposiciones p y q como:

$$I_S(q \mid p) = \inf_{\omega \models p} \sup_{\omega' \models q} S(\omega,\omega')$$

Definida de esa manera resulta que la medida de implicación representa el grado de vecindad de los p-mundos (o modelos) respecto de los q-mundos. Nótese que debido a las propiedades asumidas para S, si los modelos de p están incluídos en los modelos de q entonces $I_S(q \mid p) = 1$, recuperando la noción clásica de implicación. Además, esta medida satisface las siguientes propiedades (probadas en [Rus91]) donde $p, r, q \in \mathcal{L}$:

1. Si $p \to q$ es una fórmula válida entonces $I_S(p \mid r) \leq I_S(q \mid r)$.

2. Si $p \to q$ es una fórmula válida entonces $I_S(r \mid q) \leq I_S(r \mid p)$.

3. $I_S(p \mid r) \leq I_(p \mid q) \otimes I_S(q \mid r)$.

4. $I_S(r \mid p \vee q) = \min(I_S(r \mid p), I_S(r \mid q))$.

Usando la medida de similitud S, Ruspini también define la noción de grado de consistencia entre dos proposiciones p y q como:

$$C_S(q \mid p) = \sup_{\omega \models p} \sup_{\omega' \models q} S(\omega, \omega'),$$

Podemos notar que a partir de la propiedades requeridas para S resulta que si la fórmula $p \wedge q$ es satisfacible entonces $C_S(q \mid p) = 1$. Otra inmediata consecuencia es que C_S resulta ser simétrica. Desde un punto de vista intuitivo podemos decir que C_S mide la separación entre los modelos de p y q. Algunas propiedades interesantes y que serán usadas durante nuestra exposición son:

1. $I_S(q \mid p) \leq C_S(q \mid p)$.

2. $C_S(q \vee p \mid r) = \max(C_S(q \mid r), C_S(p \mid r))$.

donde $p, r, q \in \mathcal{L}$. Es interesante notar que si la segunda componente de estas medidas tiene un único modelo entonces sus valores coinciden cualquiera sea la fórmula que se incluya en el primer parámetro.

A lo largo del trabajo que desarrollaremos en esta disertación haremos un amplio uso de estas dos medidas. Mas aún, generalizaremos su definición para relaciones que no sean una medida de similitud y para dos conjuntos de fórmulas en lugar de dos fórmulas.

9.2 El Cálculo Proposicional

El Cálculo Proposicional Clásico (CP) se construye a partir del siguiente conjunto de símbolos primitivos o no definidos que constituyen su alfabeto básico (usualmente notado como $\mathcal{A}$):

1. Un conjunto infinito (numerable) de símbolos de proposición, que notaremos con subíndices $\{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$. Representaremos a este conjunto mediante el símbolo *Prop*.

2. Los símbolos u operadores básicos $\top$, $\neg$, $\vee$, (y).

Ciertas secuencias de símbolos constituyen lo que se denominan las fórmulas bien formadas (fbf) del Cálculo Proposicional. Las reglas de formación son las siguientes:

- $\top$ es una fbf.
- Todo símbolo de proposición p_i con $i \in IN$ es una fbf.
- Si φ es una fbf, entonces $\neg\varphi$ es una fbf.
- Si φ y ψ son fbf, entonces $\varphi \vee \psi$ es una fbf.

Notaremos con las letras φ, ψ, ... a fórmulas cualesquiera y con Γ, Σ, ... conjuntos de fórmulas cualesquiera. Cuando sea posible evitaremos el uso de paréntesis según es habitual. Representaremos al conjunto de todas las fórmulas bien formadas (lenguaje) sobre el alfabeto $\mathcal{A}$ mediante el símbolo $\mathcal{L}$.

Los símbolos de proposición son variables que toman proposiciones como valores. Cada proposición es verdadera o falsa, pero no ambos. Usaremos los valores '1' para el valor verdadero y '0' para el valor falso. Decimos que $e : \mathcal{L} \mapsto \{0, 1\}$ es una evaluación del Cálculo Proposicional si y sólo si satisface las siguientes condiciones:

$e1$ $e(\top) = 1$.

$e2$ Para todo símbolo de proposición p, $e(p) = 0$ o $e(p) = 1$, pero no ambos.

$e3$ Para toda fbf φ, $e(\neg\varphi) = 1$ si $e(\varphi) = 0$, en otro caso $e(\neg\varphi) = 0$.

$e4$ Para todo par de fbfs φ y ψ, $e(\varphi \vee \psi) = 1$ si $e(\varphi) = 1$ o $e(\psi) = 1$, en otro caso $e(\varphi \vee \psi) = 0$.

Una fbf φ que recibe el valor 1 bajo toda posible evaluación e es llamada CP-válida o tautología del CP. El símbolo $\top$ es también utilizado para representar una tautología cualquiera. Esto es posible debido a que en toda fórmula cuyo significado sea dado en términos de una función de verdad (como para cualquier fórmula de CP) una tautología puede ser intercambiada por otra sin que el valor de verdad de la fórmula sea modificado. La noción opuesta a CP-tautología es la de CP-contradicción, una fórmula que recibe el valor 0 bajo toda posible evaluación e. El símbolo $\perp$ se utiliza para representar una contradicción cualquiera. Notaremos como Tau al conjunto de todas las tautologías y Con al conjunto de todas las contradicciones.

$\neg$ y $\vee$ se denominan operadores básicos pues a partir de ellos pueden definirse operadores derivados. Los más usuales son los siguientes:

- $\perp =_{def} \neg\top$.
- $(\varphi \wedge \psi) =_{def} \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$.
- $(\varphi \rightarrow \psi) =_{def} (\neg\varphi \vee \psi)$.
- $(\varphi \leftrightarrow \psi) =_{def} ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$.

Las interpretaciones de $\perp$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ están determinadas por su definición, más la definición de las interpretaciones de los operadores básicos.

9.3 BL-álgebras y BL-lógicas

En esta subsección describiremos someramente los concepto básicos de la llamada *lógica borrosa*, la cual como, ya fue mencionado en la introducción, involucra en su sentido estricto, a diferentes sistemas de lógicas multivaluadas. En nuestro trabajo nos concentraremos en las lógicas que surgen como reflejo sintáctico de interpretar la conjunción a través de una t-norma continua (i.e. una operación $\otimes : [0,1]\times[0,1] \mapsto [0,1]$ que es conmutativa, asociativa, no decreciente en sus argumentos, que tiene al 1 como elemento neutro y al 0 como absorbente). La ventaja asociada a estas funciones es que a partir de cada una de ellas es posible definir su residuo como $x \otimes\!\!\rightarrow y = \sup\{z \mid x \otimes z \leq y\}$ la cual sirve como función de interpretación de la implicación. Además a partir de ellas es posible definir $\min(x,y) = x \otimes (x \otimes\!\!\rightarrow y)$ y $\max(x,y) = \min((x \otimes\!\!\rightarrow y) \otimes\!\!\rightarrow y, (y \otimes\!\!\rightarrow x) \otimes\!\!\rightarrow x)$. Las más difundidas t-normas son: Łukasiewicz con $x \otimes y = \max(0, x+y-1)$; Gödel con $x \otimes y = \min(x,y)$; Producto con $x \otimes y = x \cdot y$. Sus correspondientes residuos $x \otimes\!\!\rightarrow y$ coinciden con valor 1 si $x \leq y$ y si $y < x$ entonces $x \otimes\!\!\rightarrow y = \min(1, 1-x+y)$ para Łukasiewicz ; $x \otimes\!\!\rightarrow y = y$ para Gödel ; y $x \otimes\!\!\rightarrow y = y/x$ para el producto. Además, la función de negación $-x = x \otimes\!\!\rightarrow \bar{0}$ se transforma en $1-x$ en Łukasiewicz, y en la función discontinua $-0 = 1$ y $-x = 0$ si $x > 0$.

Las lógicas en cuestión tendrán fórmula que serán construídas en la forma mencionada anteriormente a partir de un conjunto numerable de variables proposicionales $Prop = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$, conectivas & y $\rightarrow$, y al menos una constante de verdad $\bar{0}$. Otra conectivas serán definibles como: $\neg\varphi = \varphi \rightarrow \bar{0}$; $\varphi \wedge \psi = \varphi \& (\varphi \rightarrow \psi)$; $\varphi \vee \psi = ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) \wedge ((\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$.

La interpretación de estas fórmulas se establece de forma similar al caso proposicional, a través de funciones de evaluación $e_\otimes$ que asignan a cada variable proposicional un valor de verdad y que es extendida a todo el lenguaje según sea la t-norma $\otimes$ elegida. Una fórmula φ será una $\otimes$-tautología si $e_\otimes(\varphi) = 1$ para toda evaluación $e_\otimes$ y φ será una t-tautología si para cualquier $\otimes$ es una $\otimes$-tautología.

Al conjunto de todas las t-tautologías se lo denomina lógica básica o BL. La misma puede ser descripta à la Hilbert mediante los siguiente axiomas:

BL:
1. $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$.
2. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$.
3. $(\varphi \& \psi) \to (\psi \& \varphi)$.
4. $(\varphi \& (\psi \& \chi)) \to ((\psi \& \varphi) \& \chi)$.
5. $(\varphi \to (\psi \to \chi))$
   $leftrightarrow((\varphi \& \psi) \to \chi)$.
6. $((\varphi \to \psi) \to \chi) \to (((\psi \to \varphi) \to \chi) \to \chi)$.
7. $\bar{0} \to \varphi$.

y con la regla de deducción modus ponens. Siendo las nociones de prueba y probabilidad las usuales. Estos axiomas corresponden a los que Hájek denomina la lógica básica común a la descripción de cualquier t-norma continua. Adicionalmente, según cual sea la t-norma $\otimes$ que estemos considerando (Gödel, Łukasiewcz o Producto), podemos obtener los sistemas de las respectivas $\otimes$-tautologías, extendiendo la axiomática anterior, alternativamente, con los siguientes axiomas:

G: $\varphi \to (\varphi \& \varphi)$.

Ł: $\neg\neg\varphi \to \varphi$.

Π:
1. $\neg\neg\chi \to (((\varphi \& \chi) \to (\psi \& \chi)) \to (\varphi \to \psi))$.
2. $\varphi \& \neg\varphi \to \bar{0}$.

Así la axiomática obtenida por juntar **BL** y **G** corresponde a la lógica de Gödel, [Göd32], con **BL**+Ł resulta la caracterización de la lógica de Łukasiewicz, [Háj98], y a partir de **BL**+**Π1**+**Π2** se consigue la lógica del producto, [HGE96].

Álgebras generales de funciones de verdad para BL son llamadas BL-álgebras. Una *BL-álgebra* es un álgebra $\mathcal{A} = \langle A, \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0, 1\rangle$ con cuatro operaciones binarias y dos constantes tal que

(i) $\langle A, \cap, \cup, 0, 1\rangle$ es un retículo cuyo mayor elemento es 1 y su menor elemento es 0 (con respecto al orden del retículo $\leq$),

(ii) $\langle A, *, 1\rangle$ es un semigrupo conmutativo cuya unidad es el elemento 1, i.e. $*$ es conmutativo, asociativo y $1 * x = x$ para todo x,

(iii) Verifica las siguientes condiciones para todo x, y, z:

(1a) $z \Rightarrow (x \Rightarrow y) = (x * z) \Rightarrow y$.

(1b) $(x \wedge y) * z = (x * z) \wedge (y * z)$.

(2) $x \cap y = x * (x \Rightarrow y)$.

(3) $(x \Rightarrow y) \cup (y \Rightarrow x) = 1$.

En otras palabras, una BL-álgebra es un *retículo residuado* satisfaciendo además (2) que representa la continuidad y (3) que es la noción de prelinearidad. Vale la pena mencionar que la clase de todas las BL-álgebras forman una variedad. Más aún, cada BL-álgebra puede ser descompuesta en un producto subdirecto de BL-álgebras linealmente ordenadas.

La noción de BL-álgebra puede ser vista como la generalización de otras mucho más conocidas. Así, definiendo $\neg x = x \Rightarrow 0$, resulta que las *MV-álgebras* son BL-álgebras satisfaciendo que $\neg\neg x = x$, las G-*álgebras* son BL-álgebras verificando que $x * x = x$, y finalmente, que las *álgebras producto* son BL-álgebras que cumplen que

$$x \cap \neg x = 0$$
$$\neg\neg z \Rightarrow ((x * z = y * z) \Rightarrow x = y) = 1.$$

Por otra parte, si $*$ es una t-norma $\otimes$ y $\otimes\!\!\rightarrow$ su residuo entonces $([0,1], \min, \max, \otimes, \otimes\!\!\rightarrow, 0, 1)$ es un caso particular de BL-álgebra linealmente ordenada denotada con $[0,1]_\otimes$ y llamadas t-álgebras o álgebras estándar. Si denotamos genéricamente a BL, Ł, G y Π con $\mathcal{C}$ podemos enunciar el siguiente **teorema de completitud general**:

Teorema 9.1 *Para cada fórmula φ las afirmaciones son equivalentes:*

- *φ es probable en $\mathcal{C}$.*
- *por cada $\mathcal{C}$-álgebra L, φ es una L-tautología.*
- *por cada $\mathcal{C}$-álgebra linealmente ordenada L, φ es una L-tautología.*
- *φ es una $[0,1]_\mathcal{C}$-tautología.*

Una ΔBL-álgebra es una estructura $(L, \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0, 1, \Delta)$ la cual es una BL-álgebra expandida con el agregado de un operador binario Δ verificando las condiciones:
$\Delta x \cup -\Delta x = 1$
$\Delta(x \cup y) \leq \Delta x \cup \Delta y$
$\Delta x \leq x$
$\Delta x \leq \Delta\Delta x$
$(\Delta x) * (\Delta(x \Rightarrow y)) \leq \Delta y$
$\Delta 1 = 1$

Una vez que realizamos la resumida presentación de la lógica proposicional borrosa, pasamos a introducir la versión de primer orden. Sus fórumulas se constituyen en forma similar al caso cásico a partir del lenguaje formado por: conjuntos de predicados $Pred$, de constantes $Const$ y de variables Var ; conectivas lógicas como &, $\rightarrow$; al menos una constante de verdad $\bar{0}$; y cuantificadores $\forall$ y $\exists$. Dada una BL-álgebra L, una L-interpretación será una estructura $\mathbf{M} = (M, \{r_P\}_{P \in Pred}, \{m_c\}_{c \in Const})$ donde $m_c \in M$ para cada constante c, y para cada predicado P de aridad n, $r_p : M^n \mapsto L$. La noción de variable libre y ligada es la usual. El valor de verdad de una fórmula φ, denotado como $||\varphi||^L_{\mathbf{M},v}$ siendo L y $\mathbf{M}$ como antes y v una función de asignación $v : Var \mapsto M$, es definida como sigue:

$$||P(x_1, \ldots, x_n)||^L_{\mathbf{M},v} = r_P(v(x_1), \ldots, v(x_n))$$

$$||\varphi \& \psi||^L_{\mathbf{M},v} = ||\varphi||^L_{\mathbf{M},v} \varphi * ||\psi||^L_{\mathbf{M},v}, \text{ lo mismo para } \rightarrow \text{ y } \Rightarrow$$

$$||(\forall x)\varphi||^L_{\mathbf{M},v} = \inf\{||\varphi||^L_{\mathbf{M},v'} \mid v' \equiv_x v\}, \text{ lo mismo para } \exists \text{ y sup}$$

donde $v' \equiv_x v$ significa que $\forall y \neq x \in Var : v'(y) = v(y)$. Casos particulares de esas interpretaciones se dan cuando consideramos las álgebras estándar dando lugar para cada t-norma $\otimes$ a las $[0,1]_\otimes$-interpretaciones. En tales casos las definiciones anteriores son totales gracias a que el orden en $[0,1]$ es completo. En general podría suceder que algún valor de interpretación sea indefinido debido a la inexistencia del correspondiente supremo o ínfimo. Justamente por ello se distinguen los modelos cuya interpretación es total con el nombre de "seguros". Una fórmula φ es una L-tautología si $||\varphi||^L_{\mathbf{M},v} = 1$ para toda L-interpreación segura $\mathbf{M}$ y toda asignación v. Usualmente, se denota con $||\varphi||^L_{\mathbf{M}}$ al $\inf\{||\varphi||^L_{\mathbf{M},v} \mid v\}$ y se dice que φ es L-verdadera en $\mathbf{M}$ si $||\varphi||^L_{\mathbf{M}} = 1$. Las siguientes fórmulas son L-tautologías para cualquier BL-álgebra linealmente ordenada L, donde ψ no tiene a x como variable libre:

($\forall$1) $(\forall x)\varphi(x) \rightarrow \varphi(y)$.

($\forall$2) $(\forall x)(\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\psi \rightarrow (\forall x)\varphi)$.

(∀3) $(\forall x)(\psi \vee \varphi) \to \psi \vee (\forall x)\varphi$.

(∃1) $\varphi(y) \to (\exists x)\varphi(x)$.

(∃2) $(\forall x)(\varphi \to \psi) \to ((\exists x)\varphi \to \psi)$.

y las reglas de deducción de modus ponens y de generalización (i.e. a partir de φ deducir $(\forall x)\varphi$) preservan L-tautologicidad. Si volvemos a denotar genéricamente a BL, Ł, G y Π con $\mathcal{C}$, los cálculos de predicados $\mathcal{C}\forall$ son definidos como los respectivos axiomas del cálculo proposicional (donde se admite reemplazar las fórmulas de los esquemas por fórmulas del lenguaje de primer orden), más los cinco axiomas sobre cuantificadores recién mencionados y con las reglas de inferencia: modus ponens y generalización. La definición de teoría y de prueba a partir de ella es definida en la forma usual y se escribe $T \vdash_{\mathcal{C}\forall} \varphi$ para indicar que la fórmula φ tiene una prueba en $\mathcal{C}$ a partir de T. Un L-modelo de T es una L-interpretación segura $\mathbf{M}$ tal que todas las fórmulas de T son L-verdaderas. Con todos estos elementos podemos presentar el **teorema de completitud general** para primer orden:

Teorema 9.2 *Por cada teoría T y fórmula φ, resulta que $T \vdash_{\mathcal{C}\forall} \varphi$ si y sólo si para toda linealmente ordenada $\mathcal{C}$-álgebra L y cada L-modelo $\mathbf{M}$ de T, φ es L-verdadera en $\mathbf{M}$. En particular, φ es probable en $\mathcal{C}\forall$ si y sólo si para toda $\mathcal{C}$-álgebra L, φ es una L-tautología.*

Quedan algunas cuestiones abiertas en el contexto de las lógicas de primer orden borrosas que vale la pena mencionar. Por una parte podríamos cuestionarnos si como en el caso proposicional el teorema de completitud puede reducirse a las álgebras estándar y encontrar que la respuesta es afirmativa para el caso de $G\forall$ dado que coincide con $[0,1]_G\forall$, pero en el resto la respuesta es negativa puesto sus respectivas nociones de tautologicidad estándar no son recursivamente axiomatizables. Ante este resultado negativo, también prodríamos preguntar por la existencia de fragmentos o reductos del lenguaje de primer orden que sean recursivamente axiomatizables o aún decidibles, como por ejemplo el primer orden monádico. Varias de estas cuestiones permanecen pendientes y son motivo de interesantes líneas de investigación.

Para ir terminando con este resumen de las lógicas borrosas en el sentido estricto queremos mencionar la introducción de constantes de verdad en el lenguaje con el objeto de poder representar verdades parciales. Los cálculos presentados hasta ahora sólo permiten probar 1-tautologías y a partir de teorías cuyas fórmulas son tomadas como 1-verdaderas, pero en el razonamiento con conceptos vagos muchas veces nos interesan patrones de inferencia a partir de antecedentes parcialmente verdaderos, y que admitan que la conclusión también lo sea. Para cada una del las tres t-normas $\otimes$ mencionadas: Łukasiewicz, Producto o Gödel, podemos enriquecer su lenguaje incorporando una constante de verdad $\overline{r}$ por cada *racional* $r \in [0,1]$, dando lugar a lo que se conoce como lógica racional de Łukasiewicz, Producto o Gödel, respectivamente.

Una interpretación $e_\otimes$ de variables proposicionales a los reales en $[0,1]$ es extendida al caso con constantes de verdad, requiriendo que para cada racional $r \in [0,1]$: $e_\otimes(\overline{r}) = r$. De esa manera resultan ser $\otimes$-tautologías los llamados axiomas de book-keeping que guardan coherencia entre las operaciones sobre dichas constantes y los números racionales que ellas representan:

rc : 1. $\overline{r}\&\overline{s} \equiv \overline{r \otimes s}$.
2. $\overline{r} \to \overline{s} \equiv \overline{r \otimes\to s}$.

Como hasta ahora, una interpretación $e_\otimes$ será un $\otimes$-modelo de una teoría T si $e_\otimes(\varphi) = 1$ para toda $\varphi \in T$. Dos nociones principales necesitan ser introducidas ahora.

Definición 9.1 *Sea T una teoría se define el* grado de verdad *de una fórmula φ en T como*

$$||\varphi||_T^\otimes = \inf\{e_\otimes(\varphi) \mid e_\otimes \text{ es un } \otimes\text{-modelo de } T\}$$

y el grado de prueba *de φ a partir de T como*

$$|\varphi|_T = \sup\{r \mid T \vdash \overline{r} \to \varphi\}$$

En el caso de la lógica racional de Łukasiewicz (i.e. la lógica que tiene por axioma a los **BL**, más Ł y los de book-keeping para esa t-norma, y que es cerrada por modus ponens) también llamada RPL (en inglés Rational Pavelka Logic), es posible demostrar que estas dos nociones coinciden. Mas precisamente, para cualquiera teoría T y para cualquier fórmula φ : $|\varphi|_T = ||\varphi||_T^{Ł}$. Esto corresponde a lo que se ha dado en llamar un teorema de completitud al estilo Pavelka. Lo particular de este resultado está en que el grado de prueba es un supremo, y por lo tanto no necesariamente alcanzable, i.e. $|\varphi|_T = 1$ no implica $T \vdash \varphi$, salvo que T sea finita. Este hecho es el que permite también dar un resultado de completitud fuerte para $\forall RPL$ (la extensión a primer orden) cuando la lógica de predicados de Łukasiewicz ($\forall[0,1]_Ł$), no posee dicha propiedad (ver [Háj98, Cap. 5] para mas detalles).

Tal como lo demuestra Pavelka en [Pav79], teoremas de completitud análogos para las respectivas lógicas racionales de Gödel y Producto son imposibles debido a las discontinuidades de sus respectivas funciones de implicación. Sin embargo para el caso del Producto, atendiendo a que la discontinuidad se restringe al par $(0,0)$, es posible introducir la siguiente regla infinitaria con el fin de salvar ese problema:

RI De $\forall r > 0 : \varphi \to \bar{r}$ inferir $\varphi \to \bar{0}$.

Si denotamos con $R\Pi L$ a la lógica racional del Producto que contienen los axiomas **BL**, más $\Pi 1$ y $\Pi 2$, los de book-keeping para esa t-norma, y que es cerrada por modus ponens y la regla infinitaria anterior, resulta que podemos reproducir en $R\Pi L$ la afirmación que para cualquiera teoría T y para cualquier fórmula φ : $|\varphi|_T = ||\varphi||_T^{\Pi}$.

La situación de la lógica racional de Gödel es aún mas complicada puesto que es discontinua en todos los pares de $[0,1) \times [0,1)$. En principio es claro que una solución como la mencionada en el caso del Producto no es factible porque requeriría incorporar un conjunto no numerable de reglas infinitarias. Hasta el momento permanece abierta la pregunta de si es posible superar este problema.

Ahora sí, para finalizar esta presentación dos aspecto desconexos pero imprescindibles para nuestro trabajo. Uno corresponde a la introducción de la noción de igualdad clásica en las lógicas borrosas que precisaremos en el Capítulo 5. La misma requiere que incorporemos al lenguaje un predicado binario especial $=$ conjuntamente con los siguientes axiomas:

Eq-1: $(\forall x)(x = x)$
Eq-2: $(\forall x, y)((x = y) \to (y = x))$
Eq-3: $(\forall x, y, z)((x = y)\&(y = z) \to (x = z))$
Eq-4: $(x = y) \to (P(\ldots, x, \ldots) \equiv P(\ldots, y, \ldots))$
Eq-5: $(\forall x, y)((x = y) \vee \neg(x = y))$

Eq-1, Eq-2 Eq-3 y Eq-4 corresponden a los axiomas usuales para la igualdad borrosa. Los primeros tres la definen como una relación de equivalencia borrosa, pues corresponden a reflexividad, simetría e &-transitividad. El cuarto es el axioma de congruencia de $=$ con respecto a cualquier predicado P. Finalmente, el quinto axioma asegura que el predicado de igualdad $=$ sea clásico, i.e. que sólo pueda ser evaluado como 0 o 1.

El otro tema corresponde a mencionar el álbebra del conjunto *Potencias* de otro conjunto, la noción de BL-subconjunto y algunas de sus propiedades que necesitaremos en el Capítulo 6. A partir de aquí,tomaremos en cuenta sólo BL-álgebras completas.

Dada una BL-álgebra completa y un conjunto no vacío S, un BL-subconjunto s de S será definido como una aplicación desde S a BL ($s : S \longmapsto BL$). El concepto de α-corte de un BL-subconjunto establece la conección entre las teorías de conjuntos borrosos y la de conjuntos clásicos. Dado un BL-subconjunto s de S y $\alpha \in BL$, el subconjunto

$$s_\alpha = \{x \in S : s(x) \geq \alpha\}$$

es llamado el α-corte cerrado de s y el conjunto

$$s_\alpha^+ = \{x \in S : s(x) > \alpha\}$$

es llamado el α-corte abierto de s. Note que por definición un α-corte cerrado de un subconjunto s puede ser visto como un conjunto borroso s_α (respectivamente un α-corte abierto s_α^+) tal que $s_\alpha(x) \in \{0,1\}$ para todo $x \in S$. Esa clase de conjuntos borrosos son llamados *crisp*. La clase de todos los BL-subconjuntos de S es denotado como BL^S. Las operaciones de una BL-álgebra pueden ser transladadas a la clase BL^S de la manera usual $((A \circ_{\mathcal{BL}(S)} B)(x) = A(x) \circ_{\mathcal{BL}} B(x)$ donde $\circ \in \{\wedge, \vee, *, \Rightarrow\}$).

Es un hecho bien conocido que ([Gog93]) si L es un retículo distribuído y completo, entonces su conjunto potencia L^S tiene la misma estructura. Ese resultado puede ser extendido a la estructura

$$\mathcal{BL}(S) = (BL^S, \wedge_{\mathcal{BL}(S)}, \vee_{\mathcal{BL}(S)}, *_{\mathcal{BL}(S)}, \Rightarrow_{\mathcal{BL}(S)}, \emptyset, \mathbf{S})$$

dónde $\emptyset$ es la función constante cero, y $\mathbf{S}$ es la función constante uno. En ese sentido, $\mathcal{BL}(S)$ es una BL-álgebra.
La relación de orden natural $\leq_{\mathcal{BL}(S)}$ sobre la estructura BL^S es definida como:

$$A \leq_{\mathcal{BL}(S)} B \ iff \ \forall x \in S \ : \ A(x) \leq_{\mathcal{BL}} B(x)$$

En el contexto de una ΔBL^S-álgebra, α-cortes abiertos y cerrados de BL-subconjunto s pueden ser expresados de la siguiente forma:

$$s_\alpha = (\Delta(\bar{k} \otimes\!\!\rightarrow s))$$

$$s_\alpha^+ = (\neg\Delta(s \otimes\!\!\rightarrow \alpha))$$

En el capítulo 5, omitiremos el prefijo BL y el subíndice $\mathcal{BL}$ cuando nos refiramos a subconjuntos borroso y operaciones entre ellos. También, nos restringiremos a trabajar sobre el retículo de todos los BL subconjuntos de un lenguaje proposicional $\mathcal{L}$ el cual denotaremos por $\mathcal{F}(\mathcal{L})$.

9.4 Lógica Modal

Daremos a continuación las nociones básicas de Lógica Modal que se utilizarán en el trabajo. Las referencias clásicas son [Che80], [HC84] y [Jan90].

Empezaremos por remarcar que todos los operadores que definimos hasta ahora (básicos y derivados) comparten la característica de ser veritativos funcionales. Esto significa que cuando construimos una proposición utilizando proposiciones más simples y alguno de estos operadores, el valor de verdad de la nueva proposición queda unívocamente determinado por el valor de verdad de las proposiciones que utilizamos en la construcción. El Cálculo Modal Clásico (CM) se obtiene como una extensión del Cálculo Proposicional Clásico, introduciendo el operador $\Box$ y obteniendo de esta manera el alfabeto modal $\mathcal{A}_\Box = \{(,), \neg, \vee, \Box\} \cup \{p_i | i \in I\!N\}$. La principal característica del operador $\Box$ que lo hace diferente de los operadores anteriores es que no es veritativo funcional. Veremos con detalle esta característica más adelante. Dado que hemos extendido nuestro alfabeto agregando más operadores primitivos, debemos también realizar extensiones a las definiciones que hemos dado hasta el momento. El conjunto $\mathcal{L}_\Box$ de las fórmulas bien formadas sobre $\mathcal{A}_\Box$ se define mediante las reglas de formación mencionadas para CP más:

- Si φ es una fbf, entonces $\Box\varphi$ es una fbf.

Definimos también un nuevo operador derivado $\Diamond$ como:

- $\Diamond\varphi =_{def} \neg\Box\neg\varphi$.

Los nuevos operadores $\Box$ y $\Diamond$ pueden ser interpretados de distintas formas. Clásicamente, $\Box$ es el operador de necesidad y $\Diamond$ su dual, posibilidad; sin embargo, sus características exactas pueden variar dependiendo de diferentes parámetros.

Un sistema de lógica modal o más simplemente una lógica modal no es más que un subconjunto del lenguaje $\mathcal{L}_\Box$. Si $\mathcal{S}$ es una lógica modal, los elementos de $\mathcal{S}$ son teoremas de la lógica y notaremos habitualmente $\vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ si $\varphi \in \mathcal{S}$. La lógica modal que comprende todo el lenguaje $\mathcal{L}_\Box$ es el único sistema inconsistente, todos los otros sistemas son consistentes.

Dada una fórmula φ cualquiera en $\mathcal{L}_\Box$, una instancia de sustitución de φ es la fórmula que se obtiene al reemplazar toda aparición de un símbolo de proposición p_i en φ, uniformemente, por otra fórmula φ' de $\mathcal{L}_\Box$.

Un sistema de lógica modal $\mathcal{S}$ es *normal* si cumple con las siguientes reglas:

1. Si φ es una CP-tautología o una instancia de sustitución de CP-tautología entonces φ está en $\mathcal{S}$.

2. $\mathcal{S}$ contiene todas las instancias de sustitución de la fórmula $\mathbf{K} : \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$.

3. $\mathcal{S}$ está clausurada por las siguientes reglas de derivación

   MP. Modus ponens: Si φ y $\varphi \to \psi$ están en $\mathcal{S}$, entonces ψ está en $\mathcal{S}$.

   N. Necesitación: Si φ está en $\mathcal{S}$ entonces $\Box\varphi$ está en $\mathcal{S}$.

Es habitual definir sistemas normales especificando efectivamente un conjunto de fórmulas (usualmente finito) que se denominan axiomas esquemas y utilizar el nombre de dichos esquemas o una referencia a cierta característica destacada para nombrar a la lógica. Por ejemplo, la lógica normal mínima que dimos recién se llama lógica K. Los axiomas esquemas se utilizan como plantillas, de forma tal que cualquier instancia de sustitución de una de estas fórmulas es considerada como perteneciente al sistema, por lo tanto dar un axioma esquema es equivalente a dar el conjunto de fórmulas que se obtienen por sustitución a partir de él. A continuación mencionamos algunos de las fórmulas modales que son usadas con mayor frecuencia para definir axiomáticamente lógicas normales:

D:	$\Box\varphi \to \Diamond\varphi$	**T:**	$\Box\varphi \to \varphi$
B:	$\varphi \to \Box\Diamond\varphi$	**4:**	$\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$
5:	$\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$	**G:**	$\Diamond\Box\varphi \to \Box\Diamond\varphi$
H:	$\Box(\Box\varphi \leftrightarrow \varphi) \to \Box\varphi$	**GL**	$\Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi$
V:	$\Box\varphi$	**M:**	$\Box\Diamond\varphi \to \Diamond\Box\varphi$

Un sistema lógico será entonces, el conjunto de fórmulas que se obtienen de los axiomas esquemas por sustitución y clausura por **MP** y **N**, además de las instancias de sustitución de CP-tautologías. Cuando se presenta un sistema en esta forma, se dice que se ha dado una base axiomática para el sistema, o que el sistema ha sido axiomatizado. Si el conjunto de axiomas esquema que utilizamos para especificar el sistema es finito, entonces tenemos una base axiomática finita. Por otra parte, si el conjunto de axiomas es recursivo entonces decimos que el sistema es recursivamente axiomatizable.

Una demostración de una fórmula φ en un sistema axiomático $\mathcal{S}$, es una secuencia finita de fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ tal que $\varphi_n = \varphi$ y donde cada φ_i es o bien una instancia de un axioma esquema de $\mathcal{S}$, o bien el resultado de la aplicación de una instancia de una regla de $\mathcal{S}$ con premisas en $\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}$. A continuación presentaremos algunos de los sistemas normales más conocidos. Para ello seguiremos la convención notacional de Lemmon y Scott [LS77] denotando cada uno de ellos por la letra **K** seguida por las letras o signos que representan a los axiomas que la definen. Indicaremos a la derecha el nombre con las que se lo conoce en la literatura.

KD: deóntico T	**KT:** autoreferente	**KTB:** Brouwer
KD4: deóntico S4	**KT4:** S4	**KT4M:** S4.1
KD4E: deóntico S5	**KT4B:** S5	**KT4G:** S4.2
K4GL: de la demostrabilidad	**KT4BM:** Trivial	**KV:** Verum

Un modelo modal o modelo de Kripke (por Samuel A. Kripke quien en 1963 introdujo esta noción para dar semántica a lógicas modales [Kripke, 1963a; Kripke, 1963b]) es una estructura matemática que permite interpretar las fórmulas de CM de la misma forma que las valuaciones permiten interpretar las fórmulas de CP. Un modelo de Kripke se define como una tupla $M = \langle W, R, \models_M \rangle$, donde:

W es un conjunto no vacío, los elementos de W se llamarán mundos, o mundos posibles;

R es una relación diádica sobre W (i.e. $R \subseteq W \times W$), usualmente denominada relación de accesibilidad. Si $R(\omega, \omega')$ decimos que ω' es accesible desde ω o que ω puede ver a ω';

$\models_M$ es una función total del conjunto de pares de símbolos de proposición y mundos en los valores de verdad '0' y '1' (i.e. $\models_M$: $Prop \times W \mapsto 0, 1$). Esta función es una valuación modal que indica si una variable proposicional es verdadera o no en un determinado mundo.

Decimos que un modelo M es un modelo finito, si su conjunto de mundos tiene sólo un número finito de elementos (notar que entonces la relación de accesibilidad también es finita); de otra forma el modelo es infinito.

Escribiremos $(M,\omega) \models \varphi$ para decir que la fórmula φ es válida en un mundo posible ω en el modelo M. Dado un modelo $M = \langle W, R, \models_M \rangle$ la noción de verdad en los mundos posibles se define recursivamente como:

1. $(M,\omega) \models \top$.
2. $(M,\omega) \models p_i$ si y sólo si $\models_M (p_i, \omega) = 1$, con p_i un símbolo proposicional.
3. $(M,\omega) \models \neg\varphi$ si y sólo si no es el caso que $(M,\omega) \models \varphi$.
4. $(M,\omega) \models (\varphi \vee \psi)$ si y sólo si $(M,\omega) \models \varphi$ o $(M,\omega) \models \psi$.
5. $(M,\omega) \models \Box\varphi$ si y sólo si para todo mundo $\omega' \in W$, $R(\omega, \omega')$ implica $(M,\omega') \models \varphi$.

Con esta definición podemos ahora comentar por qué $\Box$ no es un operador veritativo funcional. Supongamos que estamos evaluando el valor de $\Box p$ en un mundo ω_1, ahora bien, el valor de $\Box p$ estará determinado por el valor de p en los mundos accesibles desde ω_1 que pueden dar a p un valor verdadero o falso independientemente del valor que ω_1 le asigne a esa variable proposicional o sea que, si el mismo ω_1 no es accesible desde sí mismo, el valor de p en ω_1 podría ser modificado sin alterar el valor de $\Box p$.

A partir de la relación de validez para mundos pueden derivarse las siguientes nociones: decimos que una fórmula φ es válida en un modelo $M = \langle W, R, \models_M \rangle$ (Not.: $M \models \varphi$) si y sólo si para todo mundo $\omega \in W$, $(M,\omega) \models \varphi$. Decimos que una fórmula φ es válida en una clase de modelos C (Not.: $\models_C \varphi$) si y sólo si para todo modelo $M \in C$, $M \models \varphi$.

Las definiciones mencionadas hasta ahora, dejan claro que las lógicas modales son extensiones de la lógica proposicional. Sin embargo, también pueden ser vistas como fragmentos de la lógica de primer orden monádica con un único predicado binario. Para ello sólo es necesario notar que todo modelo de Kripke $M = \langle W, R, \models_M \rangle$ puede ser visto como un modelos de primer orden tomando como el dominio a W, considerando que $\models_M$ dá la interpretación de los predicados unarios y notando que las condiciones de verdad son expresables en un lenguaje de primer orden. Podemos ver eso con mayor precisión si establecemos primero la traducción estándar entre el lenguaje modal y el de primer orden a través de la función $*$ definida recurrentemente como sigue:

1. p_i^* es $P_i(x)$.
2. $(\varphi \vee \psi)^*$ es $(\varphi^* \vee \psi^*)$.
3. $(\neg\varphi)^*$ es $\neg(\varphi)^*$.

4. $(\Box\varphi)^*$ es $\forall y(\varphi^*[x/y])$ donde la variable y no ocurre en $\varphi^*(x)$.

dónde x es una variable fijada de antemano y $[x/y]$ representa el reemplazo simultáneo de toda aparición de la variable x por la variable y. Entonces, si denotamos con M^* al modelo de primer orden asociado al modelo modal M entonces puede demostrarse que para todo mundo $\omega \in W$ y toda fórmula modal φ resulta:

$$(M,\omega) \models \varphi \qquad \text{si y sólo si} \qquad M^* \models \varphi^*[x/\omega]$$

Como corolario de este resultado, encontramos que toda fórmula modal es equivalente a una de primer orden. Cabe la pregunta de si la conversa es cierta o en su defecto cuál es el fragmento de primer orden que corresponde a cada lógica modal. La búsqueda de esta respuesta se vuelve muy importante debido a las interesantes propiedades que tendrían dichos fragmentos tales como decibilidad, definidad de Beth, efectivos modelos de razonamiento, etc. Aquí no ahondaremos en mas detalles porque escapan al interés de nuestro trabajo.

En las párrafos anteriores definimos los conceptos de teorema de un sistema axiomático ($\vdash_{\mathcal{S}}$) y de fórmula válida en una clase de modelos ($\models_C$). Estas nociones no son independientes. Dado un sistema axiomático $\mathcal{S}$ y una clase de modelos C, decimos que: $\mathcal{S}$ es un sistema correcto para C si y sólo si para toda fórmula φ, $\vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ implica $\models_C \varphi$, es decir todo lo demostrable en el sistema es válido en la clase. $\mathcal{S}$ es un sistema completo para C si y sólo si para toda fórmula φ, $\models_C \varphi$ implica $\vdash_{\mathcal{S}} \varphi$, es decir todo lo válido en la clase es demostrable en el sistema. (Existen en la literatura otras definiciones de correctitud y completitud, pero las dadas más arriba son las más habituales. En algunos casos es particularmente importante dejar en claro que definición de completitud se está manejando).

Cuando puede demostrarse para una cierta clase de modelos C que un sistema axiomático $\mathcal{S}$ es tanto correcto como completo, se está mostrando que existe una perfecta concordancia entre sintaxis y semántica. Una lógica que es a la vez completa y correcta se denomina adecuada. Las demostraciones de correctitud son habitualmente simples. Cuando el sistema $\mathcal{S}$ viene presentado como un conjunto de esquemas axiomas y de reglas de inferencia, basta mostrar que toda instancia de axioma es correcta (mostrando que cualquier mundo en cualquier modelo la valida) y que las reglas de inferencias preservan correctitud (llevándonos de premisas válidas a conclusiones válidas). Las demostraciones de completitud en cambio, son en general mucho más difíciles, pues no tenemos a priori una especificación efectiva del conjunto de las fórmulas válidas en todos los modelos de la clase. Sin embargo, el método del modelo canónico puede usualmente ser utilizado para obtener resultados de completitud. (Este método deriva del trabajo de [LS77]).

Supongamos que $\mathcal{S}$ es un sistema modal normal, y que tenemos una clase de modelos C respecto de la cual queremos demostrar completitud. Llamaremos a los modelos en C, C-modelos y a una fórmula C-válida si es válida en todos los mundos de todos los modelos de C. Entonces, decir que $\mathcal{S}$ es completo respecto de C es decir que toda fórmula C-válida es un teorema de $\mathcal{S}$, o equivalentemente, que si una fórmula no es un teorema de $\mathcal{S}$ entonces no es C-válida (por contrarrecíproco), o más formalmente si y sólo si: para toda fórmula φ, si $\not\vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ entonces existe un C-modelo $M = \langle W, R, \models_M \rangle$ y un mundo ω en W tal que $(M,\omega) \not\models \varphi$. Por otro lado, digamos que una fórmula φ es $\mathcal{S}$-inconsistente si su negación es un teorema ($\vdash_{\mathcal{S}} \neg\varphi$), y $\mathcal{S}$-consistente en otro caso ($\not\vdash_{\mathcal{S}} \neg\varphi$). Usando estas nuevas nociones y la definición de validez dada anteriormente es fácil demostrar que la afirmación anterior es equivalente a: para toda fórmula φ, si φ es $\mathcal{S}$-consistente entonces existe un C-modelo $M = \langle W, R, \models_M \rangle$ y un mundo ω en W tal que $(M,\omega) \models \varphi$. El método del modelo canónico implica la construcción de un modelo M que valida en algún mundo toda fórmula $\mathcal{S}$-consistente, y la demostración de que M pertenece a la clase C de modelos, probando de esta manera que $\mathcal{S}$ es completo para C.

Nos queda por analizar otro tema en relación a la lógica modal clásica, quizás el de mayor interés desde un punto de vista computacional. En el área de Computabilidad es conocido el resultado que establece que algunos conjuntos no son decidibles o lo que es lo mismo, que existen

conjuntos cuya función característica no es recursiva. Estos conjuntos poseen la propiedad que, a pesar de estar bien definidos, la cuestión de si un elemento φ pertenece o no al conjunto no puede decidirse efectivamente. Como ya dijimos anteriormente que una lógica no es más que un conjunto de fórmulas, podría ser que fuera justamente un conjunto no decidible y que, por lo tanto, la cuestión de decidir si $\varphi \in \mathcal{S}$ ($\vdash_{\mathcal{S}} \varphi$) fuera no computable. Puesto que trabajaremos con lógicas que son presentadas como sistemas axiomáticos, la "mitad" del problema está solucionada. Existe un método para determinar que una fórmula φ sí pertenece al sistema $\mathcal{S}$: basta comenzar a generar sistemáticamente todas las posibles demostraciones realizables en $\mathcal{S}$. Es cierto que el número de demostraciones posibles es infinito, pero si φ es un teorema de la lógica en algún momento aparecerá al final de alguna de las demostraciones y el proceso podrá acabar. El problema es que si está abierta la pregunta de si φ es o no un teorema, mientras φ no aparezca al final de una demostración, no sabremos si φ todavía no apareció a pesar de ser teorema, o si nunca aparecerá puesto que no es teorema. Lo que necesitamos es un método efectivo para determinar que una fórmula no es teorema. Una forma de proveer este método es demostrar que una lógica modal posee la propiedad de modelo finito, que se demuestra utilizando la técnica de filtración. Informalmente, un modelo $M*$ es el producto de una Γ-filtración de otro modelo M, si en algún sentido, las fórmulas en Γ son "preservadas" en $M*$, o en otras palabras, $M*$ es una simplificación de M que sin embargo respeta el valor de verdad de las fórmulas en Γ. La filtración se utilizará para hallar un modelo finito equivalente a M respecto de Γ. Dado un sistema axiomático $\mathcal{S}$ y una clase de modelos C, decimos que $\mathcal{S}$ tiene la propiedad de modelo finito para una clase C si y sólo si toda fórmula $\mathcal{S}$-consistente es válida en un mundo en un modelo M de C, y M es finito. La demostración de la propiedad anterior no es otra cosa que la demostración de que $\mathcal{S}$ es completa respecto de la subclase de los modelos finitos de C. Ahora bien, si tenemos una fórmula φ que no pertenece a un sistema $\mathcal{S}$ correcto y completo para una clase C, es porque existe un modelo $M = \langle W, R, \models_M \rangle$ en C que es contraejemplo para φ, es decir que existe $\omega \in W$ tal que $(M,\omega) \not\models \varphi$ si y sólo si por definición de valuación $(M,\omega) \models \neg\varphi$. Es decir que para testear que $\nvdash_{\mathcal{S}} \varphi$ hay que mostrar un modelo contraejemplo, pero si φ no está en $\mathcal{S}$, $\neg\varphi$ es $\mathcal{S}$-consistente y si $\mathcal{S}$ tiene la propiedad del modelo finito el modelo buscado es finito y todos los modelos finitos (de cualquier tamaño) pueden ser sistemáticamente explorados. Otra vez, si no sabemos si φ está o no en $\mathcal{S}$, este proceso puede no detenerse nunca, pues no sabremos si todavía no encontramos el modelo contraejemplo buscado o si nunca lo encontraremos. Pero ahora, teniendo procesos de decisión tanto para pertenencia al sistema como para la no pertenencia, podemos armar el proceso de decisión para $\mathcal{S}$, basta "correr ambos métodos en paralelo" hasta que alguno de ellos responda con éxito.

Un último aspecto de las lógicas modales que es importante mencionar en relación a nuestro trabajo, es el relacionado con la llamada teoría de la correspondencia. Una forma particular de caracterizar una clase de modelos de Kripke es fijando el conjunto W y la relación R, y permitiendo variar las funciones de evaluación $\models$. Al par $\langle W, R \rangle$ se lo denomina *marco*. En forma mas general podemos caracterizar una clase de modelos por sólo fijar propiedades sobre la relación de accesibilidad R, surge así la idea de *clase de marcos*. Ocurre que para algunas lógicas modales la clase de sus *marcos* es una clase definible por un conjunto de sentencias de primer orden cuyo lenguaje tiene un único predicado que es operador binario. Por ejemplo para **KT**, **S4** y **S5**. Pero para otras lógicas esto no es así. Una de las preguntas fundamentales de la teoría de la correspondencia es acerca de las condiciones necesarias y suficientes para que una clase de *marcos* de una lógica sea definible en primer orden. Por otra parte, dada un clase de *marcos* definible en primer orden se busca saber si es o no la clase de *marcos* de alguna lógica modal.

Bibliografía

[ACC89] L. Arlo-Costa and R. Carnota. Non-monotonic logics: Consequence relations and conditional operators. In *6th Simposion Brasileiro em Inteligencia Artificial*, pages 328–343, 1989.

[ACS92] L. Arlo-Costa and Scott J. Shapiro. Maps between nonmonotonic and conditional logic. In *KR '92*, pages 553–564. AAAI Press, 1992.

[Ada75] E. Adams. *The Logic of Conditionals*. D. Reidel, 1975.

[AGM85] C. Alchourrón, P. Gärdenfors, and D. Makinson. On the logic of theory change: partial meet contraction and revision function. *Journal Symbolic Logic*, 50:510–530, 1985.

[Alc94] C. Alchourrón. Defeasible logic. demarcation and affinities. In G. Crosso, L. Fari na Del Cerro, and A. Herzig, editors, *Conditional and Artificial Intelligence*. Oxford University Press, 1994.

[Alc96] C. Alchourrón. Detachment and defeasibility in deontic logic. *Studia Logica*, (51):5–18, 1996.

[Åqv73] L. Åqvist. Modal logic with subjunctive conditionals and disposicional predicates. *Journal of Philosophical Logic*, (2):1–76, 1973.

[BDG+99] Bernadette Bouchon-Meunier, Didier Dubois, Lluis Godo, Henri Prade, and Jim Bezdek. Fuzzy sets and possibility theory in approximate and plausible reasoning. In J. Bezdek, D. Dubois, and H. Prade, editors, *Fuzzy Sets in Approximate Reasoning and Information Systems*, The handbooks of Fuzzy Sets Series, chapter 1, pages 15–190. Kluwer Academic Publishers, 1999.

[BDP97] S. Benferhat, D. Dubois, and H. Prade. Nonmonotonic reasoning, conditional objects and possibility theory. *Artificial Intelligence*, 92:259–276, 1997.

[Bec99] V. Becher. *Binary Functions for Theory Change*. PhD thesis, Department of Computer Science of Buenos Aires University, Buenos Aires, 1999.

[Běl99] R. Bělohlávek. Fuzzy closure operators. Research Report 24, University of Ostrava Institute for Research and Applications of Fuzzy Modeling, Czech Republic, 1999.

[BFR+99] V. Becher, E. Ferme, R. Rodriguez, S. Lazzer, C. Oller, and G. Palau. *Norms, Logics and Information Systems*, volume 49 of *Frontiers in Artificial Intelligence and Applications*, chapter Some Observactions on Carlos Alchourrón's Theory of Defeasible Conditionals, pages 219–230. IOS Press, p.mc. namara and h. prakken edition, 1999.

[BG92] L. Biacino and G. Gerla. Generated necessities and possibilities. *Int. J. of Intell. Systems*, 7:445–454, 1992.

[BG98] Loredana Biacino and Giangiacomo Gerla. Logics with approximate premises. *International Journal of Intelligent Systems*, 13:1–10, 1998.

[BG99] Loredana Biacino and Giangiacomo Gerla. Closure operators in fuzzy set theory. In J. Bezdek, D. Dubois, and H. Prade, editors, *Fuzzy Sets in Approximate Reasoning and Information Systems*, The handbooks of Fuzzy Sets Series, chapter 3, pages 243–278. Kluwer Academic Publishers, 1999.

[BGY00] L. Biaino, G. Gerla, and M. Ying. Approximate reasoning based on similarity. *Mathematical Logic Quarterly*, 46(1):77–86, 2000.

[BJ96] Dionis Boixader and Joan Jacas. Cri as approximate reasoning tool: an analysis via t- indistinguishability operators. In *FUZZ-IEEE'96*, pages 2094–2097, New Orleans, USA, 1996. IEEE Press.

[BJ98] D. Boixader and J. Jacas. Extensionality based approximate reasoning. *International Journal of Approximate Reasoning*, 19:221–230, 1998.

[Bou92] C. Boutelier. *Conditional Logics for Default Reasoning and Belief Revision.* PhD thesis, Department of Computer Science of British Columbia University, 1992.

[BRY94] P. Blackburn, M. de Rijke, and Y.Venema. The algebra of modal logic. Technical Report CS-R9463, Dept. of Mathematics and Computer Science, Free University, CWI, Amsterdam, 1994. http://www.coli.uni-sb.de/claus/claus47.html.

[BS85] G. Bossu and P. Siegel. Saturation, nonmonotonic reasoning and the closed world assumption. *Artificial Intelligence*, (25), 1985.

[BS95] L. Boldrin and A. Saffiotti. A modal logic for merging parcial belief of multiple reasoners. IRIDIA publ. series TR/IRIDIA/95-19, Université Libre de Bruxelles, Bruxelles, Belgium, 1995.

[BS97] L. Boldrin and C. Sossai. Local possibilistic logic. *Jornal of Applied Non-Classical Logics*, 7(3):309–333, 1997.

[Car37] R. Carnap. Treatability and meaning. *Philosophy of Science*, (3 – 4), 1937.

[Car50] R. Carnap. *The Logical Foundations of Probability.* University Chicago Press, Chicago, 1950.

[Cas94] J.L. Castro. Fuzzy logics as families of bivaluated logics. *Fuzzy Sets and Systems*, 64:321–332, 1994.

[CF92] Philippe Chatalic and Christina Froidevaux. Lattice-based graded logic: A multimodal approach. In *Proceedings 8th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, pages 33–40, Stanford, CA, 1992.

[Cha88] M.K. Chakraborty. Use of fuzzy set theory in introducing graded consequence in multiple valued logic. In M.M. Gupta and T. Yamakawa, editors, *Fuzzy Logic in Knowledge Systems, Decision and Control*, pages 247–257. North Holland, Amsterdam, 1988.

[Che80] Brian Chellas. *Modal Logic: An Introduction.* Cambridge University Press, Cambridge, USA, 4rt. edition, 1980.

[CT99] J.L. Castro and E. Trillas. Tarki's fuzzy consequence. *International Journal of Approximate Reasoning*, page to appear, 1999.

[CTC94] J.L. Castro, E. Trillas, and S. Cubillo. On consequence in approximate reasoning. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 4(1):91–103, 1994.

[DEG+95] Didier Dubois, Francesc Esteva, Pere Garcia, Lluis Godo, and Henri Prade. Similarity-based consequente relations. In Christine Froidevaux and Jürg Kohlas, editors, *Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning and Uncertainty*, volume 946 of *Lecture Note in Artificial Intelligence*, pages 168–174, Fribourg, Switzerland, July 1995. Springer.

[DEG+97] Didier Dubois, Francesc Esteva, Pere Garcia, Lluis Godo, and Henri Prade. A logical approach to interpolation based on similarity relations. *International Journal of Approximate Reasoning*, 17:1–36, 1997.

[DEG+98] Didier Dubois, Francesc Esteva, Pere Garcia, Lluis Godo, Ramon Lopez de Mantaras, and Henri Prade. Fuzzy set modelling in case-based reasoning. *International Journal of Inteligence Systems*, 1998.

[DEG+99] Didier Dubois, Francesc Esteva, Pere Garcia, Lluis Godo, Ramon Lopez de Mantaras, and Henri Prade. Case-based reasoning: A fuzzy approach. In A.L. Ralescu and J.G. Shanahan, editors, *Fuzzy Logic in Artificial Intelligence*, volume 1566 of *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, pages 79–90. Springer Verlag, Berlin, 1999.

[Del87] J.P. Delgrande. A first-order logic for prototipical properties. *Artificial Intelligence*, (36):63–90, 1987.

[DLP94] Didier Dubois, Jerome Lang, and Henri Prade. Possibilistic logic. In D.M. Gabbay, C.J. Hogger, and J.A. Robinson, editors, *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming. Volume 3: Nonmonotonic Reasoning and Uncertain Reasoning*, pages 439–513. Oxford University Press, 1994.

[DP88] Didier Dubois and Henri Prade. An introduction to possibilistic and fuzzy logics. In P. Smets, A. Mamdani, D. Dubois, and H. Prade, editors, *Non-Standard Logics for Automatic Reasoning*. Academic Press, 1988.

[DP90] Didier Dubois and Henri Prade. Rough sets and fuzzy rough sets. *International Journal of General Systems*, 17:191–209, 1990.

[DP91a] Didier Dubois and Henri Prade. Fuzzy sets in approximate reasoning, part 1: Inference with possibility distributions. *Fuzzy Sets ans Systems*, 40:143–202, 1991.

[DP91b] Didier Dubois and Henri Prade. Fuzzy sets in approximate reasoning, part 2: Logical approaches. *Fuzzy Sets and Systems*, 40:203–244, 1991.

[DP92a] Didier Dubois and Henri Prade. Belief change and possibility theory. In Peter Gärdenfors, editor, *Belief Revision*, volume 29 of *Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science*, pages 142–182. Cambridge University Press, 1992.

[DP92b] Didier Dubois and Henri Prade. Putting rough set and fuzzy rough set together. In R. Slowinski, editor, *Intelligent Decision Support- Handbook of Applications and Advances of Rough Sets Theory*, pages 203–232. Kluwer Acad. Publ., 1992.

[DP93] D. Dubois and H. Prade. Fuzzy sets and probability: Misunderstandings, bridges and gaps. In *Second IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, volume II, pages 501–506, San Francisco, California, April 1993.

[DP94a] Didier Dubois and Henri Prade. Similarity-based approximate reasoning. In J.M. Zurada, R.J. MarksII, and C.J. Robinson, editors, *Computacional Intelligence Imitating Life*, pages 69–80. IEEE Press, New York, 1994.

[DP94b] Didier Dubois and Henri Prade. A survey of belief revision and updating rules in various uncertainty models. *Internacional Journal of Intelligent Systems*, 9:61–100, 1994.

[DP95] Didier Dubois and Henri Prade. Comparison of two fuzzy set-based logics: similarity logic and posibilistic logic. In *FUZZ-IEEE'95*, pages 1319–1326, Yokohama, Japan, July 1995. IEEE Press.

[DPB99] Didier Dubois, Henri Prade, and Jim Bezdek. Introduction: Fuzzy sets in approximate reasoning and intelligent information systems technology. In J. Bezdek, D. Dubois, and H. Prade, editors, *Fuzzy Sets in Approximate Reasoning and Information Systems*, The handbooks of Fuzzy Sets Series, pages 1–13. Kluwer Academic Publishers, 1999.

[DPT88] D. Dubois, H. Prade, and C. Testemale. In search of a modal system for possibility theory. In *8th. European Conference on Artificial Intelligence*, pages 501–506, 1988.

[Dub86] Didier Dubois. Belief structures, possibility theory and decomposable confidence measures. *Computers and Artificial Intelligence*, 5:403–416, 1986.

[EB99] J. Elorza and P. Burillo. On the relation between fuzzy preorders and fuzzy consequence operators. *Int. Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledg-based Systems(IJUFKBS)*, 7(3):219–234, 1999.

[EG98] F. Esteva and Ll. Godo. Putting lukasiewicz and product logic together. In *ESTYLF'98*, pages 339–346, Pamplona, Spain, 1998.

[EGG94a] Francesc Esteva, Pere Garcia, and Lluis Godo. On conditional in similarity logic. In *IPMU International Conference*, volume 2, pages 999–1005, Paris FRANCIA, 1994. FUZZ-IIIE'94, IPMU'94.

[EGG94b] Francesc Esteva, Pere Garcia, and Lluis Godo. Relating and extending semantical approaches to possibilistic reasoning. *International Journal of Approximate Reasoning*, 10:313–344, 1994.

[EGG95] Francesc Esteva, Pere Garcia, and Lluis Godo. On similarity and graded entailment. In European Laboratory for Intelligent Techniques Enginnering, editor, *EUFIT'95*, pages 39–44, August 1995.

[EGGR97] F. Esteba, P. Garcia, Ll. Godo, and R. Rodriguez. A modal account of similarity-based reasoning. *International Journal Of Approximate Reasoning*, 16(3-4):235–261, 1997.

[EGHN98] F. Esteva, Ll. Godo, P. Hájek, and M. Navarra. Resuated fuzzy logics with an involutive negation. *To appear in Archive for Mathematical Logic*, 1998.

[FD85] M. Fattorosi-Barnaba and F. De Caro. Graded modalities. i *. *Studia Logica*, 2:197–221, 1985.

[Fer99] Eduardo Fermé. *Revising the AGM postulates*. PhD thesis, University of Buenos Aires, April 1999.

[FH91] L. Fariñas del Cerro and A. Herzing. A modal analisis of possibility theory. In R. Kruse and P. Siegel, editors, *Symbolic and Qualitative Approaches to Uncertainty*, volume 548 of *Lecture Notes in Computer Sciences*, pages 58–62. Springer Verlag, Berlin, 1991.

[FH99] Nir Friedman and J. Halpern. First-order conditional logic. 1999. note.

[FHL94] L. Fariñas del Cerro, A. Herzig, and J. Lang. From ordering-based nonmonotonic reasoning to conditional logics. *Artificial Intelligence*, 66:375–394, 1994.

[Fin72] Kit Fine. In so many possible worlds. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 13(4):516–520, october 1972.

[Fit91] Melvin Fitting. Many-valued modal logics. *Fundamenta Informaticae*, 15:235–254, 1991.

[Fit92] Melvin Fitting. Many-valued modal logics, ii. *Fundamenta Informaticae*, 17:55–73, 1992.

[Fit95] Melvin Fitting. Tableaus for many-valued modal logic. *Studia Logica*, 55(1):63–87, 1995.

[Gab85] D.M. Gabay. Theoretical foundations for nonmontonic reasoning in expert systems. In K. Apt, editor, *Logics and Models of Concurrent Systems*. Springer Verlag, Berlin, 1985.

[Gab96] D.M. Gabay. How to make your logic fuzzy (fibred semantic and weaving of logics, part 3. In D. Dubois, E.P. Klement, and H. Prade, editors, *Fuzzy Set, Logics, and Artificial Intelligence*, pages 69–89, Linz, Austria, February 1996. Fuzzy Logic Laboratorium Linz-Hagenberg. Austria.

[Gab97] D.M. Gabay. Fibring and labelling: Two methods for making modal logic fuzzy. In M. Mares, R. Mesiar, V. Novak, J. Ramík, and A. Stupnanová, editors, *IFSA'97. Seventh International Fuzzy Systems Association World Congress*, volume 1, Prague. Czech Republic., June 1997. University of Economics., Academia, Prague.

[Gär88] P. Gärdenfors. *Knowledge in Flux: Modeling the Dynamics of Epistemic States*. The MIT Press, Cambridge, 1988.

[Ger94] G. Gerla. An extension principle for fuzzy set. *Mathemaical Logig Quarterly*, 40:357–380, 1994.

[Ger96] G. Gerla. Graded consequence relations and fuzzy closure operators. *Journal of Applied Non-Clasical Logics*, 6(4):369–379, 1996.

[Gin86] M.L. Ginsberg. Counterfactuals. *Artificial Intelligence*, 30(1):3–28, 1986.

[Glo70] F.L. Globe. Grades of modality. *Logique et Analyse*, 51:323–334, 1970.

[GM88] P. Gärdenfors and D. Makinson. *Revision of Knowledge Systems using Epistemical Entrenchment*, pages 83–95. Los Altos, m. vardi edition, 1988.

[GM91] P. Gärdenfors and D. Makinson. Relations between the logic of theory change and nonmonotonic logic. In A.Furman and M.Morreau, editors, *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, volume 465, pages 185–205. Springer Verlag, 1991.

[GM94] P. Gärdenfors and D. Makinson. Nonmonotonic inference based on expections. *Artificial Intelligence*, 65:197–245, 1994.

[Göd32] K. Gödel. Zum intuitionistischen aussgenkalkül. *Klasse*, 69:65–66, 1932.

[Gog93] J. A. Goguen. The logic of inexact concepts. In D. Dubois, H. Prade, and R. R. Yager, editors, *Readings in Fuzzy Sets for Intelligent Systems*, pages 417–441. Kaufmann, San Mateo, CA, 1993.

[Gol79] R. Golblatt. *Topoi. The Categorial Analysis of Logic*. North Holland, Amsterdam, 1979.

[GR99] Ll. Godo and R.O. Rodriguez. A fuzzy modal logic for similarity reasoning. In G. Chen, M. Ying, and K. Cai, editors, *Fuzzy Logic and Soft Computing*, pages 33–48. Kluwer Academic, 1999.

[GR00] Ll. Godo and R. Rodriguez. A short note on nonmonotonic inferences induced by graded similarity. In AAAI, editor, *Workshop of Non Monotonic Reasoning and Uncertainty*, pages –, April 2000.

[Gra91] G. Grahne. Update and counterfactuals. In *KR'91*, pages 269–276, 1991.

[Gro88] A. Grove. Two modellings for theory change. *Journal Of Philosophical Logic*, 17:157–170, 1988.

[Háj95] Petr Hájek. Fuzzy logic and arithmetical hierarchy. *Fuzzy Sets and Systems*, (73):359–363, 1995. note.

[Háj98] Petr Hájek. *Metamathematics of Fuzzy Logic.*, volume 4 of *Trends in logic-Studia Logica Library.* Kluwer Academic Publishers, Netherland, 1998.

[Háj00] Petr Hájek. On very true. In *Proccedings of FSTA'2000*, Liptovski Mikulas, Slovakia, 2000.

[Han86] B. Hansson. An analysis of some deontic logics. In Risto Hilpinen, editor, *Deontic Logic: Introductory and Systematic Readings*, pages 121–147. D. Reidel, 1986.

[HC84] G.E. Hughesy and M.J. Cresswell. *A Companion of Modal Logic.* Methuen, Londres, 1984.

[HG97] P. Hájek and Ll. Godo. Deductive systems of fuzzy logic. *Tatra Mountains Math. Publ.*, 13:35–66, 1997.

[HGE95] Petr Hájek, Lluis Godo, and Francesc Esteva. Fuzzy logic and probability. In *Proccedings of the 11th. Conference of Uncertainty in Artificial Intelligence*, pages 237–244. Morgan Kaufmann, 1995.

[HGE96] P. Hájek, Ll. Godo, and F. Esteva. A complete many-valued fuzzy logic with product conjuntion. *Archive for Mathematical Logic*, (35):1–19, 1996. note.

[HGE00] Petr Hájek, Lluis Godo, and Francesc Esteva. A fuzzy logic for reasoning about probability. In *Proccedings of Workshop on Probabilistic Reasoning in Artificial Intelligence (IBERAMIA-SBIA'2000)*, pages 48–55, Atibaia, SP, Brazil, 19-22 November 2000. Morgan Kaufmann.

[HH96] Petr Hájek and Dagmar Harmancová. A many-valued modal logic. In *IPMU'96*, pages 1021–1024, 1996.

[HHE+94] Petr Hájek, Dagmar Harmancová, Francesc Esteva, Pere Garcia, and Lluis Godo. On modal logics for qualitative possibility in a fuzzy setting. In R. Lopez de Mantaras and D. Poole, editors, *Proccedings of the Tenth Conference of Uncertainty in Artificial Intelligence.* Morgan Kaufmann, 1994.

[Hil76] R. Hilpinen. Approximate truth and truthlikeness. *Przelecki et al.*, pages 19–42, 1976. note.

[HK94] D. Harmanec and G.J. Klir. On the modal logic interpretation of dempster-sshafer theory of evidence. *International Journal Uncertainty Fuzzyness Knowledge Based Systems*, 9:941–951, 1994.

[HM86] S. Hanks and D. McDermott. Default reasoning, nonmonotonic logics and the frame problem. In *Proceedings of Fifth Nat. Conf. of Am. Assoc. for AI*, pages 328–333, Philadelphia, 1986.

[HM92] Wiebe van der Hoek and John Jules Meyer. Modalities and (un-)certainties. *Lectures Notes for School Summer of Linköping'92*, May 1992. note.

[HR91] Wiebe van der Hoek and Marteen de Rijke. Quantifiers and modal logic. ITLI publ. series LP-91-01, University of Amsterdam, Netherlands, 1991.

[Jan90] Ramón Jansana. *Una Introducción a la lógica modal.* Tecnos, Madrid, 1990.

[KC95] F. Klawonn and J.L. Castro. Similarity in fuzzy reasoning. *Mathware & Soft Computing*, (2):197–228, 1995.

[KGK95] F. Klawonn, J. Gebhardt, and R. Kruse. Fuzzy control on the basis of equality relations with an example from idle speed control. *IEEE Transactions on Fuzzy System*, 3(3):336–350, 1995.

[KH94] G.J. Klir and D. Harmanec. On the modal logic interpretation of possibily theory. *International Journal Uncertainty Fuzzyness Knowledge Based Systems*, 2:237–245, 1994.

[KK93] F. Klawonn and R. Kruse. Equality relations as a basis for fuzzy control. *Fuzzy Set and Systems*, 54:147–156, 1993.

[Kla94] F. Klawonn. Fuzzy sets and vaguue environment. *Fuzzy Set and Systems*, 66:207–221, 1994.

[Kla95] Frank Klawonn. Similarity based reasoning. In European Laboratory for Intelligent Techniques Enginnering, editor, *Proceedings EUFIT'95*, pages 34–38, Aachen, Germany, August 28-31 1995.

[KLM90] S. Kraus, D. Lehman, and M. Magidor. Nonmonotonic reasoning, preferential models and cumulative logics. *Artificial Intelligence*, 44:167–207, 1990.

[KM90] H. Katsuno and A. Meldelzon. Propositional knowledge base revision and minimal change. Technical Report 3, Department of Computer Science, University of Toronto, January 1990.

[KM91] H. Katsuno and A. Mendelzon. On the difference between update a knowledge base and revising it. In *KR'91*, pages 387–394, 1991.

[KN96] F. Klawonn and V. Novák. The realtion between inference and iterpolation in the framework of fuzzy systems. *Fuzzy Set and Systems*, 81:331–354, 1996.

[Kon97] B. Konikowska. A logic for reasoning about relative similarity. *Studia Logica*, 58:185–226, 1997.

[Kri59a] Saul Kripke. A completeness theorem in modal logic. *Journal of Symbolic Logic*, 24:1–14, 1959.

[Kri59b] Saul Kripke. Semantical analysis of modal logic. *Journal of Symbolic Logic*, 24:323–324, 1959.

[Lew73] David Lewis. *Contrafactuals.* Oxford Basil Blackwell, London, 1973.

[Lia98] Churn-Jung Liau. Possibilistic residuated implication logics with applications. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems*, 6(4):365–385, 1998.

[Lia01] Churn-Jung Liau. Hibrid logic for possibilistic reasoning. In *Proceedings of IFSA'01*, pages 43–51. John Willey & Sons ltd., 2001.

[LL92] Churn-Jung Liau and B.I-Peng Lin. Qualitative modal logic and possibilistic reasoning. In B.Newmann, editor, *Proceedings of ECAI'92*, pages 43–47. John Willey & Sons ltd., 1992.

[LL95] Churn-Jung Liau and B.I-Peng Lin. A theoretical investigation into possibilistic reasoning. *Fuzzy Sets & Systems*, 75:355–363, 1995.

[LL96] Churn-Jung Liau and Bertrand I-Peng Lin. Possibilistic reasoning-a mini-survey and uniform semantics. *Artificial Intelligence*, 88:163–193, 1996.

[LR91] Sten Lindström and Wlodek Rabinowicz. Epistemic entrenchment with incomparabilities and relational belief revision. In Fuhrmann and Morreau, editors, *The Logic of Theory Change*, pages 93–126, Berlin, 1991. Springer-Verlag.

[LS77] E. Lemmon and D. Scott. *The "Lemmon Notes": An introduction to Modal Logic.* Oxford, Blackwell, 1977.

[Mak89] D. Makinson. General theory of cumulative inferences. In M. Reinfrank, J. de Kleer, M.L. Ginsberg, and E. Sandelwall, editors, *Lecture Notes in Computer Science*, volume 346, pages 1–18. Springer Verlag, 1989.

[Mak93] D. Makinson. Five fices of minimality. *Studia Logica*, 3(52):339–379, 1993.

[Mak94] D. Makinson. General patterns in nonmonotnic reasoning. In D.M. Gabbay, C.J. Hogger, J.A. Robinson, and D. Nute, editors, *Handbook of Logic in Artificial Inteligence and Logic Programming*, volume 4 of *Nonmonotonic Reasoning and Uncertain Reasoning*, pages 35–110. Clarendon Press, Oxford, 1994.

[Man77] E.H. Mandani. Application of fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic systems. *IEEE Transactions Comput.*, 26:1182–1191, 1977.

[McD87] D. McDermott. A critic of pure reason. *Computinal Intelligence*, 3(3):151–160, 1987.

[Min85] Malvin Minsky. A framework for representation knowledge. In R.J. Brachman and H.J. Levesque, editors, *Reading in Knowledge Representation*, pages 246–262. Morgan Kaufman, Los Altos, 1985.

[Mon74] R. Montague. *Formal Philosophy.* Ed. by R.H. Thomason. Yale University Press, New Haven and London, 1974.

[Mor99] Osamu Morikawa. An extende gentzen-type formulation of a many-valued modal propositional logic based on zadeh's similarity relation. *Fuzzy Sets and Systems*, (101):115–123, 1999. note.

[Mur91] V. Murali. Lattice of fuzzy subalgebras and closure sistems in i^x. *Fuzzy Sets and Systems*, (41):101–111, 1991. note.

[NC00] Donal Nute and Charles Cross. Conditional logics. In D. Gabbay and F. Guenthner, editors, *Handbook of Philosophical Logic*, volume reprint to appear. D. Reidel Publishing Company, 2000.

[Nic70] J. Nicod. *Geometry and Induction.* Routledge Press, London, 1970.

[Nii87] Ilkka Niiniluoto. *Truthlikeness*, volume 185 of *Synthese Library.* D. Reidel Publishing Company, 1rt. edition, 1987.

[Nov90] Vilém Novak. On the syntactico-semantical completeness of first-order fuzzy logic i,ii. *Kybernetika*, (26), 1990. note.

[Nut80] Donald Nute. *Topic in Conditional Logic.* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1980.

[Nut84] D. Nute. Non-monotonic reasoning and conditionals. Technical Report 01-0002, Advanced Coputational Methods Center. University of Georgia, Athens, 1984.

[Pal95] Gladys Palau. *Consecuencias Lógicas y Rivalidades de Sistemas Lógicos.* PhD thesis, Facultad de Filosofía y Letras de la Unversidad de Buenos Aires, Argentina, 1995.

[Pan95] G. Panti. Multi-valued logics. Technical report, Department of Mathematics and Informatics, University of Udine, Italy, 1995.

[Pav79] J. Pavelka. On the fuzzy logic i: Many valued rules and inference. *Math. Logik Grundlag. Math.*, (25):45–52, 1979.

[Paw82] Z. Pawlak. Rough sets. *International Journal Computer and Information Science*, 11:341–356, 1982.

[Pol76] J. Pollock. *Subjunctive Reasoning.* Reidel, Dordrecht, 1976.

[Poo88] D. Poole. A logical framework for default reasoning. *Artificial Intelligence*, 36:27–47, 1988.

[Ram31] F.P. Ramsey. *The Foundations of Mathematics.* Routledge & Kegan Paul, London, 1931.

[REGG99] R. Rodriguez, F. Esteva, P. Garcia, and Ll. Godo. On fuzzy closure operators in approximate reasoning. In D. De Baets, J. Fodor, and L.T. Kóczy, editors, *Proceedings of EUROFUSE-SIC '99*, pages 149–154, Budapest, May 1999.

[REGG00] R. Rodriguez, F. Esteva, P. Garcia, and Ll. Godo. On implicative closure operators in approximate reasoning. In *Proceeding of FUZZ IEEE '2000*, volume 1, pages 197–202, Budapest, May 2000.

[Rei87] R. Reiter. *Annual Review of Computer Science*, volume 2, chapter Nonmonotonic Reasoning, pages 147–186. 1987.

[RGG95a] R. Rodriguez, P. Garcia, and Ll. Godo. Relating similarity-based models, counterfactuals and theory change. In European Laboratory for Intelligent Techniques Enginnering, editor, *EUFIT'95*, pages 230–234, August 1995.

[RGG95b] R. Rodriguez, P. Garcia, and Ll. Godo. Similarity-based graded modal logic. In Departamento de Computación de la Universidad del Sur, editor, *ATIA'95*, pages 387–394, Octubre 1995.

[RGG96] R. Rodriguez, P. Garcia, and Ll. Godo. Using fuzzy similarity relations to revise and update a knowledge base. *Mathware*, 3(3):357—370, 1996.

[RGG98] R. Rodriguez, P. Garcia, and Ll. Godo. Fuzzy approximation, modal structures and possibilistic logic. *Mathware*, 5(2-3):151—166, 1998.

[RKC92] G. Resconi, G.J. Klir, and U.St. Clair. Hierarchical uncertainty metatheory based upon modal logic. *International Journal of General Systems*, (21):23–50, 1992.

[RKCH93] G. Resconi, G.J. Klir, U.St. Clair, and D. Harmanec. On the integration of uncertainty theories. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 1(1):1–18, 1993.

[Rot91] Hans Rott. A nonmonotonic conditional logic for belief revision. Part 1: Semantics and logic of simple conditionals. In Fuhrmann A. and M. Morreau, editors, *The Logic of Theory Change, Workshop, Lecture Notes in Artificial Intelligence, Volume 465*, Konstanz, FRG, October 1991. Springer Verlag.

[RS95] M. Ryan and P-Y. Schobbens. Belief revision and verisimilitude. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 36(1):15–29, 1995.

[Rus87] Enrique Ruspini. The logical foundations of evidential reasoning. Technical Report 408, Artificial Inteligence Center, SRI International, Merlo Park, California, 1987.

[Rus91] Enrique Ruspini. On the semantics of fuzzy logic. *International Journal Of Approximate Reasoning*, 5:45–88, 1991.

[San92] D. Sanford. *If P then Q*. Routledge, London, 1992.

[Sch97] Karl Schlechta. Nonmonotonic logics. basic concepts, results, and techniques. In J.G. Carbonell and J. Siekmann, editors, *Lecture Notes in Artifical Intelligence*, volume 1187. Springer, 1997.

[Sho86] Y. Shoham. *Reasoning about change: time and causation from the standpoint of Artificial Intelligence*. PhD thesis, Yale, 1986.

[Sho87] Y. Shoham. A semantical approach to nonmonotonic logic. In M. Ginsberg, editor, *Readings in Nonmonotonic Reasoning*, pages 227–250. Morgan Kaufmann, Los Altos, CA, 1987.

[Sho88] Y. Shoham. *Reasoning about Change*. MIT Press, Cambridge, MA, 1988.

[Sta68] R. Stalnaker. *A Theory of Conditionals*. Studies in Logical Theory. Oxford Press, 1968.

[Suz97] Nobu-Yuki Suzuki. Kripke frame with graded accesibility and fuzzy possible world semantics. *Studia Logica*, 59(2):249–269, 1997.

[Tar56a] A. Tarski. Methodology of deductive sciences. In *Logics, Semantics, Metamathematics*. Oxford University Press, 1956.

[Tar56b] A. Tarski. *Methodology of deductive sciences. Logic, Semantics, Metamathematics*. Oxford Press, 1956.

[Thi93] Helmut Thiele. On the definition of modal operators in fuzzy logic. In IEEE Computer Society Press, editor, *Proceedings of the 23rd IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic*, pages 269–276, Sacramento, California, 1993.

[Tic74] P. Tichy. On popper's definition of verrisimilaritude. *The British Journal for the Philosophy of Science*, 25:155–160, 1974.

[TV84] Enric Trillas and Llorenç Valverde. An inquiry on t-indistinguishability operator. In H. Skala et al, editor, *Aspects of Vagueness*, pages 231–256. Reidel, Dordrecht, 1984.

[Tve77] A. Tversky. Features of similarity. *Psychological Review*, 88:327–352, 1977.

[Val85] Llorenç Valverde. On the structure of f-indistinguishability operators. *Fuzzy Set and Systems*, 17:313–328, 1985.

[Van84] Johan Van Benthem. Correspondence theory. In D. Gabbay and F. Guenthner, editors, *Handbook of Philosophical Logic: Extensions of Classical Logic*, volume 2, pages 167–248. Kluwer Academic Publishers, 1984.

[War42] M. Ward. The closure operators of a lattice. *Annals of Mathematics*, 42:191–196, 1942.

[Wes87] T. Weston. Approximate truth. *Journal Of Philisophical Logic*, 16(4):203–227, 1987.

[Wil88] Timothy Williamson. First order logics for comparative similarity. *Notre Dame Journal Of Formal Logic*, 29(4):457–481, 1988.

[Wri86] G.H. von Wright. Deontic logic and the theory of conditionals. In Risto Hilpinen, editor, *Deontic Logic: Introductory and Systematic Readings*, pages 159–177. D. Reidel, 1986.

[Yin88] Ming-Sheng Ying. On standard models of fuzzy modal logics. *Fuzzy Set and Systems*, 26:357–363, 1988.

[Yin94] Ming-Sheng Ying. A logic for approximate reasoning. *The Jouranl of Simbolic Logic*, 53(3):830–837, 1994.

[Zad65] Lofti Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, (8):338–353, 1965.

[Zad71] Lofti Zadeh. Similarity relations and fuzzy orderings. *Information Science*, 3:177–200, 1971.

[Zad79] Lofti Zadeh. A theory of approximate reasoning. In J. E. Hayes, D. Michie, and L.I. Mikulich, editors, *Machine Intelligence*, volume 9, pages 149–194. Wiley, 1979.

[Zad86] Lofti Zadeh. Is probability theory sufficient for daeling with uncertainty in ia: A negative view. In L.N. Karnal and J.F. Lemmer, editors, *Uncertainty in Artificial Intelligence*, volume 9, pages 103–116. Elsevier Scinece Publishers, 1986.

[Zad94] Lofti Zadeh. Fuzzy logic, neural networks and soft computing. *Comunnications of the ACM*, 37(3):77–84, march 1994.