



Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Computación

Estudio lógico-matemático de una familia de operadores de actualización no-priorizados de bases de conocimiento

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires
en el área de Ciencias de la Computación

Daniel Alejandro Grimaldi

Directora de tesis:	Dra. M. Vanina Martinez
Director Adjunto:	Dr. Ricardo O. Rodriguez
Consejero de estudios:	Dr. Daniel Acevedo
Lugar de trabajo:	Departamento de Computación Facultad de Ciencias Exactas y Naturales Universidad de Buenos Aires

Buenos Aires, 2025

Estudio lógico-matemático de una familia de operadores de actualización no-priorizados de bases de conocimiento

Resumen:

Desde la década de 1980, el modelo AGM de operadores revision y contraction en la teoría del cambio de creencias ha sido adoptado en inteligencia artificial para enfrentar el problema de actualizar bases de conocimiento con información potencialmente inconsistente. Este modelo ofrece tanto un enfoque formal, como también una perspectiva computacional realista y una claridad semántica. Con el tiempo, el modelo AGM se ha generalizado para aplicarse en diversos contextos, desarrollando operadores priorizados para entornos dinámicos, como update y erase; operadores de cambios múltiples priorizados, como package y choice; operadores no priorizados, como credibility-limited revision, shielded contraction o filtered revision; e incluso variantes aplicables a lógicas no clásicas.

En esta tesis, proponemos un enfoque homogéneo para analizar esta diversidad bajo un mismo marco teórico. Presentaremos una semántica basada en mundos posibles, desvinculada de cualquier lógica subyacente, donde las creencias se representan únicamente como un conjunto de mundos, sin depender de una sintaxis específica. A continuación, adaptaremos varios de los modelos conocidos a este marco, y propondremos una familia de operadores no priorizados que engloba las propuestas anteriores. Finalmente, demostraremos que nuestro marco teórico efectivamente homogeneiza y generaliza las propuestas clásicas, finitas y múltiples que se conocen para la lógica proposicional clásica.

Palabras clave: Representación del Conocimiento y el Razonamiento, Teoría de Cambio de Creencias, Operadores No Priorizados, Semántica de Mundos Posibles, Operadores de Cambio Múltiple

A study of a family of non-prioritized belief change operators

Abstract:

Since the 1980s, the AGM model of revision and contraction operators in belief change theory has been adopted in artificial intelligence to address the problem of updating knowledge bases with potentially inconsistent information. This model provides a formal path to manipulate the update in the presence of inconsistencies in a precise and clear semantic way, combined with a realistic perspective from a computational point of view. Over time, the AGM model has been generalized to apply in various contexts, for example, prioritized operators for dynamic environments, such as update and erase; prioritized multiple change operators, such as package and choice; non-prioritized operators, such as credibility-limited revision, shielded contraction, or filtered revision; and operators for non-classical logics.

This thesis proposes a homogeneous approach to analyze this diversity under a unified theoretical framework. We introduce a possible worlds semantic, independent of any underlying logic, where beliefs are represented solely as a set of worlds, without relying on a specific syntax. We then adapt several known models to this framework and propose a family of non-prioritized operators encompassing the previous proposals. Finally, we demonstrate that our theoretical framework effectively homogenizes and generalizes the classical, finite, and multiple proposals known for classical propositional logic.

Keywords: Knowledge Representation and Reasoning, Belief Change Theory, Non-prioritized Operators, Possible World Semantics, Multiple Change Operators

Índice general

1	Introducción	3
1.1	La Teoría de Cambio de Creencias	3
1.2	Esquema de la Tesis	5
2	El modelo AGM y sus variantes	7
2.1	Los Operadores Clásicos de AGM	9
2.2	Construcción vía Remainders	13
2.3	Construcción vía Semántica de Mundos Posibles	15
2.4	El Modelo de Katsuno y Mendelzon: Entornos Fijos vs Cambiantes	18
2.5	Operadores No Priorizados	21
2.6	Operadores de Cambio Múltiple	27
2.7	Resumen del Capítulo 2	32
3	Operadores Clásicos sobre Mundos	33
3.1	Operadores World Contraction y World Revision	34
3.2	Operadores World Update y World Erase	37
3.3	Resumen del Capítulo 3	41
4	Shielded Contraction sobre Mundos	49
4.1	Operadores World Shielded Contraction	49
4.2	Relaciones Credible en Mundos	52
4.3	Propiedades de Relaciones Credible en Funciones World-selection	54
4.4	Operadores World Non-consistent Revision	57
4.5	Resumen del Capítulo 4	59
5	Revisiones No Priorizadas sobre Mundos	65
5.1	Multitud de Identidades de Levi y Harper para Operadores Elementary World	65
5.2	Relaciones Questionable en Mundos	68
5.3	Relaciones Basadas en Operadores World	72
5.4	Relaciones Questionable Basadas en Funciones World-Selection	74
5.5	Resumen del Capítulo 5	77
6	Una Familia de Operadores No Priorizados sobre Mundos	83
6.1	Operadores World Versatile	84
6.2	Postulados Questionable	88
6.3	Postulados Credible y Clásicos	91
6.4	Postulados Suplementarios	94
6.5	Resumen del Capítulo 6	99
7	Operadores Versatile de Cambio Múltiple sobre Teorías	109
7.1	AGM-Compliance y Valuaciones	110
7.2	Desde el Marco de Mundos al de Lógicas	113
7.3	Cambio Múltiple sobre Teorías à la Mundos	116
7.4	Representación de Marcos Conceptuales Clásicos en el Marco de Mundos	121

7.5	Resumen del Capítulo 7	128
8	Conclusiones y Trabajo Futuro	145
8.1	Conclusiones	145
8.2	Trabajo Futuro	146
	Referencias Bibliográficas	149

Agradecimientos

Es difícil creer que después de tanto tiempo soñarlo, finalmente haya escrito la tesis doctoral. Pasaron más años de los que quise, pero eso no significa que sea algo malo. Ese tiempo extra me permitió tomar otra perspectiva de lo que quería hacer, de cuál quería que fuera mi aporte. Cada paso que dí, cada persona con la que me crucé, me aportó algo, generó un cambio en mis creencias y me hizo conocerme a mí mismo. Hoy interpreto este trabajo como una síntesis de todo lo vivido hasta ahora, y está dedicado a todo aquel que me ha brindado una sonrisa, un aliento, una anécdota, una mirada cómplice, un consejo, un reto, un abrazo, un hasta luego o un adiós. Por supuesto, hay menciones especiales.

Agradezco a mis padres, por enseñarme el valor de la curiosidad y la argumentación. Pero también el de la escucha calma y atenta, sobre todo de quien piensa diferente, la capacidad de ponerse en el lugar de la otra persona y la esperanza de que siempre hay una posición superadora.

Agradezco a mi hermana, mi primer conejillo de indias en toda esta historia. Si mis padres me enseñaron a aprender de los demás, ella fue de quien más aprendí, y sigo aprendiendo hasta el día de hoy.

Agradezco a mis sobrina y mi sobrino, mis últimos conejillos de indias. Día a día me muestran que todavía queda mucho por aprender.

Agradezco a mi tíos y tías (biológicos y “de la vida”), mis primos y primas. Han sido un reaseguro constante de que todo saldría bien, aún cuando el mundo dejara de tener sentido.

Agradezco a mis amigos, de la infancia, de la adolescencia, de la juventud y, hay que admitirlo a esta altura, de la adultez. Aunque me resulta más fácil resguardarme en razonamientos lógicos, con objetivos claros y bien definidos, son ellos quienes me han estado enseñando pacientemente lo que hay más allá de toda lógica.

Agradezco a la comunidad de Exactas, que me dio las herramientas y la oportunidad de conocerme, ser quien soy y poder comunicar lo que me apasiona.

Agradezco a la comunidad de Computación y de SADAF, que me dieron un lugar para poder desarrollarme como investigador, pero más aún un lugar al cual pertenecer, necesario sobre todo para quienes venimos de otra formación de base.

Agradezco a mis directores, guías tanto intelectuales como espirituales. Todavía sigo sorprendido de la suerte que tuve de que hayan estado junto a mí en esta etapa, de la conexión que tuvimos desde el inicio, de la calidad y calidez humana que transmiten, y todo esto con pandemia de por medio y parcialmente a distancia.

Agradezco al pueblo argentino, que sigue defendiendo a una universidad gratuita, pública y de calidad como lo es la UBA. El apoyo anónimo y colectivo recibido es una de las deudas más grandes que tenemos quienes logramos llegar a estas instancias. Por eso no creo haber llegado yo solo, llegamos todos.

Capítulo 1

Introducción

La situación se hace mucho más complicada si los mensajes pueden ser inconsistentes. [...] Pese a que no intentaré abrir esa lata de gusanos aquí, estas son cuestiones que deben en algún momento ser consideradas al diseñar una base de conocimientos.

Joseph Y. Halpern (1986).

Hoy más que nunca la Inteligencia Artificial ha cooptado una parte del escenario científico-tecnológico y de la cultura científica en general, debido al gran impacto social que viene generando desde que tal concepto se acuñó. Entre las acciones que entendemos como vinculadas a la inteligencia, se encuentra la adquisición de conocimiento¹. Desde una perspectiva humana, adquirir conocimientos suele estar vinculado a imitar, practicar y comprender el conocimiento.

Una parte importante de este proceso pasa por que la nueva información que se recibe “encaje armoniosamente” dentro de lo que el agente sabe. Esa armonía puede estar dada por diferentes matices, más allá de si la nueva información contradice lo que el agente sabe o no. Puede que, por más que crea que no puede ser real, la considere una opción verosímil o que podría llegar a darse bajo otras circunstancias. También puede creer que parte de su cuerpo de conocimiento es incorrecto y utilizar la nueva información para corregirlo.

De esto se trata la teoría de cambio de creencias: proponer un modelo teórico y formal que refleje cuáles son las maneras en las que un agente puede adaptar su conjunto de creencias, su conocimiento, cuando recibe una nueva información. En este capítulo presentaremos las motivaciones originales del área. Las mismas no sólo están ligadas a la computación, ya que también tiene raíces en la lógica y la filosofía de la ciencia, además de que metodológicamente se trabaja con rigurosidad matemática. Merece la pena entender entonces cómo esta área llegó a ser inherentemente interdisciplinaria.

1.1 La Teoría de Cambio de Creencias

En la teoría de cambio de creencias confluyen varias tradiciones de investigación científica, según Carnota y Rodríguez en [4]. Una de ellas es filosófica, que si bien existe desde la

¹En nuestro contexto, hablaremos de “conocimiento” como lo que tradicionalmente se conoce como “creencia”, en el sentido de que no necesariamente tiene la propiedad de ser verdadera ni justificada. “Conocimiento” y “creencia” serán considerados sinónimos durante todo el texto.

antigüedad, en el siglo XX resurgió en el contexto de entender cómo se desarrollan las teorías científicas. Para la década de 1970, la discusión ya estaba enfocada en modelar el cambio de creencias racional. Es decir, proponer propuestas de cómo cambia lo que un agente cree que es verdadero, conjunto conocido como de creencias o corpus de conocimiento.

Por un lado, Harper en [22] sintetiza el impacto que el concepto de *revisar* un conjunto de creencias está dando en la comunidad de filosofía de la ciencia. Se refiere concretamente a los cambios al pasar, por ejemplo, de trabajar con geometrías euclidianas a no-euclidianas, o de pasar de la teoría newtoniana a la relatividad, que fueron motivados por nuevas observaciones que no encajaban con el corpus original. Para ello, propone un modelo que represente estos cambios, donde dar un nuevo corpus de conocimiento está basado en los principios de que la nueva información se la considere cierta, sea lo más parecido al corpus original y se preserve la coherencia. También propone, a partir del modelo anterior, la idea de quedarse con lo que es cierto tanto para el corpus original como el nuevo, donde el agente tiene la posibilidad de decidir en el futuro si la nueva información es cierta o no.

Por otro lado, Levi afirma en [27] que existen casos en donde un agente con un conjunto de creencias debe ser capaz de despojarse de algunas de estas afirmaciones, con el objetivo de *contraer* su conjunto de creencias. Esto sucede por ejemplo cuando detecta una inconsistencia en sus creencias. Pero Levi se interesó más en el caso en que el agente, al recibir una información que cree falsa, decide suspender su juicio ante esa información y reconstruir un nuevo corpus de conocimiento en donde pueda explorar el valor de verdad de esta nueva información sin cuestionamientos. Es decir, decide reducir lo que ya sabía para volver a analizar la veracidad de la nueva información. Por supuesto, este cambio genera en el agente una pérdida de información, por lo que debe analizar si la suspensión de este juicio compensa tal pérdida. En cualquier caso, esto evita inconsistencias cuando se quiere *expandir* el conjunto de creencias agregando la nueva información al corpus.

Estos dos trabajos se consideran hitos dentro de la teoría de cambio de creencias, pues pusieron el foco en lo que hoy se conocen como los operadores clásicos, *contraction*, *reversion* y *expansion*, y las relaciones que hay entre ellos: en términos de Levi, es posible definir un operador *reversion* a partir de un operador *contraction* y un *expansion*; mientras que para Harper, el operador *contraction* surge de un operador *reversion* y la intersección con el conjunto de creencias original. El otro hito es la teoría AGM, planteada por Alchourrón, Gärdenfors y Makinson, hoy considerada el paradigma dominante en el área. Aunque se trata de una serie de trabajos en la década de 1980, se destaca [1], donde se da tanto un presentación axiomática como constructiva de los operadores clásicos y un teorema de representación que vincula a ambas presentaciones. Además, a partir de las construcciones se pueden deducir formalmente los vínculos propuestos por Levi y Harper. Pero el impacto de la teoría AGM no se debe únicamente a su poder de síntesis y a su propuesta metodológica de dar presentaciones axiomáticas y constructivas vinculadas por un teorema de representación. También se debió al momento en que fue presentado a otras comunidades afines.

Otra de las tradiciones de investigación científica que aparecen en [4] es la vinculada a la Inteligencia Artificial (IA). A principios de la década de 1980, la comunidad de IA empezó a realizarse preguntas vinculadas a la representación del conocimiento, ya que apuntaban a identificar las bases teóricas en las que los sistemas inteligentes se estaban desarrollando. Newell, a partir de [31], fue uno de los encargados de ordenar y direccionar el trabajo científico, proponiendo desarrollar una línea de investigación hoy conocida como Representación del Conocimiento y el Razonamiento (KRR por sus siglas en inglés). Esta línea propone el uso de la lógica para modelar la representación del conocimiento más allá de la simbología utilizada en cada sistema. Así fue como resurgió la idea de trabajar de forma interdisciplinaria junto con las comunidades de filosofía, matemática, economía, psicología y lingüística.

La concreción de esta idea se dio en la primera conferencia sobre “Theoretical Aspects of Reasoning about Knowledge” (TARK) en marzo de 1986. En ella, Halpern [18] sintetizó que una de las problemáticas principales de ese momento pasaba por el razonamiento en la

presencia de inconsistencias. Es por eso que, cuando el trío AGM presentó su teoría en la segunda conferencia TARK en 1988, la recepción fue contundente. La propuesta no sólo parecía cubrir parte de algunos trabajos ya expuestos en el contexto de KRR, sino que la conexión entre lo axiomático y lo constructivo se interpretó como el puente que conecta la representación de conocimiento abstracta de Newell con los esquemas simbólicos específicos de cada sistema. Además, muchos investigadores de las diferentes disciplinas encontraron en este marco una manera clara de exponer sus ideas, convirtiendo la metodología en el estándar del área.

A 40 años del trabajo fundacional, la teoría AGM se presenta hoy como un modelo de referencia para considerar variantes que generalizan sus diferentes limitaciones. Algunas de las variantes más relevantes las estaremos desarrollando en el Capítulo 2, con el objetivo de identificar la diversidad que existe hoy en día. Es en esta diversidad en donde se expresan también diferentes concepciones de cómo mejorar el modelo original, siendo difícil identificar a simple vista la posibilidad de englobar todas las propuestas en una más general. El análisis de esa posibilidad y cómo llevarla a cabo es el objetivo de esta tesis.

1.2 Esquema de la Tesis

La estructura de este trabajo continúa de la siguiente manera. Como dijimos anteriormente, en el Capítulo 2 nos introduciremos en el estado del arte de la teoría, comenzando con su modelo original y presentando sus variantes más conocidas. Se incluirán además ejemplos basados en situaciones cotidianas que la teoría aspira a modelar. La diversidad de modelos, principalmente las similitudes y diferencias que comparten, nos llevarán a preguntarnos si es posible obtener un modelo más general que englobe de alguna manera a todas las propuestas.

La propuesta general que desarrollamos comienza en el Capítulo 3, donde nos abstraeremos de cualquier lógica subyacente para la presentación de operadores de cambio. Luego, en el Capítulo 4, vincularemos lo hecho en el capítulo anterior con el concepto de credibilidad. Inspirados en la noción de credibilidad, en el Capítulo 5 presentaremos una propuesta para modelar la idea de cuestionabilidad. El Capítulo 6 será el lugar en donde estas tres propuestas confluirán para dar un nuevo marco teórico conceptual y una familia de modelos que busca simplificar y homogeneizar lo visto en el Capítulo 2.

Habiendo desarrollado una propuesta abstracta separada explícitamente de toda estructura lógica, queda ver de qué manera se la asocia a una lógica. De eso se trata el Capítulo 7 donde, luego de identificar qué lógicas son compatibles con nuestra propuesta, veremos que la familia de operadores generaliza el estado del arte presentado en el Capítulo 2. Finalmente, en el Capítulo 8 se darán a conocer las conclusiones de la tesis. Por supuesto, quedarán cuestiones pendientes, que también presentaremos brevemente allí, en vistas de cómo debería continuar la investigación en el futuro.

Capítulo 2

El modelo AGM y sus variantes

En 1988, Gärdenfors y Makinson presentaron el modelo AGM en TARK 88... Y la lata se abrió.

Raúl Carnota (2011)

La teoría de cambio de creencias en general, y el modelo AGM en particular, tienen por objetivo el de definir operadores considerando dos parámetros: un conjunto de creencias y una nueva observación. El resultado de tal operación debe darnos un nuevo conjunto de creencias. Formalmente hablando, el modelo AGM original fue presentado para una lógica proposicional clásica (CPL) $\mathcal{L} = (\mathbb{L}, Cn)$, que se la define con un lenguaje proposicional $\mathbb{L}$ y una noción de consecuencia tarskiana, finitaria y estructural Cn . Se busca entonces un operador $\bullet : \mathcal{K} \times \mathbb{L} \rightarrow \mathcal{K}$ donde $\mathcal{K}$ es el conjunto de teorías, es decir, los conjuntos cerrados por la consecuencia lógica:

$$\mathcal{K} = \{K \in \mathcal{P}(\mathbb{L}) \mid K = Cn(K)\}$$

El operador $\bullet$ ubica en el primer parámetro al conjunto de creencias de le agente, notado como K ; el segundo parámetro, presentado como μ , describe lo observado por el agente; $K \bullet \mu$ es el nuevo conjunto de creencias del agente, luego de haber analizado la observación.

Pero, conceptualmente hablando, la estructura es mucho más flexible: la lógica utilizada no necesariamente tiene que ser CPL, el conjunto de creencias no tiene que ser cerrado por la consecuencia lógica ni la nueva observación tiene que representarse con una única fórmula. Las ideas fundamentales del modelo hacen referencia a una representación de conceptos y creencias ordenadas con cierta coherencia (por ejemplo, una noción de consecuencia), un *estado epistémico*, un conjunto de *actitudes epistémicas* del agente y a *entradas epistémicas*, las percepciones que el agente tiene de su entorno. Este es un glosario elemental para unificar el vocabulario:

Marco Conceptual es un conjunto de objetos junto a una noción de coherencia utilizado para explicitar tanto las creencias como las observaciones. En el caso clásico, sería la lógica proposicional clásica $\mathcal{L} = (\mathbb{L}, Cn)$, cuyos objetos son las fórmulas del lenguaje, o bien conjuntos de fórmulas, y Cn el operador de consecuencia la noción de coherencia.

Observación (Entrada Epistémica) es la información externa que proviene del entorno, representado en el marco conceptual. En el caso clásico, lo notamos como μ .

Conjunto de Creencias es la información interna que el agente tiene de su entorno, un modelo formal de su realidad. En el caso clásico sería una teoría K .

Creencia es toda afirmación que se deduce de un conjunto de creencias dado. En el caso clásico son todos los elementos deducibles por K .

Información extralógica es toda la información que el agente tiene a disposición, pero que trasciende lo representado por el marco conceptual.

Operador (de Cambio de Creencias) es una aplicación que, dado un conjunto de creencias y una observación, devuelve un nuevo conjunto de creencias. Las acciones que ejecuta codifican la información extralógica de un agente dentro del marco conceptual.

Actitud Epistémica describe una posición ante la observación. En el modelo clásico, fijada una lógica CPL y una teoría K , tenemos tres posibles actitudes epistémicas:

- La observación μ es aceptada si $\mu \in K$;
- La observación μ es rechazada si $\neg\mu \in K$;
- La observación μ es indeterminada si $\mu, \neg\mu \notin K$.

El objetivo de esta idealización es el de emular el comportamiento de un agente cuando percibe algo nuevo de su entorno. A través del marco conceptual elegido, representará su conjunto de creencias y la observación. Paralelamente, necesitará de información extralógica para determinar el valor de lo que percibe y decidir qué hacer al respecto. Desde la perspectiva de las actitudes epistémicas, lo que se busca es modelar la capacidad que un agente tiene para modificar las actitudes epistémicas hacia lo percibido.

La definición formal de estado epistémico es un tanto más ambigua, debido a que el modelo original tiene por tradición fijar no sólo el marco conceptual, sino también el conjunto de creencias para definir el operador, que a su vez requiere de información extralógica para ser caracterizado. Así, el estado epistémico podría referirse exclusivamente al conjunto de creencias, al conjunto de creencias cerrado por consecuencia lógica o bien al conjunto de creencias junto con cierta información extralógica [5]. Incluso también podría considerarse el marco conceptual o las actitudes epistémicas. Por lo que, en realidad, la definición de estado epistémico parece depender del modelo a considerar.

Debido a esta divergencia de criterios en el formalismo AGM y sus variantes, omitiremos hablar de “estado epistémico” y especificaremos, en términos del glosario anterior, a qué se hace referencia en cada una de las presentaciones. También, en la medida en que sea intuitivo, extenderemos las definiciones interpretando al conjunto de creencias como un parámetro. El objetivo de este capítulo entonces es, además de conocer el estado del arte, poder identificar la problemática que nos compete: la diversidad de alternativas, cada una con concepciones y objetivos diferentes de lo que se quiere modelar, hace difícil un estudio comparativo. La propuesta de esta tesis es capturar todas estas diversidades en una teoría común, a partir de un marco conceptual abstracto y una familia de operadores general.

En ese espíritu unificador, utilizaremos el siguiente ejemplo concreto como referencia de las situaciones que se quieren modelar.

Ejemplo 2.1 (Basado en un ejemplo de Gärdenfors y Rott[13]). Clementina consiguió la última figura de su colección de aves de cristal, el cisne europeo. La descripción del producto incluye además un breve resumen donde se afirma que todos los cisnes europeos son blancos. A partir de esta información, Clementina deduce que la figura será de color blanco. Por lo que fue una sorpresa descubrir, al abrir el paquete, que el ave representada estaba hecha de cristal negro. Clementina estaba perpleja: el ave que debería ser blanca resultó ser negra. Hay una información que no encaja ¿Qué debería quitarse o revisar?

- ¿Había comprado la figura correcta? Ella ya tenía la figura del cisne negro australiano.
- ¿La empresa fabricante se tomó una libertad artística? Ella entendía que se utilizaban cristales con los colores característicos de las aves.
- ¿La información del resumen era errónea? Tal vez la empresa estaba representando en esta figura otro cisne europeo que no es blanco.

En las siguientes secciones citaremos este ejemplo para entender y comparar las diferentes presentaciones de los operadores clásicos.

2.1 Los Operadores Clásicos de AGM

Los operadores clásicos de AGM se conocen como *expansion* (+), *contraction* (−) y *revision* (*). Representan los cambios elementales que el agente realiza de su actitud epistémica respecto a una observación. Fijando $K \in \mathcal{K}$ una teoría consistente ($K \neq \mathbb{L}$) tenemos que:

- Si μ es aceptada en K , entonces:

μ es indeterminada en $K - \mu$ ($\mu, \neg\mu \notin K - \mu$);

μ es rechazada en $K * \neg\mu$ ($\neg\mu \in K * \mu$);

- Si μ es rechazada en K (es decir, $\neg\mu$ es aceptada en K), entonces:

$\neg\mu$ es indeterminada en $K - \neg\mu$ ($\mu, \neg\mu \notin K - \mu$);

μ es aceptada en $K * \mu$ ($\mu \in K * \mu$);

- Si μ es indeterminada en K , entonces:

μ es aceptada en $K + \mu$ ($\mu \in K + \mu$);

μ es rechazada en $K + \neg\mu$ ($\neg\mu \in K + \neg\mu$);

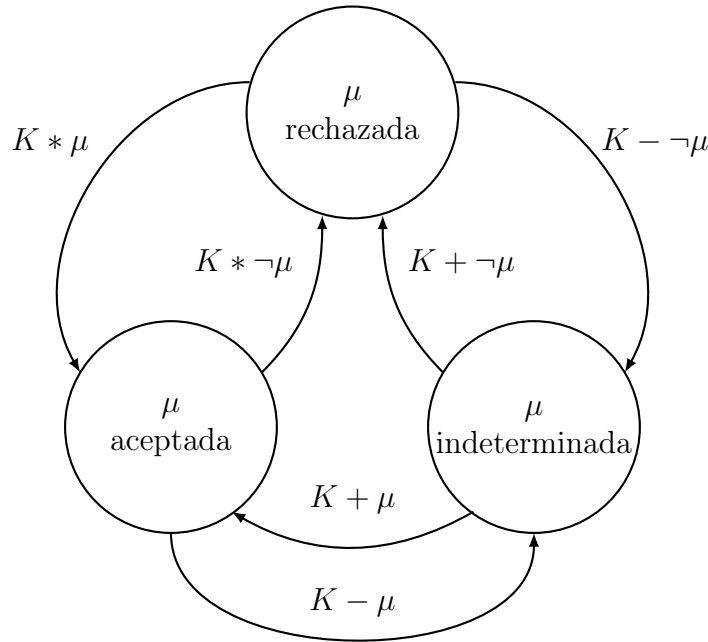


Figura 2.1: Los operadores de AGM pueden representar los cambios que modifican la actitud epistémica de un agente ante una nueva observación de su entorno.

Como comentamos en el capítulo anterior, estos operadores ya formaban parte de la concepción de cambio de creencias, pero no había un formalismo lo suficientemente fuerte que determinara una metodología de investigación. La manera en que el trío AGM presentó su modelo es parte de su éxito, ya que hoy es la base metodológica con la que se desarrollan todos los demás trabajos del área. En el trabajo original [1], se usaron dos presentaciones diferentes: vía postulados y por construcción. La primera facilita el estudio formal y abstracto de sus propiedades, mientras que la segunda busca simplificar su implementación en situaciones concretas. Estas presentaciones son tan importantes como el teorema de representación que determina que ambas definen los mismos operadores. La sistematización de esta presentación atraviesa de una u otra manera los trabajos en la

Teoría de Cambio de Creencias: siempre se trata de presentar operadores que modelen un comportamiento en términos de actitudes epistémicas, dando tanto una construcción formal como una axiomatización, y un teorema de representación que los vincule. Esto es lo que haremos con los operadores *expansion*, *contraction* y *revision*.

En este trabajo, las definiciones que daremos para los operadores están pensadas para interpretarse con dos parámetros. Originalmente esta idea estaba implícita en el modelo AGM, lo que dio lugar a también interpretarlo como funciones $K^+ : \mathbb{L} \rightarrow \mathcal{K}$, $K^- : \mathbb{L} \rightarrow \mathcal{K}$ y $K^* : \mathbb{L} \rightarrow \mathcal{K}$, fijando el conjunto de creencias K . Incluso en [1] podemos ver cómo muchos resultados se dan fijando una teoría $K \in \mathcal{K}$ consistente ($K \neq \mathbb{L}$). De cualquier manera, debido a que estamos trabajando sobre $\mathcal{K}$, tanto los operadores definidos fijando el primer parámetro o como los que no, se pueden presentar vía postulados de la misma manera.

Para definir un operador necesitamos identificar qué queremos representar. En el caso del operador *expansion*, se busca que el nuevo conjunto de creencias considere ciertas a todas las creencias del conjunto original como también a la nueva observación. Es por eso que la definición es clara tanto a nivel constructivo como por postulados¹.

Definición 2.1.1 ([1]). Llamamos *expansion* al operador $+ : \mathcal{K} \times \mathbb{L} \rightarrow \mathcal{K}$ tal que:

$$K + \mu = Cn(K \cup \{\mu\})$$

Para los operadores *revision* y *contraction*, hay que tener en cuenta más propiedades para entender qué se busca. En ambos casos suponemos que la observación tiene preferencia por sobre lo que se deduce del conjunto de creencias. En el caso de *contraction*, se espera que el nuevo conjunto de creencias no acepte la observación dada. Puede o bien ser indeterminada o incluso rechazada, en la situación extrema en que el conjunto de creencias original sea inconsistente. En cualquier caso, lo que se busca es “contraer”, debilitar la capacidad del conjunto de creencias original de percibir certezas. En el caso del operador *revision*, el nuevo conjunto de creencias debe aceptar la observación y a la vez preservar la consistencia, excepto en el caso de que la observación sea inconsistente. Se entiende entonces que el operador “revisa” la consistencia del conjunto de creencias para poder aceptar la observación. En ambos casos, estos cambios deben hacerse perdiendo la menor cantidad de poder deductivo del conjunto de creencias original.

Definición 2.1.2 ([1]). Dados $K \in \mathcal{K}$ y $\mu, \nu \in \mathbb{L}$ se consideran los postulados:

- para el operador de *contraction* $- : \mathcal{K} \times \mathbb{L} \rightarrow \mathcal{K}$:
 - (AGM-1) $K - \mu = Cn(K - \mu)$ (closure).
 - (AGM-2) $K - \mu \subseteq K$ (contraction inclusion).
 - (AGM-3) Si $\mu \notin K$ entonces $K - \mu = K$ (contraction vacuity).
 - (AGM-4) Si $\not\models \mu$ entonces $\mu \notin K - \mu$ (contraction success).
 - (AGM-5) Si $\mu \equiv \nu$ entonces $K - \mu = K - \nu$ (extensionality).
 - (AGM-6) $K \subseteq (K - \mu) + \mu$ (recovery).
 - (AGM-7) $(K - \mu) \cap (K - \nu) \subseteq K - (\mu \wedge \nu)$ (conjunctive overlap).
 - (AGM-8) Si $\mu \notin K - (\mu \wedge \nu)$ entonces $K - (\mu \wedge \nu) \subseteq K - \mu$ (conjunctive inclusion).

Un operador $-$ se llama *basic contraction* si satisface (AGM-1)~(AGM-6), postulados que llamaremos *básicos*. Si $-$ además satisface (AGM-7) y (AGM-8) lo llamaremos *contraction*, donde estos últimos postulados se conocen como *suplementarios*.

- para el operador de *revision* $* : \mathcal{K} \times \mathbb{L} \rightarrow \mathcal{K}$:

¹Consideramos válido utilizar para presentar postulados la estructura de conjuntos del lenguaje $\mathbb{L}$, la construcción de las fórmulas y la función Cn .

- (AGM*1) $K * \mu = Cn(K * \mu)$ (closure).
- (AGM*2) $K * \mu \subseteq K + \mu$ (revision inclusion).
- (AGM*3) Si $K \not\models \neg\mu$ entonces $K * \mu = K + \mu$ (revision vacuity).
- (AGM*4) $\mu \in K * \mu$ (revision success).
- (AGM*5) Si $\mu \equiv \nu$ entonces $K * \mu = K * \nu$ (extensionality).
- (AGM*6) Si $\mu \not\models \perp$ entonces $K * \mu \not\models \perp$ (consistency).
- (AGM*7) $K * (\mu \wedge \nu) \subseteq (K * \mu) + \nu$ (superexpansion).
- (AGM*8) Si $\neg\nu \notin K * \mu$ entonces $(K * \mu) + \nu \subseteq K * (\mu \wedge \nu)$ (subexpansion).

Un operador $*$ que satisface (AGM*1)~(AGM*6) se conoce como *basic revision*, y sus postulados los llamaremos *básicos*. Si además satisface (AGM*7) y (AGM*8), conocidos como postulados *suplementarios*, se lo llama *revision*.

Los postulados elegidos representan lo que buscamos de cada operador. Por ejemplo, los postulados success (éxito) (AGM–4) y (AGM*4) determinan que los operadores que queremos caracterizar tienen éxito al contraer o revisar respectivamente. Los postulados closure (clausura) (AGM–1) y (AGM*1) afirman la buena definición del operador en el sentido de que el resultado debe ser un elemento de $\mathcal{K}$. Los postulados extensionality (extensionalidad) (AGM–5) y (AGM*5) hacen referencia a que lo importante de la nueva observación es su interpretación semántica. Es decir, el cambio no depende de la sintaxis de las fórmulas. Esta percepción coincide también con que se trabaje con teorías y no con conjuntos de fórmulas. Luego, en sintonía con la idea de “menor cambio posible” se encuentran varios conceptos. Los postulados vacuity (vacuidad) (AGM–3) y (AGM*3) se encargan de aclarar que no hay necesidad de cambiar cuando el conjunto de creencias original ya es “exitoso”. Los postulados inclusion (inclusión) (AGM–2) y (AGM*2) delimitan la información que el resultado final debe contener. Los postulados recovery (recuperación) (AGM–6) y consistency (consistencia) (AGM*6) limitan el cambio para que no sea tan extremo. Por último, los postulados suplementarios utilizan la interpretación del operador $\wedge$ de CPL para refinar un comportamiento de cambio mínimo específico.

Los postulados suplementarios tienen otras representaciones equivalentes en el contexto de que sean válidos los postulados básicos. En el siguiente teorema se presenta una manera de resumir este comportamiento en únicos postulados para cada operador.

Teorema 2.1.3. *Sean $-$ y $*$ operadores contraction y revision respectivamente, que satisfacen (AGM–1)~(AGM–6) y (AGM*1)~(AGM*6). Entonces:*

1. $-$ *satisface (AGM–7) y (AGM–8) si y sólo si satisface:*

$$(AGM-S1) \quad K - (\mu \wedge \nu) = \begin{cases} K - \mu \\ K - \nu \\ (K - \mu) \cap (K - \nu) \end{cases} \quad (\text{contraction conjunctive factoring}).$$

2. $*$ *satisface (AGM*7) y (AGM*8) si y sólo si satisface alguno de los siguientes postulados:*

$$(AGM*S1) \quad K * (\mu \wedge \nu) = \begin{cases} K * \mu \\ K * \nu \\ (K * \mu) \cap (K * \nu) \end{cases} \quad (\text{revision conjunctive factoring})$$

$$(AGM*S2) \quad \text{Si } \neg\nu \notin K * \mu \text{ entonces } (K * \mu) + \nu = K * (\mu \wedge \nu) \quad (\text{super-subexpansion}).$$

Ahora que tenemos los operadores formalmente definidos, veamos si el comportamiento que reflejan efectivamente funciona en el contexto del Ejemplo 2.1.

Ejemplo 2.2 (Continúa del Ejemplo 2.1). Analicemos formalmente lo sucedido, utilizando una lógica CPL con las siguientes variables proposicionales:

p : La colección representa aves en cristal con su color característico.

q : El ave representada es un cisne.

r : El ave representada proviene de Europa.

s : El ave representada es blanca.

Bajo esa elección de variables proposicionales, la observación es $\mu = \neg s$. Mientras que la teoría $K = Cn(\{p, q \wedge r, \psi\})$ representa al conjunto de creencias de Clementina, donde $\psi = p \wedge q \wedge r \Rightarrow s$. Como s y $\neg s \in K + \mu$, resulta que $K + \mu = \mathbb{L}$, generando la perplejidad de Clementina. Clementina no puede creer en algo y en su negación, de lo contrario la lógica CPL afirma que debería creer en todas las fórmulas. Clementina decide aplicar un operador revision para obtener un nuevo conjunto de creencias, intuyendo que para mantener la consistencia debe descartar al menos una de las fórmulas que definen su conjunto de creencias: p , $q \wedge r$ ó ψ . Pero no sabe cuál exactamente y, peor aún, no sabe si al hacer eso está perdiendo demasiada información. Lo que sí sabe es que puede que algunas fórmulas pueden ser más relevantes que otras.

Clementina aún no puede aplicar los operadores en su total expresión porque aún falta construirlos. Eso lo haremos en la siguiente sección. Sin embargo, las intuiciones que tiene se asemejan a las que se tuvieron al momento de pensar los postulados.

A partir de este análisis vemos que los postulados representan tanto acciones elementales en la adquisición de nuevo conocimiento, como también formas de representar a los elementos que componen estas acciones. El debate de estas consideraciones dieron lugar a la diversidad de propuestas que tenemos hoy en día, motivadas por ciertos cuestionamientos:

1. Respecto a los postulados closure: ¿Por qué el conjunto de creencias debe ser una teoría? Considerando que para su implementación se debe trabajar en un contexto finito, lo más apropiado es hacerlo con un conjunto de fórmulas finito B , llamado *base*. Estos operadores extienden a los clásicos, que solamente trabajan conjuntos de fórmulas cerrados por consecuencia lógica (teorías).
2. El modelo clásico tiene la tradición de trabajar con conjuntos de creencias fijos y consistentes, pero no así con las observaciones, representadas por una fórmula del lenguaje. ¿Cuán necesaria es esta disparidad entre conjuntos de creencias y observaciones, más allá de su interpretación? ¿Podemos tratar al conjunto de creencias como un parámetro más, al igual que la observación? ¿Cómo integrar el caso de creencias inconsistentes, tan común en agentes humanos, a nuestros modelos?
3. Existe una dimensión temporal en el momento en que el agente percibe las observaciones: puede recibir múltiples observaciones en un mismo instante o recibir un continuo de observaciones en un período de tiempo determinado. Además, puede ocurrir un cambio en el entorno. Toda estas situaciones temporales están omitidas en los operadores de cambio clásicos. ¿Es posible capturar la temporalidad? ¿Cómo entender el cambio de un entorno? ¿Qué hacer cuando se reciben múltiples observaciones en simultáneo o de forma consecutiva?
4. Respecto a los postulados success: ¿Por qué el agente consideraría que la observación recibida es creíble? Además de que conocemos la existencia de ilusiones sensoriales, también lo que nos dicen puede ser incoherente o bien simplemente algo que consideremos inverosímil. Vale la pena aclarar en este contexto que las observaciones creíbles pueden ser indeterminadas o rechazadas por el conjunto de creencias. De hecho, lidiar con las observaciones rechazadas por el conjunto de creencia es uno de los objetivos al momento

de definir operadores. Las observaciones creíbles serían entonces aquellas por las que el agente estaría dispuesto a cambiar su actitud epistémica hacia ellas en caso de percibir las en su entorno ¿De qué manera es posible representar el concepto de credibilidad?

5. Respecto a los postulados extensionality: ¿Por qué la sintaxis no es relevante? Muchas veces pasa que cuando nos explican algo totalmente nuevo nos resulta raro, podemos considerarlo no creíble o bien hacemos cambios en nuestro conjunto de creencias que no hubiésemos hecho si nos lo hubieran explicado de otra forma. Por lo que, un agente puede ser sensible a la sintaxis. Esto debería contemplarse en el modelo. Pero por otro lado, habiendo asimilado la observación, intentamos abstraerla y conceptualizarla más allá de la sintaxis con la que la recibimos para evitar sesgos de comprensión. ¿Cuál es el equilibrio entre ambas propuestas? ¿A qué debería atenderse primeramente un modelo de cambio de creencias?
6. Respecto a los postulados de menor cambio posible: ¿Cuán estándar son sus límites? Los postulados inclusion y vacuity son fáciles de aceptar, además de que no dependen de la lógica. Algo similar sucede con consistency. El postulado más criticado en la literatura es recovery del operador contraction, ya que resulta demasiado restrictivo.
7. Respecto a los postulados suplementarios: ¿Existe otra noción de minimalidad? Además, estos postulados utilizan fuertemente la sintaxis de CPL ¿Es posible capturar la misma noción en otras lógicas?
8. De los trabajos de Levi y Harper que nos referimos en el capítulo anterior, se deduce que hay una dualidad entre los operadores contraction y revision, es decir, el hecho de que se puedan interpretar de a pares: ¿Qué sucede en el caso de los operadores AGM? ¿Son interdefinibles? ¿Se podrá definir un modelo que abarque ambos comportamientos?

Este trabajo se propone ahondar en algunos de estos cuestionamientos con el correr de los siguientes capítulos. Sólo adelantaremos que, por una cuestión de comodidad a futuro, en este trabajo trataremos al conjunto de creencias como un parámetro más, con la posibilidad de ser incluso inconsistente, aunque siempre como una teoría. En lo que sigue de este capítulo nos enfocaremos en analizar cómo otros autores fueron respondiendo a algunas de estas preguntas y qué modelos fueron proponiendo en cada caso.

2.2 Construcción vía Remainders

Ahora que tenemos los postulados que caracterizan los operadores de contraction y revision, necesitamos una construcción para su implementación. En esta sección daremos la construcción tradicional, llamada por *remainders* (lo que queda).

Definición 2.2.1 ([1]). Definimos $\perp : \mathcal{K} \times \mathbb{L} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{K})$ a la función tal que dados $K \in \mathcal{K}$ y $\mu \in \mathbb{L}$, para cada $X \in K \perp \mu$:

- ($\perp 1$) $X \subseteq K$;
- ($\perp 2$) $X \not\models \mu$;
- ($\perp 3$) Si $X \subsetneq X' \subseteq K$ entonces $X' \models \mu$.

A los elementos de $K \perp \mu$, los subconjuntos maximales de K que no deducen μ , se los conoce como *remainders* (de K para μ).

Los remainders son los conjuntos más grandes de K que cumplen los objetivos del operador contraction. Debido a este principio de maximalidad, si $K \in \mathcal{K}$ se tiene que $K \perp \mu \subseteq \mathcal{K}$ para cualquier $\mu \in \mathbb{L}$. Más aún, la intersección de remainders preserva todas estas propiedades. La pregunta entonces es ¿cuál es el conjunto que debe ser el resultado

de una contracción? El trío AGM entendió que esta pregunta sólo se podía responder de forma extralógica, es decir, con una decisión que depende del agente. De esta manera surge el otro ingrediente necesario para definir los operadores contraction y revision: una función que represente la elección de remainders. Como estamos considerando que el conjunto de creencias es un parámetro, utilizaremos una adaptación de esta función dada por Hansson.

Definición 2.2.2 ([20]). Definimos $\gamma : \mathcal{K} \times \mathcal{P}(\mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{K})$ como la función de selección (de dos parámetros) tal que:

- i) $\gamma(N, S) \subseteq S$;
- ii) $\gamma(N, \emptyset) = \{N\}$;
- iii) si $S \neq \emptyset$ entonces $\gamma(N, S) \neq \emptyset$.

Notaremos como $\bigcap \gamma(N, S)$ al conjunto $\bigcap_{X \in \gamma(N, S)} X$.

Ahora estamos en condiciones de definir los operadores partial meet.

Definición 2.2.3 ([1]). Definimos los operadores $- : \mathcal{K} \times \mathbb{L} \rightarrow \mathcal{K}$ *partial meet contraction* y $* : \mathcal{K} \times \mathbb{L} \rightarrow \mathcal{K}$ *partial meet revision* para todo $K \in \mathcal{K}$ y $\mu \in \mathbb{L}$:

$$K - \mu = \bigcap \gamma(K, K \perp \mu) \quad K * \mu = \bigcap \gamma(K, K \perp \neg\mu) + \mu$$

De la definición se destaca que no hay un único operador contraction o revision, sino que hay tantas como funciones de selección. Es por eso que, al referirnos a estos operadores, en general lo hacemos en términos de familias.

La definición dada por construcción coincide con la dada vía postulados en la sección anterior. A este resultado se lo conoce como Teorema de Representación.

Teorema 2.2.4 ([1] Representación de Operadores AGM). *Sea $- : \mathcal{K} \times \mathbb{L} \rightarrow \mathcal{K}$ un operador de cambio. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- a) $-$ *satisface los postulados (AGM-1)~(AGM-6);*
- b) $-$ *es un operador partial meet contraction.*

Sea $: \mathcal{K} \times \mathbb{L} \rightarrow \mathcal{K}$ un operador de cambio. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- a) $*$ *satisface los postulados (AGM*1)~(AGM*6);*
- b) $*$ *es un operador partial meet revision.*

La construcción vía remainders y la función de selección les permitió al trío AGM probar las Identidades que Levi y Harper habían teorizado para estos operadores, resolviendo parte del Cuestionamiento 8.

Teorema 2.2.5 ([1] Identidades de Levi y Harper). *Sean $- : \mathcal{K} \times \mathbb{L} \rightarrow \mathcal{K}$ un operador partial meet contraction y $* : \mathcal{K} \times \mathbb{L} \rightarrow \mathcal{K}$ un operador partial meet revision, ambas construidas con la misma función de selección γ . Entonces:*

Identidad de Levi: $K * \mu = (K - \neg\mu) + \mu$.

Identidad de Harper: $K - \mu = (K * \neg\mu) \cap K$;

La definición de remainders es lo suficientemente flexible como para generalizarse para conjuntos no necesariamente cerrados por consecuencia lógica, es decir, bases. Hansson [19], [20] propuso la construcción vía postulados de esta generalización. Estos operadores no satisfacen el principio de extensionalidad en el primer parámetro: dados dos conjuntos de creencias K y K' tales que $Cn(K) = Cn(K')$, es decir bases de una misma teoría,

no necesariamente vale que $K * \mu = K' * \mu$ con $\mu \in \mathbb{L}$. Por lo que es una propuesta que da una respuesta al Cuestionamiento 1. Algunos autores ven esto como una variabilidad interesante, mientras que otros como una limitación. En nuestro caso, el desarrollo de esta tesis se centra solamente en el contexto de teorías, por lo que omitiremos esta generalización, pero la consideramos pertinente para un trabajo futuro. Además, los trabajos de Hansson influenciaron fuertemente el desarrollo de los operadores múltiples, que sí están considerados en nuestra propuesta y presentaremos al final de este capítulo.

Los teoremas anteriores hacen solamente referencia a los postulados básicos. Para considerar los postulados suplementarios, el trío AGM presentó en [1] los operadores transitively relational partial meet, donde la función de selección está determinada por los elementos maximales de una relación transitiva sobre los remainders. No daremos su construcción aquí pues en la siguiente sección presentaremos otra construcción que involucra fuertemente estos postulados. Sin embargo, sí daremos su intuición al aplicar el conjunto de remainders al ejemplo de Clementina.

Ejemplo 2.3 (Continúa del Ejemplo 2.2). Tenemos que $K = Cn(\{p, q \wedge r, \psi\})$ representa al conjunto de creencias de Clementina, con $\psi = p \wedge q \wedge r \Rightarrow s$, y $\mu = \neg s$ la observación. Al calcular el conjunto de remainders nos queda:

$$K \perp s = \left\{ \begin{array}{l} Cn(\{p, q, r\}), Cn(\{p, q, r \Leftrightarrow s\}), Cn(\{p, r, q \Leftrightarrow s\}), Cn(\{q, r, p \Leftrightarrow s\}), \\ Cn(\{p, q \vee r \vee s \Leftrightarrow q \wedge r \wedge s\}), Cn(\{q, p \vee r \vee s \Leftrightarrow p \wedge r \wedge s\}), \\ Cn(\{r, p \vee q \vee s \Leftrightarrow p \wedge q \wedge s\}), Cn(\{p \vee q \vee r \vee s \Leftrightarrow p \wedge q \wedge r \wedge s\}) \end{array} \right\}$$

Clementina descarta el remainder $Cn(\{p, q, r\})$ pues es el único que no contiene a ψ , una afirmación que considera relevante preservar. También considera relevante q , pues confía más en su veracidad que p ó r . Por lo que termina eligiendo a todos los remainders sobrantes que deducen q para su nuevo conjunto de creencias:

$$Cn(\{p, q, r \Leftrightarrow s\}) \cap Cn(\{q, r, p \Leftrightarrow s\}) \cap Cn(\{q, p \vee r \vee s \Leftrightarrow p \wedge r \wedge s\}) = Cn(\{q, p \wedge r \Leftrightarrow s\})$$

Luego, $K - s = Cn(\{q, p \wedge r \Leftrightarrow s\})$ si aplicáramos un operador contraction para esta situación. Pero como la observación es aceptada, el operador a utilizar es revision:

$$K * \mu = (K - s) + \neg s = Cn(\{q, p \wedge r \Leftrightarrow s\}) + \neg s = Cn(\{q, \neg s, \neg p \vee \neg r\})$$

A partir de estas elecciones dadas por una intuición extralógica, Clementina ahora cree que el ave representada es un cisne negro y que o bien el fabricante se toma libertades artísticas o bien el ave representada no es europea.

Como anticipamos, la construcción de los operadores por remainders no es la única conocida para los operadores contraction y revision. Existen otras construcciones, como por ejemplo usando epistemic entrenchment o conjuntos de kernels. En este trabajo sólo presentaremos únicamente la semántica de mundos posibles, ya que nuestra propuesta está inspirada en ella.

2.3 Construcción vía Semántica de Mundos Posibles

A partir del modelo AGM surgieron otras propuestas para representar a estas familias de operadores, sobre todo considerando los operadores suplementarios. Tal es el caso del trabajo de Grove [17], que se inspira en el modelo de contrafácticos de Lewis para definir una presentación a través de lo que se conoce como sistema de esferas de mundos posibles. Al hablar de mundos posibles, Grove se refiere concretamente al conjunto de maximales consistentes de una lógica CPL $\mathcal{L}$, o equivalentemente, al conjunto de sus valuaciones. Notaremos a este conjunto como $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{L}} = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{L}) \mid T = Cn(T) \text{ y si } T \subsetneq K \in \mathcal{K} \text{ entonces } K = \mathbb{L}\}$$

De esta manera, Grove define una relación entre $\mathcal{K}$ y $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\mathcal{L}})$, teniendo presente que $\mathcal{M}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{K}$ y que $\mathcal{K}$ es cerrado por intersecciones. Tal relación proviene de un resultado conocido del estudio de lógicas CPL.

Teorema 2.3.1. *Dado $K \in \mathcal{K}$, existe un conjunto $A \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ tal que:*

1. $A = \{T \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}} \mid K \subseteq T\};$
2. $K = \bigcap A.$

Reescribamos el resultado anterior en términos de funciones entre $\mathcal{K}$ y $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\mathcal{L}})$.

Definición 2.3.2. Sea $\|\cdot\| : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{M}_{\mathcal{L}})$ la función tal que $\|K\| = \{T \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}} \mid K \subseteq T\}$ para todo $K \in \mathcal{K}$. Decimos que los elementos de $\|K\|$ son los mundos posibles de K .

Sea $\mathcal{T} : \mathcal{P}(\mathcal{M}_{\mathcal{L}}) \rightarrow \mathcal{K}$ la función tal que $\mathcal{T}(A) = \bigcap A$ para todo $A \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$. Decimos que $\mathcal{T}(A)$ es la teoría de A .

El Teorema 2.3.1 nos dice entonces que:

- $\mathcal{T}(\|K\|) = K$ para cualquier $K \in \mathcal{K}$.
- La función $\|\cdot\|$ es inyectiva y $\mathcal{T}$ es sobreyectiva.

Es importante destacar que no necesariamente vale que $\|\mathcal{T}(A)\| = A$. Por ejemplo, $\|\mathcal{T}(\mathcal{M}_{\mathcal{L}} \setminus \{T\})\| = \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ para cualquier $T \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ si consideramos una lógica $\mathcal{L}$ con infinitas variables proposicionales, como se ve en [39]. La igualdad sí vale para el caso en que los conjuntos A son finitos o finitamente representables, es decir, existe $\psi \in \mathbb{L}$ tal que $A = \|Cn(\psi)\|$. Es por eso que en esta sección trabajaremos solamente con este tipo de conjuntos, cuya colección notaremos como $\mathcal{P}_f(\mathcal{M}_{\mathcal{L}})$. En el caso particular de que $\mathcal{L}$ sea finita, entonces $\mathcal{P}_f(\mathcal{M}_{\mathcal{L}}) = \mathcal{P}(\mathcal{M}_{\mathcal{L}})$.

A pesar de estas restricciones, el modelo de Grove resulta interesante por el poder simplificador que tiene de la teoría de cambio de creencias, ya que traduce todo a relaciones entre elementos de $\mathcal{P}_f(\mathcal{M}_{\mathcal{L}})$. Comencemos presentando unas propiedades probadas en [17].

Propiedad 2.3.3 ([17], [39]). *Dados $K, K' \subseteq \mathbb{L}$ y $A, B \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$:*

1. $\|\cdot\|$ se la puede extender a todo $\mathbb{L}$ componiéndola con Cn : $\|K\| = \|Cn(K)\|$.
En particular, $\|\cdot\|$ no es inyectiva en $\mathcal{P}(\mathbb{L})$.
2. Si $\mu \in \mathbb{L}$ y $A \in \mathcal{P}_f(\mathcal{M}_{\mathcal{L}})$, entonces $\mathcal{T}(A \cap \|\{\mu\}\|) = \mathcal{T}(A) + \mu$, siendo $+$ el operador *expansion* en teorías.
3. $K \subseteq K'$ si y sólo si $\|K'\| \subseteq \|K\|$;
4. Si $A \subseteq B \in \mathcal{P}_f(\mathcal{M}_{\mathcal{L}})$ entonces $\mathcal{T}(B) \subseteq \mathcal{T}(A)$;
5. $\|K\| \cap \|K'\| = \|K \cup K'\|$;
6. $\|K\| \cup \|K'\| \subseteq \|K \cap K'\|$. La igualdad vale si $K, K' \in \mathcal{K}$.

Ahora tenemos los elementos para construir la propuesta de Grove: el sistema de esferas.

Definición 2.3.4. Dado $K \in \mathcal{K}$, un sistemas de esferas centrado en K es una colección de subconjuntos $S \subseteq \mathcal{P}_f(\mathcal{M}_{\mathcal{L}})$ tal que:

1. S está totalmente ordenada respecto de la inclusión de $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\mathcal{L}})$;
2. El menor elemento de S es $\|K\|$ y el mayor es $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$;
3. Si $\mu \in \mathbb{L}$ y $\|\mu\| \neq \emptyset$, entonces existe $A_\mu \in S$ tal que $A_\mu = \bigcap \{B \in S \mid \|\mu\| \cap B \neq \emptyset\}$.

Consideramos la función $f_S : \mathbb{L} \longrightarrow \mathcal{P}_f(\mathcal{M}_{\mathcal{L}})$ tal que $f_S(\mu) = \|\mu\| \cap A_\mu$.

La última condición se la conoce como *Limit assumption*. En términos de órdenes significaría que el conjunto ordenado $(S, \subseteq)$ es bien fundado. A partir de esta construcción, Grove propone una representación para la familia de operadores revision.

Teorema 2.3.5 ([17]). *Sea K una teoría y $*$ un operador de cambio. Entonces, se tiene que $*$ satisface $(AGM*1) \sim (AGM*8)$ si y sólo si existe un sistema de esferas S centrado en K tal que $K * \mu = \mathcal{T}(f_S(\mu))$.*

Existe un último resultado que queremos rescatar de este trabajo, y es el que vincula la semántica de mundos posibles con los remainders definidos en la sección anterior.

Teorema 2.3.6 (Grove's Bijection [17]). *Sea K una teoría y $\mu \in \mathbb{L}$. Entonces, existe una biyección entre los elementos de $K \perp \mu$ y los de $\|\neg\mu\|$, de forma tal que $T \in \|\neg\mu\|$ si y sólo si $K \cap T \in K \perp \mu$.*

La biyección de Grove, aplicada a los operadores contraction y revision, se puede utilizar para interpretar que la función de selección γ de la Definición 2.2.2 elige mundos maximales consistentes de $\|\neg\mu\|$. Además, esta caracterización resulta muy útil para entender cómo se construyen los conjuntos de remainders. Veámoslo para el Ejemplo 2.3

Ejemplo 2.4 (Versión mundos posibles del Ejemplo 2.3). Para trabajar con mundos posibles de CPL del ejemplo, utilizaremos elementos de $\{0, 1\}^4$ para representar las valuaciones $v : \mathbb{L} \rightarrow \{0, 1\}$, de forma tal que $v = (v(p), v(q), v(r), v(s))$. Recordar que en CPL los elementos de $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ están en biyección con las valuaciones. Por lo que, si $v = (1, 0, 0, 1)$ significa que el maximal consistente asociado contiene a p , $\neg q$, $\neg r$ y s .

Recordemos que del ejemplo teníamos que $K = Cn(\{p, q \wedge r, \psi\})$, con $\psi = p \wedge q \wedge r \Rightarrow s$, y $\mu = \neg s$ la observación. En términos de mundos posibles, $\|K\| = \{(1, 1, 1, 1)\}$, $\|\mu\| = \|\neg s\|$ es el conjunto de todos los vectores de $\{0, 1\}^4$ con un 0 en la última coordenada (8 elementos) y $\|s\|$ es el conjunto de todos los vectores de $\{0, 1\}^4$ con un 1 en la última coordenada (8 elementos). Por la biyección de Grove, los mundos posibles de cada $X \in K \perp s$ son:

$$\begin{aligned} \|Cn(\{p, q, r\})\| &= \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0)\} \\ \|Cn(\{p, q, r \Leftrightarrow s\})\| &= \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 0)\} \\ \|Cn(\{p, r, q \Leftrightarrow s\})\| &= \{(1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0)\} \\ \|Cn(\{q, r, p \Leftrightarrow s\})\| &= \{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 0)\} \\ \|Cn(\{p, q \vee r \vee s \Leftrightarrow q \wedge r \wedge s\})\| &= \{(1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0)\} \\ \|Cn(\{q, p \vee r \vee s \Leftrightarrow p \wedge r \wedge s\})\| &= \{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 0)\} \\ \|Cn(\{r, p \vee q \vee s \Leftrightarrow p \wedge q \wedge s\})\| &= \{(1, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 0)\} \\ \|Cn(\{p \vee q \vee r \vee s \Leftrightarrow p \wedge q \wedge r \wedge s\})\| &= \{(1, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 0)\} \end{aligned}$$

La afirmación de que ψ está en todos los remainders excepto $Cn(\{p, q, r\})$, proviene de que $\|\neg\psi\| = \{(1, 1, 1, 0)\}$ y del hecho de que $X \models \psi$ si y sólo si $\|X\| \subseteq \|\psi\|$. Mirando los mundos posibles de cada remainder, es evidente que $\|Cn(\{p, q, r\})\| \not\subseteq \|\psi\|$.

En términos de la interpretación de la biyección de Grove, Clementine elige el subconjunto de $\|\mu\|$ formado por $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 1, 1, 0)$ y $(0, 1, 0, 0)$, como se puede ver en los resultados de los operadores:

$$\begin{aligned} \|K - s\| &= \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 0)\} \\ \|K * \mu\| &= \{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 0)\} \end{aligned}$$

Un sistema de esferas acorde a las intuiciones extralógicas de Clementine podría ser:

$$S_0 = \|K\| \quad , \quad S_1 = \|\{q, \psi\}\| \quad , \quad S_2 = \|\{\psi\}\| \quad , \quad S_3 = \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$$

Como en S_1 están todos los elementos con un 1 en la segunda coordenada excepto el $(1, 1, 1, 0)$, en particular $\emptyset \neq S_1 \cap \|\mu\| = \{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 0)\}$.

El trabajo de Grove se puede ver como una alternativa que responde al Cuestionamiento 5 y es además uno de los puntos de partida de esta tesis. En el Capítulo 3 se propone una abstracción de esta semántica, sin depender de una lógica subyacente.

2.4 El Modelo de Katsuno y Mendelzon: Entornos Fijos vs Cambiantes

Continuando la línea comenzada por Grove, Katsuno y Mendelzon analizan las representaciones de los operadores sobre una lógica CPL finita en [24] y desarrollan una nueva propuesta en [23], los operadores *update* y *erase*. Trabajar en una CPL finita no sólo permite utilizar todos los conjuntos de mundos posibles para representar teorías, sino que además éstas se pueden representar con una fórmula. Esto vale incluso para las teorías maximales consistentes, cuyas fórmulas asociadas se las conoce como *fórmulas completas*. Por otro lado, al cambiar la notación de los conjuntos de creencias a una sola fórmula, los autores generaron implícitamente un paralelismo más cercano con las observaciones, ya que también se representan como fórmulas.

Definición 2.4.1 ([23], [24]). Dados ψ, ϕ, μ y $\nu \in \mathbb{L}$ se consideran los postulados:

- para el operador $- : \mathbb{L} \times \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{L}$:
 - (KM-1) $\psi \models \psi - \mu$ (KM-contraction inclusion).
 - (KM-2) Si $\psi \not\models \mu$ entonces $\psi - \mu = \psi$ (KM-contraction vacuity).
 - (KM-3) Si $\psi \models \mu$ entonces $\psi - \mu \not\models \mu$ (KM-contraction success).
 - (KM-4) Si $\psi \equiv \phi$ y $\mu \equiv \nu$ entonces $\psi - \mu = \phi - \nu$ (KM-extensionality).
 - (KM-5) $(\psi - \mu) \wedge \mu \models \psi$ (KM-recovery).
- para el operador $* : \mathbb{L} \times \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{L}$:
 - (KM*1) $\psi * \mu \models \mu$ (KM-revision success).
 - (KM*2) Si $\psi \wedge \mu \not\models \perp$ entonces $\psi * \mu = \psi \wedge \mu$ (KM-revision vacuity).
 - (KM*3) Si $\mu \not\models \perp$ entonces $\psi * \mu \not\models \perp$ (KM-consistency).
 - (KM*4) Si $\psi \equiv \phi$ y $\mu \equiv \nu$ entonces $\psi * \mu = \phi * \mu$ (KM-extensionality).
 - (KM*5) $(\psi * \mu) \wedge \nu \models \psi * (\mu \wedge \nu)$ (KM-superexpansion).
 - (KM*6) Si $(\psi * \mu) \wedge \nu \not\models \perp$ entonces $\psi * (\mu \wedge \nu) \models (\psi * \mu) \wedge \nu$ (KM-subexpansion).

Los postulados se pueden deducir fácilmente a partir de los que vimos en la Sección 2.1, excepto por los postulados extensionality (extensionalidad) (KM-4) y (KM*4). Debido a que la fórmula tiene una sintaxis, en estos postulados podemos ver que los autores decidieron adoptar la variabilidad del primer parámetro y mantener el principio de extensionalidad para el conjunto de creencias (conjunto de un elemento). Otro detalle a considerar que difiere de lo anterior es que la fórmula que representa al conjunto de creencias puede ser inconsistente. Todo esto se puede ver como una referencia al Cuestionamiento 2. Más aún, al comparar los operadores revision y contraction con los operadores update y erase respectivamente esto aparece de forma más explícita.

Definición 2.4.2 ([23]). Dados ψ, ϕ, μ y $\nu \in \mathbb{L}$ se consideran los postulados:

- para el operador $\blacklozenge : \mathbb{L} \times \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{L}$:
 - (KM $\blacklozenge$ 2) Si $\psi \models \neg\mu$ entonces $\psi \blacklozenge \mu = \psi$ (KM-contraction weak vacuity).
 - (KM $\blacklozenge$ 3) Si $\psi \not\models \perp$ y $\psi \not\models \mu$ entonces $\psi \blacklozenge \mu \not\models \mu$ (KM-contraction weak success).
- para el operador $\diamond : \mathbb{L} \times \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{L}$:
 - (KM $\diamond$ 2) Si $\psi \models \mu$ entonces $\psi \diamond \mu = \psi$ (KM-revision weak vacuity).
 - (KM $\diamond$ 3) Si $\psi \not\models \perp$ y $\mu \not\models \perp$ entonces $\psi \diamond \mu \not\models \perp$ (KM-weak consistency).

(KM $\diamond$ 6) Si $\psi \diamond \mu \models \nu$ y $\psi \diamond \nu \models \mu$ entonces, $\psi \diamond \mu = \psi \diamond \nu$.

(KM $\diamond$ 7) Si ψ es una fórmula completa, entonces $(\psi \diamond \mu) \wedge (\psi \diamond \nu) \models \psi \diamond (\mu \vee \nu)$.

- Y para ambos operadores:

(KML1) Si $(\psi \vee \phi) \diamond \mu \equiv (\psi \diamond \mu) \vee (\phi \diamond \mu)$ (KM-local condition).

Un operador $\blacklozenge$ que satisface (KM–1), (KM $\blacklozenge$ 2), (KM $\blacklozenge$ 3), (KM–4), (KM–5) y (KML1) se conoce como *erase*. Un operador $\diamond$ que satisface (KM*1), (KM $\diamond$ 2), (KM $\diamond$ 3), (KM*4), (KM*5), (KM $\diamond$ 6), (KM $\diamond$ 7) y (KML1) lo llamaremos *update*.

Comparemos estos operadores y los operadores AGM. Dado que los trabajos de Katsuno y Mendelzon se centran en *revision* y *update*, las comparaciones las haremos en términos de estos operadores. Una manera de interpretar al operador *revision* es que representa los cambios que un agente haría para *corregir* sus creencias. Esto implícitamente significa que el entorno no cambió y que, en caso de contradicción, el conjunto de creencias original tenía una percepción errónea de su entorno. El operador *update*, en cambio, entiende que el conjunto de creencias original tenía una percepción correcta de su entorno, pero que el entorno *cambió*, entonces el conjunto de creencias no debe corregirse sino *actualizarse*. Por lo que *update* y *erase* son una propuesta al Cuestionamiento 3.

Comparemos qué sucede a nivel postulados para entender un poco mejor sus similitudes y diferencias. Si μ es aceptada en ψ ($\psi \models \mu$) y ψ es consistente, en *revision* significa que no hay nada que corregir, mientras que en *update* significa que no hay nada que actualizar. Pero esto cambia si ψ es inconsistente. En el caso de *revision* se busca corregir este tipo de situaciones de inconsistencia. En cambio en *update* no es así, ya que no se busca corregir, por lo que se interpreta de la misma manera que antes, que no hay nada que actualizar. También difiere si la observación μ es indeterminada para ψ ($\psi \wedge \mu \not\models \perp$): *revision* corrige la indeterminación para que el nuevo conjunto acepte a μ y sin perder la información ψ , pero *update* permite que otra información antes aceptada por ψ quede indeterminada, siempre que μ se mantenga aceptada. Estas diferencias son las que vemos en los postulados (KM $\diamond$ 2) y (KM $\diamond$ 3) respecto a (KM*2) y (KM*3), es decir, este modelo también propone alternativas que responden al Cuestionamiento 6.

El postulado (KML1) distingue a *update* de *revision* en términos de cómo actúa la función de selección. Por un lado tenemos que los operadores *update* son monótonos.

Teorema 2.4.3 ([23]). *Si un operador update $\diamond$ satisface (KML1) y $\psi \models \phi$ entonces $\psi \diamond \mu \models \phi \diamond \mu$ para cualquier $\mu \in \mathbb{L}$.*

La no-monotonía es una característica clave en la definición de los operadores *revision*. Más aún, el único operador *revision* monótono es el trivial.

Teorema 2.4.4 (Gärdenfors's Impossibility Theorem). *No hay operador revision no trivial que satisfaga (AGM*1)~(AGM*6) y que además sea monótona:*

$$\text{Si } K \subseteq K' \text{ entonces } K * \mu \subseteq K' * \mu.$$

En combinación con los postulados (KM $\diamond$ 6) y (KM $\diamond$ 7), el postulado (KML1) determina un comportamiento semejante al postulado (KM*6) de *revision*. Es decir, se da una posible respuesta al Cuestionamiento 7, al dar una alternativa a los postulados suplementarios. Esta distinción se aprecia más con la semántica de mundos posibles. Para ello, Katsuno y Mendelzon desarrollaron la teoría de asignaciones faithful.

Definición 2.4.5 ([24]). Dado $\mu \in \mathbb{L}$, decimos que un mundo w es minimal en $\|\mu\|$ con respecto a un preorden $\leq$ si $w \in \|\mu\|$ y $w \leq w'$ para todo $w' \in \|\mu\|$. Notamos $\min(\|\mu\|, \leq)$ al conjunto de los mundos minimales con respecto a $\leq$. Como estamos trabajando con una lógica finita, el conjunto de minimales es nulo únicamente cuando $\|\mu\| = \emptyset$.

Una asignación *faithful*² sobre fórmulas es una función $\leq_\bullet: \mathbb{L} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ tal que dado $\psi \in \mathbb{L}$:

- ($\leq_\bullet$ 1) $\leq_\psi$ es un preorden total;
- ($\leq_\bullet$ 2) Si $w, w' \in \|\psi\|$ entonces $w \leq_\psi w'$;
- ($\leq_\bullet$ 3) Si $w \in \|\psi\|$ y $w' \notin \|\psi\|$ entonces $w \leq_\psi w'$ y $w' \not\leq_\psi w$;
- ($\leq_\bullet$ 4) Si $\psi \equiv \phi$ entonces $\leq_\psi = \leq_\phi$.

Una asignación *faithful sobre mundos* es una función $\leq_\bullet: \mathcal{M}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ tal que dado $w \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$:

- ($\leq_\bullet$ 1) $\leq_w$ es un preorden;
- ($\leq_\bullet$ 2) $w \leq_\psi w'$;
- ($\leq_\bullet$ 3) Si $w \neq w'$ entonces $w' \not\leq_\psi w$.

El objetivo de los autores era el de tener herramientas para que la Teoría de Cambio de Creencias pueda interpretarse en el contexto de (pre)órdenes sobre mundos posibles. Primero lo desarrollaron para revision.

Teorema 2.4.6 ([24]). *Un operador revision $*$ satisface $(KM*1) \sim (KM*6)$ si y sólo si existe una asignación faithful sobre fórmulas, i.e. a cada ψ se le asocia un preorden total $\leq_\psi$, tal que $\|\psi * \mu\| = \min(\|\mu\|, \leq_\psi)$.*

Esta representación se vincula con los sistemas de esferas de Grove [17]. Dado un sistema de esferas S para ψ como en la Definición 2.3.4 se tiene un preorden total donde $w \leq_\psi w'$ si y sólo si $A, B \in S$, $A \subseteq B$, $w \in A$ y $w' \in B$. De la misma manera, un preorden total define un sistema de esferas tomando un conjunto de representantes del preorden $w_1, \dots, w_n$ tales que $w_i \leq_\psi w_{i+1}$, $w_{i+1} \not\leq_\psi w_i$ y para todo $w \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ existe $1 \leq i \leq n$ tal que $w_i \leq_\psi w$, $w \leq_\psi w_i$. Luego, tomando $A_i = \{w \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}} \mid w \leq w_i\}$ se tiene que $S = \{A_i\}_{i=1}^n$ es un sistema de esferas. Por la finitud de la lógica la condición Limit assumption siempre se satisface. En el mismo sentido, probaron que los operadores update pueden representarse con órdenes parciales por cada mundo posible en vez de fórmulas, gracias al postulado $(KML1)$.

Teorema 2.4.7 ([23]). *Un operador update $\diamond$ satisface $(KM*1)$, $(KM\diamond 2)$, $(KM\diamond 3)$, $(KM*4)$, $(KM*5)$, $(KM\diamond 6)$, $(KM\diamond 7)$ y $(KML1)$ si y sólo si existe una asignación faithful sobre mundos, i.e. por cada w hay un preorden $\leq_w$, tal que $\|\psi * \mu\| = \bigcup_{w \in \|\psi\|} \min(\|\mu\|, \leq_w)$ donde cada $\leq_w$ es un orden parcial.*

Estos dos teoremas muestran además cómo los operadores update se pueden interpretar como versiones locales, es decir definidos sobre fórmulas completas, de los operadores revision. Pero los órdenes parciales de update y los preórdenes totales de revision no tienen el mismo origen. Para representar update con preórdenes totales se necesita un postulado que represente el comportamiento de $(KM*6)$ a nivel local.

Teorema 2.4.8 ([23]). *Un operador update $\diamond$ satisface $(KM*1)$, $(KM\diamond 2)$, $(KM\diamond 3)$, $(KM*4)$, $(KM*5)$ y $(KML1)$. Entonces existe una asignación faithful sobre mundos, i.e. por cada w hay un preorden $\leq_w$, tal que $\|\psi * \mu\| = \bigcup_{w \in \|\psi\|} \min(\|\mu\|, \leq_w)$ donde cada $\leq_w$ es un orden parcial si y sólo si $\diamond$ satisface:*

- ($KM\diamond 8$) Si ψ es una fórmula completa y $(\psi \diamond \mu) \wedge \nu \not\models \perp$ entonces $\psi \diamond (\mu \wedge \nu) \models (\psi \diamond \mu) \wedge \nu$ (*KM-local subexpansion*).

²En [24] llaman a la asignación *persistent*, sin embargo a partir de [23] se utiliza el término faithful.

En tal caso, el operador $\diamond$ satisface los postulados $(KM\Diamond 6)$ y $(KM\Diamond 7)$.

Esta subfamilia de operadores update tiene la particularidad de que, fijado un conjunto de creencias cerrado por consecuencia lógica, puede emular el comportamiento de un operador revision.

Teorema 2.4.9 ([33]). *Sea K una teoría consistente, entonces para todo operador revision $*$ que satisface $(KM*1) \sim (KM*6)$ existe un operador $\diamond$ que satisface $(KM*1)$, $(KM\Diamond 2)$, $(KM\Diamond 3)$, $(KM*4)$, $(KM*5)$, $(KM\Diamond 8)$, $(KML1)$ y para todo $w \in \|K\|$ se tiene que $w' \leq_w \tilde{w}$ cuando $w' \in \|K\|$ y $\tilde{w} \not\leq_w w'$ si $\tilde{w} \notin \|K\|$, tal que $K * \mu = K \diamond \mu$ para cualquier $\mu \in \mathbb{L}$. Además, para todo operador update $\diamond$ que satisfaga lo anterior existe un operador revision $*$ que satisface $(KM*1) \sim (KM*6)$ tal que $K * \mu = K \diamond \mu$ para cualquier $\mu \in \mathbb{L}$.*

Los operadores update y revision (erase y contraction respectivamente) concentran dos dinámicas de cambio de creencias con unas propiedades en común y otras dispares. En los primeros, actualizar a la nueva observación se asocia con corregir mundo a mundo, es decir localmente. En los últimos se trabaja con corregir de forma global, es decir con un único conjunto de mundos. Veamos este paralelismo con un ejemplo.

Ejemplo 2.5 (Basado en un ejemplo de Katsuno y Mendelzon [23]). Clementina necesita recordar que sobre el escritorio había un libro o el catálogo de las figuras de cristal, uno de los dos. Le pide a su hija que busque el catálogo y lo deje sobre el escritorio. Podemos reescribir esta situación en términos de una lógica CPL finita de la siguiente manera:

$$p = \text{“el libro está sobre el escritorio”} \quad \text{y} \quad q = \text{“el catálogo está sobre el escritorio”}$$

Representamos con la fórmula $\psi = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ el conjunto de creencias de Clementina y con la fórmula $\mu = q$ la observación recibida. En términos de mundos posibles, utilizando nuevamente la notación en tuplas de las valuaciones, $\|\psi\| = \{(1, 0), (0, 1)\}$, mientras que $\|\mu\| = \{(1, 1), (0, 1)\}$. Si aplicáramos un operador revision, $\|\psi * \mu\| = \{(0, 1)\}$ por el postulado vacuity $(KM*2)$. Esto tiene sentido si la observación se hubiera interpretado como que efectivamente era el catálogo el que estaba sobre el escritorio. Es decir, expandimos nuestro conocimiento, en sintonía la acción de corregir de un operador revision.

Pero la interpretación es otra, ya que más allá de donde estuviera el catálogo antes, ahora sabemos que está sobre el escritorio. Antes, o bien solamente estaba el catálogo (mundo posible $(0, 1)$) o solamente el libro (mundo posible $(1, 0)$). Ahora puede que o bien esté solamente el catálogo (mundo posible $(0, 1)$) o bien estén tanto el catálogo como el libro (mundo posible $(1, 1)$). Así cobra sentido la idea de que update se interpreta como que cada mundo posible de ψ debe ser revisado por μ , y luego tomar la unión. En este caso, el mundo $(1, 0)$ fue revisado por $(1, 1)$ y el mundo $(0, 1)$ se preservó por update vacuity $(KM\Diamond 2)$. Luego $\|\psi \diamond \mu\| = \{(1, 1), (0, 1)\}$.

Según el último teorema, si se fija una teoría consistente, ambas dinámicas se pueden vincular, condicionado a que cada mundo, en el segundo nivel de su sistema de esferas asociado, coincida con el conjunto de mundos asociado a la teoría fijada. En el Capítulo 3 se dará una propuesta que interpreta a los operadores revision y update como subfamilias de una familia común de operadores de cambio.

2.5 Operadores No Priorizados

Un denominador común de las secciones anteriores es que las observaciones siempre se consideran prioritarias respecto del conjunto de creencias original. Este principio es el que se discute en el Cuestionamiento 4, que gesta la idea de operadores no priorizados, donde la observación es prioritaria bajo ciertas condiciones. En esta sección haremos una presentación breve de operadores contraction condicionados por un conjunto de retractabilidad, los

operadores shielded contraction; operadores revision condicionados por un conjunto de credibilidad, los operadores credibility-limited revision; y operadores condicionados por conjuntos para o bien aplicar un operador contraction o un operador revision, los operadores filtered revision. En caso de no cumplirse tales condiciones, no habría cambio de creencias, es decir, se preserva el conjunto de creencias original. También haremos referencia a los operadores promotion, operadores que se pueden interpretar como que devuelven conjuntos de creencias que están entre los que devuelven los operadores revision y los operadores contraction. En esta sección nos enfocaremos sobre todo en entender cómo funcionan los condicionales y cómo estos operadores se relacionan entre sí, omitiendo un análisis de las diferentes subfamilias y variaciones que se conocen en la literatura.

Para hablar de operadores shielded contraction, credibility-limited revision y filtered revision, entenderemos que el conjunto de creencias esta fijado y es consistente. Pero que además, como parte del conocimiento del agente, hay conjuntos de fórmulas “retractables” y “creíbles” que avalan si una observación permite un cambio de creencias o no.

Definición 2.5.1 ([6]). Sea un conjunto de fórmulas retractables $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{L}$ y $-$ un operador contraction que satisface **(AGM-1)**~**(AGM-6)**, se define un operador shielded contraction $\ominus$ para un conjunto de creencias K como:

$$K \ominus \mu = \begin{cases} K - \mu & \text{Si } \mu \in \mathcal{R} \\ K & \text{Caso contrario} \end{cases}$$

Para el caso de los operadores shielded contraction, el conjunto de fórmulas retractables hace referencia a las fórmulas que son admitidas a ser contraídas por el operador contraction. Si esto se aplicase a operadores revision, tenemos a los operadores credibility-limited revision.

Definición 2.5.2 ([21]). Sea un conjunto de fórmulas creíbles $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{L}$ y $*$ un operador revision que satisface **(AGM*1)**~**(AGM*6)**, se define un operador credibility-limited revision $\circ$ para un conjunto de creencias K como:

$$K \circ \mu = \begin{cases} K * \mu & \text{Si } \mu \in \mathcal{C} \\ K & \text{Caso contrario} \end{cases}$$

En un operador credibility-limited revision, el conjunto de credibilidad $\mathcal{C}$ determina qué fórmulas son válidas para revisar el conjunto de creencias por el operador revision. Tanto en shielded contraction como en credibility-limited revision, si la fórmula no es retractable o no es creíble entonces no se admite cambio en el conjunto de creencias. En este sentido, la observación es deliberadamente considerada como que nunca ha ocurrido. Cada uno de estos operadores tiene una representación vía los postulados que presentamos a continuación.

Definición 2.5.3 ([1]). Dados $K \in \mathcal{K}$ y $\mu, \nu \in \mathbb{L}$ se consideran los postulados:

- para el operador $- : \mathcal{K} \times \mathbb{L} \longrightarrow \mathcal{K}$:
 - (S $\ominus$ 4) O bien $K \ominus \mu = K$ o bien $\mu \notin K \ominus \mu$ (contraction relative success).
 - (S $\ominus$ 7) Si $K \ominus \mu \models \mu$ y $\mu \models \nu$ entonces $K \ominus \nu \models \nu$ (success propagation).
 - (S $\ominus$ 8) Si $K \ominus \mu = K \ominus \nu = K$ entonces $K \ominus (\mu \wedge \nu) = K$ (conjunctive constancy).
- para el operador $*$: $\mathcal{K} \times \mathbb{L} \longrightarrow \mathcal{K}$:
 - (CL $\circ$ 4) O bien $K \circ \mu = K$ o bien $\mu \in K \circ \mu$ (revision relative success).
 - (CL $\circ$ 6) Si $K \neq \mathbb{L}$ y $\mu \not\models \perp$ entonces $K \circ \mu \neq \mathbb{L}$ (weak consistency).
 - (CL $\circ$ 7) Si $K \not\subseteq K \circ \mu$ entonces $Cn(K \cup (K \circ \mu)) = \mathbb{L}$ (consistent expansion).

Una de las dificultades de axiomatizar estos postulados es que los conjuntos de credibilidad o de retractabilidad tienen que estar representados de forma implícita. Los postulados **(S $\ominus$ 4)** y **(CL $\circ$ 4)** son las versiones debilitadas de los postulados de éxito de los operadores AGM, que a su vez comienzan a definir a estos conjuntos. Pero estos conjuntos no pueden ser arbitrarios, sino que a su vez deben satisfacer algunas propiedades elementales para que haya una compatibilidad con los demás postulados. Por ejemplo, para el conjunto de fórmulas retractables $\mathcal{R}$ necesitaremos que satisfaga:

Conjunctive Completeness si vale que si $\mu \wedge \nu \in \mathcal{R}$ entonces $\mu \in \mathcal{R}$ o bien $\nu \in \mathcal{R}$;

Non-retractability Propagation si vale que si $\mu \notin \mathcal{R}$ entonces $Cn(\mu) \cap \mathcal{R} = \emptyset$.

Mientras que para el conjunto de fórmulas creíbles $\mathcal{C}$ alcanza con que sea cerrado por equivalencia lógica, es decir, si $\mu \in \mathcal{C}$ y $\mu \equiv \nu$ entonces $\nu \in \mathcal{C}$.

Teorema 2.5.4 ([6]). *Sea K una teoría consistente, $\ominus$ y $\circ$ operadores definidos sobre K .*

1. $\ominus$ es un operador shielded contraction según la Definición 2.5.1, donde $\mathcal{R}$ es conjunctive completeness y non-retractability propagation, si y sólo si $\ominus$ satisface **(AGM-1)**, **(AGM-2)**, **(AGM-3)**, **(S $\ominus$ 4)**, **(AGM-5)**, **(AGM-6)**, **(S $\ominus$ 7)** y **(S $\ominus$ 8)**. En tal caso, también se puede pedir que $\mathbb{L} \setminus K \subseteq \mathcal{R}$.
2. $\circ$ es un operador credibility-limited revision según la Definición 2.5.2, donde $\mathcal{C}$ es cerrado por equivalencia lógica si y sólo si $\circ$ satisface **(AGM*1)**, **(AGM*2)**, **(CL $\circ$ 4)**, **(AGM*5)**, **(CL $\circ$ 6)** y **(CL $\circ$ 7)**. En tal caso, también se puede pedir que $K \subseteq \mathcal{C}$.

Trabajar con conjuntos retractables y de credibilidad da una nueva dimensión sobre la cual ahondar en términos tanto de propiedades de estos conjuntos como de postulados asociados. Esto lleva a tener una diversidad de subfamilias que no presentaremos en esta sección ya que, luego de unificar ciertos criterios, las retomaremos en los Capítulos 4 y 5. Sí cabe destacar que tanto los operadores shielded contraction como credibility-limited revision pueden ser extendidos a bases y que existen versiones donde los operadores contraction y revision asociados satisfacen los postulados suplementarios. Nuevamente, esto implica que los conjuntos $\mathcal{R}$ y $\mathcal{C}$ necesitan satisfacer más propiedades. Es decir, también propone alternativas a los Cuestionamientos 1 y 7.

Algo en lo que sí nos detendremos es en su relación de dualidad en términos de Identidades de Levi y Harper, o el Cuestionamiento 8.

Definición 2.5.5. Sean $\ominus$ un operador shielded contraction según la Definición 2.5.1 y $\circ$ un operador credibility-limited revision según la Definición 2.5.2. Definimos la construcción de un operador credibility-limited revision $\circ_{\ominus}$ vía identidad de Levi consistente como:

$$K \circ_{\ominus} \mu = \begin{cases} (K \ominus \neg \mu) + \mu & \text{Si } (K \ominus \neg \mu) + \mu \neq \mathbb{L} \\ K & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Definimos la construcción de un operador shielded contraction $\ominus_{\circ}$ vía identidad de Harper como:

$$K \ominus_{\circ} \mu = (K \circ \neg \mu) \cap K$$

De la construcción de $\circ_{\ominus}$ vía identidad de Levi consistente podemos ver que si $\neg \mu \in \mathcal{R}$, siendo $\mathcal{R}$ el conjunto de retractables de $\ominus$, entonces $(K \ominus \neg \mu) + \mu \neq \mathbb{L}$, a menos que $\neg \mu$ sea una tautología. De la misma manera, podemos ver para $\ominus_{\circ}$ que si $\neg \mu \in \mathcal{C}$ y $\neg \mu$ no es una tautología, entonces necesariamente $\mu \in \mathcal{R}$, el conjunto de retractables de $\ominus_{\circ}$.

A partir de estas definiciones es posible probar que los operadores son interdefinibles.

Teorema 2.5.6. *Sean $\ominus$ un operador shielded contraction según la Definición 2.5.1 y $\circ_{\ominus}$ el operador credibility-limited revision construido vía identidad de Levi consistente. Entonces*

$\circ_{\ominus}$ satisface **(AGM*1)**, **(AGM*2)**, **(CL $\circ$ 4)**, **(AGM*5)**, **(CL $\circ$ 6)** y **(CL $\circ$ 7)**. Más aún, el operador $\ominus_{\circ_{\ominus}}$ construido vía identidad de Harper coincide con $\ominus$.

Sean $\circ$ un operador credibility-limited revision según la Definición 2.5.2 y $\ominus_{\circ}$ el operador shielded contraction construido vía identidad de Harper. Entonces $\ominus_{\circ}$ satisface **(AGM-1)**, **(AGM-2)**, **(AGM-3)**, **(S $\ominus$ 4)**, **(AGM-5)**, **(AGM-6)**, **(S $\ominus$ 7)** y **(S $\ominus$ 8)**. Más aún, el operador $\circ_{\ominus_{\circ}}$ construido vía identidad de Levi consistente coincide con $\circ$.

Como se puede apreciar, para que los operadores credibility-limited revision se puedan definir en términos de operadores shielded contraction se debe hacer una adaptación de la Identidad de Levi, pero esto no es necesario para la Identidad de Harper. Esta disparidad será un tema de análisis en el Capítulo 5.

Los operadores filtered revision se pueden entender como una generalización tanto de los operadores shielded contraction como de los operadores credibility-limited revision.

Definición 2.5.7 ([2], [12]). Sean un conjunto de fórmulas permitidas $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{L}$, un conjunto de fórmulas creíbles $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{L}$ tal que $\mathcal{A} \cap \mathcal{C} = \emptyset$ y $*$ un operador revision que satisface **(AGM*1)**~**(AGM*6)**, se define un operador filtered revision o two-level credibility-limited revision $\odot$ para un conjunto de creencias K como:

$$K \odot \mu = \begin{cases} K * \mu & \text{Si } \mu \in \mathcal{C} \\ (K * \mu) \cap K & \text{Si } \mu \in \mathcal{A} \\ K & \text{Caso contrario} \end{cases}$$

Notar que mediante la Identidad de Harper es posible reescribir $(K * \mu) \cap K$ como $K - \neg\mu$ siendo $-$ el operador contraction asociado al operador revision $*$ por Identidad de Harper. Es decir que si $\mathcal{C} = \emptyset$ tenemos un operador shielded contraction donde $\mu \in \mathcal{R}$ equivale a que $\neg\mu \in \mathcal{A}$. De la misma manera, si $\mathcal{A} = \emptyset$ tendremos un operador credibility-limited revision.

Algo que refuerza este operador es la idea de interpretar a los operadores contraction desde la perspectiva de la Identidad de Harper. Dado un conjunto de creencias que rechaza la observación recibida, aplicar un operador contraction a la negación de la observación es quedarse con una versión más débil del conjunto de creencias original, de forma tal que la observación ahora sea indeterminada. Por otro lado, aplicar un operador revision es utilizar esa versión más débil para expandirla por la observación, de forma tal que ésta ahora resulte aceptada y se preserve la consistencia. Podemos decir que en ambos casos la observación es creíble, pero en una sólo modificamos el conjunto de creencias para no contradecirla, mientras que en el otro caso la consideramos como parte del conjunto de creencias. Por supuesto que esta interpretación no genera ningún cambio metodológico mientras estemos enmarcados en la lógica CPL y donde lo que se use en el segundo parámetro sea una fórmula. Pero la noción de negación es un concepto muy discutido tanto en las lógicas no clásicas como también al referirnos a la negación de un conjunto de fórmulas en CPL.

Por último, tenemos a los operadores promotion, presentado por Schwind et al. en [36]. A diferencia de los demás operadores, éste está definido en el contexto de Katsuno y Mendelzon y no utiliza conjuntos que determinan si una fórmula es considerada creíble o retractable. De hecho, siempre admite a la nueva observación, pero en el sentido que se habla en filtered revision: busca quedarse con un conjunto de creencias de forma tal que una versión más débil de la observación termine siendo aceptada, mientras que la otra parte sea indeterminada.

Definición 2.5.8 ([36]). Dados ψ , ϕ , μ y $\nu \in \mathbb{L}$ se consideran los siguientes postulados para el operador $\ominus : \mathbb{L} \times \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$:

(P $\ominus$ 1) $\psi \ominus \mu \models \psi \vee \mu$.

(P $\ominus$ 3) Si $\mu \not\models \perp$ entonces $(\psi \ominus \mu) \wedge \mu \not\models \perp$.

(P $\ominus$ 5) Si $(\psi \ominus \mu) \wedge \mu \wedge \nu \not\models \perp$ entonces $(\psi \ominus (\mu \wedge \nu)) \wedge \mu \equiv (\psi \ominus \mu) \wedge \mu \wedge \nu$.

(**P $\ominus$ 6**) Si $(\psi \ominus \mu) \wedge \psi \wedge \phi \not\models \perp$ entonces $((\psi \wedge \phi) \ominus \mu) \wedge \psi \equiv (\psi \ominus \mu) \wedge \psi \wedge \phi$.

(**P $\ominus$ 7**) Si $((\psi \wedge \phi) \ominus \mu) \wedge \psi \not\models \perp$ entonces $(\psi \ominus \mu) \wedge \psi \not\models \perp$.

Un operador $\ominus$ que satisface (**P $\ominus$ 1**), (**KM*2**), (**P $\ominus$ 3**), (**KM*4**), (**P $\ominus$ 5**), (**P $\ominus$ 6**) y (**P $\ominus$ 7**) se conoce como *promotion*.

Los postulados de promotion parecen diferir bastante de otros que hemos visto. Pero por ejemplo, notar que muchos operadores de tipo revision, incluyendo los no priorizados, satisfacen (**P $\ominus$ 1**). Lo otro que se puede ver es que los demás postulados proponen dividir al operador en dos partes: $(\psi \ominus \mu) \wedge \mu$ y $(\psi \ominus \mu) \wedge \psi$. De esta manera los postulados (**P $\ominus$ 3**) y (**P $\ominus$ 7**) hacen referencia a la consistencia de cada una de estas partes y los postulados (**P $\ominus$ 5**) y (**P $\ominus$ 6**) son adaptaciones del postulado (**AGM*S2**) para cada parte.

Para la construcción de estos operadores necesitamos definir a las funciones trigger.

Definición 2.5.9 ([36]). Llamamos $\sigma : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{L}$ función trigger tal que para toda formula μ, μ' :

1. $\mu \models \sigma(\mu)$.
2. Si $\mu \equiv \mu'$ entonces $\sigma(\mu) \equiv \sigma(\mu')$.

En el trabajo original se afirma que la función σ se usa para indicar qué conjunto de creencias se preserva respecto a μ . En el Capítulo 5 hablaremos de cuestionabilidad, haciendo foco en que si bien preservamos parte del conjunto de creencias original ψ , lo hacemos para cuestionar ciertas afirmaciones de μ , de forma tal que éstas pasen a ser indeterminadas para el nuevo conjunto de creencias. Esta idea de que ciertas partes de μ queden indeterminadas es a lo que nos referimos cuando decimos que el operador promotion está entre operadores revision y contraction:

$$\psi * \mu \models \psi \ominus \mu \models \psi - \neg \mu$$

La funcionalidad de las funciones trigger a la que nos referimos queda explicitada en el teorema de representación de estos operadores.

Teorema 2.5.10 ([36]). *Un operador promotion $\ominus$ satisface (**P $\ominus$ 1**), (**KM*2**), (**P $\ominus$ 3**), (**KM*4**), (**P $\ominus$ 5**), (**P $\ominus$ 6**) y (**P $\ominus$ 7**) si y sólo si existen dos operadores revision $*_1$ y $*_2$ que satisfacen (**KM*1**)~(**KM*6**) y una función trigger σ tal que para todo $\psi, \mu \in \mathbb{L}$:*

$$\psi \ominus \mu \equiv (\psi *_1 \mu) \vee (\mu *_2 (\psi \wedge \sigma(\mu)))$$

La construcción de los operadores promotion requieren entonces de dos operadores revision que validen los postulados suplementarios y una función trigger. Algo distintivo de esta propuesta es que el segundo operador revision enroca los roles entre creencias y observación. Por eso es clave utilizar un mismo tipo de representación tanto para las creencias como para la observación. Más allá de los resultados metodológicos, es interesante dar una interpretación de lo que significa este intercambio de roles, cuestión que analizaremos con detenimiento en el Capítulo 5.

Es posible hacer una comparación entre operadores promotion y filtered revision. Fijando una fórmula ψ para hacer tal comparación, podemos ver que existe una subfamilia de operadores promotion que son a su vez una subfamilia de operadores filtered revision. Para ello, tiene que valer que $\mathcal{A} \cup \mathcal{C} = \mathbb{L}$ y que $\{\mu \in \mathbb{L} \mid \psi \wedge \mu \not\models \perp\} \subseteq \mathcal{C}$. Del lado de los operadores promotion, tenemos que pedir que:

$$\sigma(\mu) = \begin{cases} \mu \vee \neg \mu & \text{Si } \mu \in \mathcal{A} \\ \mu & \text{caso contrario} \end{cases} \quad \mu *_2 \psi = \begin{cases} \psi \wedge \mu & \text{Si } \psi \wedge \mu \not\models \perp \\ \psi & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Bajo esta definición podemos ver cómo la función trigger es la que emula el comportamiento de un conjunto de credibilidad. También vemos cómo es posible que un operador promotion pueda comportarse como un operador revision o bien como un operador contraction.

El comportamiento de estos operadores pueden compararse entre sí y con los operadores clásicos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.6. Luego de ganar la lotería, Clementina recibe una llamada de su ex-pareja para jurarle que le ama y que siempre se arrepintió de terminar con ella hace un mes, cuando le dijo que no le amaba. ¿Qué opciones tiene?

Para responder esta pregunta, consideramos una lógica CPL finita con las variables:

$$p = \text{“La ex-pareja se arrepiente de terminar con ella”} \quad \text{y} \quad q = \text{“La ex-pareja le ama”}$$

Representamos con la fórmula $\psi = \neg q$ el conjunto de creencias de Clementina y con la fórmula $\mu = p \wedge q$ la observación recibida. Del conjunto de creencias de Clementine se deduce que su ex no le ama, pero es indeterminado si su ex se arrepiente de terminar la relación o no. Ante esta nueva información, Clementina tiene diferentes opciones:

Opción I: Clementina no cambia el conjunto de creencias que afirma que su ex-pareja no le ama. Prefiere hacer como que esa llamada nunca existió.

El conjunto de creencias sigue siendo el mismo de antes. Estaríamos en el caso en que μ es no creíble o bien $\neg\mu$ es no retractable:

$$Cn(\psi) \odot \mu = Cn(\psi) \circ \mu = Cn(\psi) \ominus \neg\mu = Cn(\psi)$$

Opción II: Clementina decide adoptar la nueva información: ahora cree que su ex le ama y que se arrepiente de terminar la relación. Es decir, consideró que μ era creíble y aplicó un operador revision. Se interpreta entonces que aplicó un operador filtered revision o bien credibility-limited revision. Debido a que μ es completa, la única manera de revisar es tomando $Cn(\mu)$ como el nuevo conjunto de creencias.

$$Cn(\psi) \odot \mu = Cn(\psi) \circ \mu = Cn(\psi) * \mu = Cn(\mu)$$

También puede interpretarse que se aplicó el operador promotion con $\psi \wedge \sigma(\mu) \equiv \perp$:

$$\psi \ominus \mu \equiv (\psi * \mu) \vee (\mu *' \perp) \equiv (\psi * \mu) \vee \perp \equiv \mu$$

Opción III: Clementina cambia sus creencias dándole lugar a la duda, no abandona todo lo que cree pero no quiere contradecir a su ex. Interpretamos entonces que en este caso $\neg\mu$ es retractable. Vía la Identidad de Harper, sabemos que inevitablemente existe una única solución para el operador contraction, $Cn(\psi) \cap Cn(\mu) = Cn(q \Rightarrow p)$. En este contexto, se pudo haber aplicado filtered revision o shielded contraction:

$$Cn(\psi) \odot \mu = Cn(\psi) \ominus \neg\mu = Cn(\psi) - \neg\mu = Cn(q \Rightarrow p)$$

Nuevamente, promotion aquí también es factible, suponiendo que $\psi \models \sigma(\mu)$ y que $(\mu *' (\psi \wedge \sigma(\mu))) \equiv \mu *' \psi \equiv \psi$:

$$\psi \ominus \mu \equiv (\psi * \mu) \vee \mu \equiv (\psi * \mu) \vee \psi \equiv \psi - \neg\mu$$

Clementina parece confundida con las idas y vueltas de su ex. Sólo puede entender que si su ex le ama, entonces se arrepiente de terminar con ella.

Opción IV: Clementina cambia su conjunto de creencias, adoptando algunas afirmaciones de la nueva información pero dudando de otras, teniendo una posición intermedia entre los casos II y III. En concreto, acepta que su ex se arrepiente de terminar la relación, pero duda que realmente le ame. El único operador capaz de modelar este caso es promotion, donde sabemos que $\psi * \mu \equiv \mu$ pero toma $\sigma(\mu) = p$. Luego:

$$\psi \ominus \mu \equiv (\psi * \mu) \vee (\mu *' (\psi \wedge \sigma(\mu))) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \equiv p$$

Podemos ver que los operadores clásicos sólo pueden modelar una de las tres primeras alternativas de Clementine. Shielded contraction y credibility-limited revision capturan dos de las tres primeras situaciones, mientras que filtered revision captura las tres primeras. La única capaz de modelar la última es promotion, pero no puede representar la Opción I.

Todas estas relaciones y comparaciones nos dan una intuición de que es posible construir una familia de operadores donde todos estas propuestas se vean como subfamilias. Esa intuición quedará formalizada en el Capítulo 6.

2.6 Operadores de Cambio Múltiple

Una de las principales limitaciones de todos los operadores vistos hasta el momento es que la observación está limitada a ser representada por una única fórmula. Para los casos en donde múltiples observaciones son percibidas al mismo tiempo, o equivalentemente, la observación puede describirse mediante múltiples fórmulas, se presentaron los modelos de cambio múltiple, considerando otro aspecto del Cuestionamiento 3. En los casos de múltiples observaciones percibidas en diferentes tiempos, se preserva la idea de que las observaciones se representan con una única fórmula, por lo que no son considerados múltiple sino que se los conoce como modelos iterativos. Estos modelos quedarán para un análisis futuro una vez desarrollados los objetivos de esta tesis.

Al extender los operadores AGM a este caso, el caso sencillo es el de expansion.

Definición 2.6.1. Llamamos *multiple expansion* al operador $+ : \mathcal{K} \times \mathbb{L} \longrightarrow \mathcal{K}$ tal que:

$$K + M = Cn(K \cup M)$$

En [11], los autores Fuhrmann y Hansson presentan dos extensiones de operadores contraction del modelo AGM al caso múltiple. Cuando se contrae un conjunto de creencias K por un conjunto de fórmulas M , puede que el objetivo sea que al menos un elemento de M quede indeterminado en el nuevo conjunto de creencias o bien que todos los elementos de M queden indeterminados. Es por eso que separaron los casos en *choice* y *package* respectivamente³. En ambos, cuando M tiene un único elemento, se reduce al caso clásico.

Definición 2.6.2 ([11]). Dados $K \in \mathcal{K}$ y $M, N \subseteq \mathbb{L}$ se consideran los postulados:

- para el operador de contraction $- : \mathcal{K} \times \mathcal{P}(\mathbb{L}) \longrightarrow \mathcal{K}$:
 - (M-1) $K - M = Cn(K - M)$ (multiple contraction closure).
 - (M-2) $K - M \subseteq K$ (multiple contraction inclusion).
 - (M-3) $K \subseteq (K - M) + M$ si M es finito (multiple contraction finite recovery).
 - (M-4) $K \subseteq (K - M) + M$ (multiple contraction recovery).
- para el operador de contraction $-_p : \mathcal{K} \times \mathcal{P}(\mathbb{L}) \longrightarrow \mathcal{K}$:
 - (PM-5) Si $M \cap K = \emptyset$ entonces $K -_p M = K$ (package contraction vacuity).
 - (PM-6) Si $M \cap Cn(\emptyset) = \emptyset$ entonces $M \cap (K -_p M) = \emptyset$ (package contraction success).
 - (PM-7) Si para todo $X \subseteq K$ vale que $M \cap Cn(X) = \emptyset$ si y sólo si $N \cap Cn(X) = \emptyset$ entonces $K -_p M = K -_p N$ (package uniformity).
 - (PM-8) Si $\alpha \in K$ y $\alpha \notin K -_p M$ entonces existe $X \subseteq \mathbb{L}$ tal que $K -_p M \subseteq X \subseteq K$, $M \cap Cn(X) = \emptyset$ y $M \cap (X + \alpha) \neq \emptyset$ (package relevance).
- para el operador de contraction $-_c : \mathcal{K} \times \mathcal{P}(\mathbb{L}) \longrightarrow \mathcal{K}$:
 - (CM-5) Si $K \not\subseteq M$ entonces $K -_c M = K$ (choice contraction vacuity).
 - (CM-6) Si $M \not\subseteq Cn(\emptyset)$ entonces $M \not\subseteq K -_c M$ (choice contraction success).
 - (CM-7) Si $Cn(M) = Cn(N)$ entonces $K -_c M = K -_c N$ (choice extensionality).
 - (CM-8) Si $\alpha \in K$ y $\alpha \notin K -_c M$ entonces existe $X \subseteq \mathbb{L}$ tal que $K -_c M \subseteq X \subseteq K$, $M \not\subseteq Cn(X)$ y $M \subseteq X + \alpha$ (choice relevance).

³Los autores extendieron la relación $\models$ para conjuntos según cada caso. Nosotros usaremos $\models$ siempre de forma clásica, i.e., en el lado derecho solamente se permiten fórmulas de $\mathcal{L}$. Por eso reescribimos las definiciones en términos de Cn .

Un operador $-_p$, que satisface **(M-2)** y **(PM-6)~(PM-8)**, se conoce como *package (multiple) contraction*. Un operador $-_c$, que satisface **(M-2)** y **(CM-6)~(CM-8)**, lo llamaremos *choice (multiple) contraction*.

Los postulados relevance (relevancia) **(PM-8)** y **(CM-8)** son generalizaciones del postulado homónimo propuesto en el trabajo de Hansson [19], donde desarrolla la generalización de AGM para el caso de trabajar con bases de creencias. En él, prueba que relevance implica vacuity **(AGM-3)** y que, junto con inclusion **(AGM-2)**, deduce closure **(AGM-1)**. Además demuestra que, cuando se satisfacen los demás postulados, es equivalente a recovery **(AGM-6)** cuando el conjunto de creencias es una teoría.

Al buscar estas relaciones en el caso múltiple, los autores de [11] logran ver que los operadores package contraction y choice contraction satisfacen sus respectivas versiones de vacuity y clausure. En lo que respecta a recovery, prueban que las versiones de relevance implican finite recovery (recuperación finita) **(M-3)** pero no **(M-4)**. Por otro lado, en el caso de package, los postulados **(M-1)~(M-3)** y **(PM-5)~(PM-7)** no alcanzan para probar **(PM-8)**. En choice contraction los postulados **(M-1)~(M-3)** y **(CM-5)~(CM-7)** deducen **(CM-8)** solamente cuando el conjunto de fórmulas M es finito. A partir de estas observaciones, se compara en qué situaciones el caso finito se puede *reducir* al caso clásica, es decir, usando una única fórmula.

Las diferencias y similitudes entre operadores pueden verse también al identificar sus construcciones vía remainders.

Definición 2.6.3 ([11]). Se define *package remainder* a la función $\perp_p : \mathcal{K} \times \mathcal{P}(\mathbb{L}) \rightarrow \mathcal{K}$ tal que para todo $X \in \mathcal{K} \perp_p M$:

- (P $\perp$ 1)** $X \subseteq K$;
- (P $\perp$ 2)** $M \cap Cn(X) = \emptyset$;
- (P $\perp$ 3)** Si $X \subsetneq X' \subseteq K$ entonces $M \cap Cn(X') \neq \emptyset$.

Se define *choice remainder* a la función $\perp_c : \mathcal{K} \times \mathcal{P}(\mathbb{L}) \rightarrow \mathcal{K}$ tal que para todo $X \in \mathcal{K} \perp_c M$:

- (C $\perp$ 1)** $X \subseteq K$;
- (C $\perp$ 2)** $M \not\subseteq Cn(X)$;
- (C $\perp$ 3)** Si $X \subsetneq X' \subseteq K$ entonces $M \subseteq Cn(X')$.

La Definición 2.6.3 en ambos casos preserva la estructura de la Definición 2.2.1, donde el concepto de remainders hace referencia a subconjuntos de K maximales respecto a una propiedad que niega la noción de deducción de cada caso: en package $M \cap Cn(X) = \emptyset$ significa que los remainders no deducen ningún elemento de M , mientras que en choice tenemos que $M \not\subseteq Cn(X)$, es decir, hay al menos un elemento de M que no se deduce de X . Nuevamente, el hecho de que las propiedades estén condicionadas por el operador Cn y la maximalidad en ambos casos nos permite afirmar que los remainders son elementos de $\mathcal{K}$. Para completar la construcción y enunciar los teoremas de representación de los operadores utilizaremos la función de selección de la Definición 2.2.2.

Teorema 2.6.4 ([11] Representación de Operadores Multiple Contraction). Sean $-_p : \mathcal{K} \times \mathcal{P}(\mathbb{L}) \rightarrow \mathcal{K}$ y $-_c : \mathcal{K} \times \mathcal{P}(\mathbb{L}) \rightarrow \mathcal{K}$ operadores de cambio múltiple.

1. $-_p$ satisface **(M-2)** y **(PM-6)~(PM-8)** si y sólo si existe una función de selección γ tal que $K -_p M = \bigcap \gamma(K \perp_p M)$ para todo $K \in \mathcal{K}$ y $M \subseteq \mathbb{L}$;
2. $-_c$ satisface **(M-2)** y **(CM-6)~(CM-8)** si y sólo si existe una función de selección γ tal que $K -_c M = \bigcap \gamma(K \perp_c M)$ para todo $K \in \mathcal{K}$ y $M \subseteq \mathbb{L}$.

En el desarrollo de estos operadores, algunos autores decidieron poner el foco en el caso de que M sea finito. Esta decisión fue tomada a partir de que no parece ser computablemente manejable tratar con un conjunto infinito de observaciones. Debido a que los operadores choice contraction pueden reducirse al caso clásico cuando M es finito, pues $K -_c M = K - \bigwedge M$, la investigación de operadores multiple contraction se centró en los operadores package contraction. Sin embargo, con el objetivo de generalizar la teoría AGM para cualquier lógica tarskiana y proponer un marco en donde desarrollar el Cuestionamiento 6, Flouris et al. [8] consideraron una variante de choice contraction donde se satisface multiple contraction recovery. En el Capítulo 7 retomaremos estos operadores y veremos cómo se relacionan con los operadores package contraction.

Definición 2.6.5 ([8]). Un operador $-_c$ lo llamaremos *tarskian choice (multiple) contraction* si satisface (M-1), (M-2), (M-4) y (CM-5)~(CM-7).

En la búsqueda de replicar la teoría AGM para el caso múltiple, también existen propuestas para operadores revision. Las primeras aparecen en la tesis de Fuhrmann [9], y plantea un paralelismo con los operadores package y choice contraction: dado un conjunto de observaciones M , un operador package revision modifica el conjunto de creencias de forma que todas las fórmulas M puedan deducirse, mientras que un operador choice revision lo modifica de forma tal que al menos una fórmula de M pueda deducirse. En estos años surgieron diferentes complicaciones y propuestas a partir de la de Fuhrmann, que tienen que ver con algunos de los cuestionamientos que aparecieron al final de la Sección 2.1.

Una de las ideas de Fuhrmann al definir los operadores package y choice revision era confirmar la validez de las Identidades de Levi y Harper, es decir, dar una respuesta al Cuestionamiento 8. Esta pregunta aún se mantiene abierta, pero tanto Fuhrmann [9] como Hansson [20] plantearon una negación que hace posible definir package revision vía Identidad de Levi, utilizando package contraction.

Definición 2.6.6 ([9], [20]). Dado $M \subseteq \mathbb{L}$, llamaremos:

negación sentencial de M al conjunto $\neg_s M = \neg(\bigwedge F)$ si M es finito;

negación distributiva de M al conjunto $\neg_d M = \{\neg\mu \mid \mu \in M\}$ si $M \neq \emptyset$;

negación cerrada de M al conjunto $\neg_c M = \{\neg_s F \mid F \subseteq M, F \text{ finito}\}$.

Pero esto no alcanza para definir, por ejemplo, choice revision: no es posible aplicar la Identidad de Levi con choice contraction, pues $(K -_c \neg_d M) + M$ en general será inconsistente. A partir de la intuición de cómo deberían actuar tanto choice contraction y choice revision, Fuhrmann consideró que se debe seleccionar un subconjunto de M compatible con el resultado de $K -_c \neg_d M$ al momento de expandir, es decir:

$$K *_c M = (K -_c \neg_d M) + (M \cap \{\mu \mid \neg\mu \notin K -_c \neg_d M\})$$

A pesar de ser su propuesta, Fuhrmann [9] afirma que no queda muy claro en qué contexto se podría aplicar un operador choice revision. Sin embargo, los trabajos de Zhang [42] y Resina [34] plantean diferentes maneras de construir este operador.

Otra alternativa es plantear una construcción evitando dar una noción de negación de conjuntos, tal y como ocurre en [10] con los conjuntos package openings.

Definición 2.6.7 ([10]). Se define *package opening* a la función $\downarrow_p: \mathcal{K} \times \mathcal{P}(\mathbb{L}) \rightarrow \mathcal{K}$ tal que para todo $X \in \mathcal{K} \downarrow_p N$:

(P $\downarrow$ 1) $X \subseteq K$

(P $\downarrow$ 2) $X \cup N \not\models \perp$

(P $\downarrow$ 3) Si $X \subsetneq X' \subseteq K$ entonces $X' \cup N \models \perp$.

También existe una presentación por postulados dada por Fuhrmann [9] y generalizada a bases por Hansson [20]. Fuhrmann unifica estas ideas en [10], aunque nosotros nos enfocaremos en el caso de trabajar con teorías. En ese sentido, Lindström [28] desarrolla las ideas de Fuhrmann para lógicas más allá de CPL, y Peppas [32] analiza una generalización de las esferas de Grove, dando ambos respuestas al Cuestionamiento 7. Los postulados planteados por Peppas resultan a su vez ser equivalentes a los de Zhang y Foo en [41].

Definición 2.6.8 ([10], [32], [41]). Dados $K \in \mathcal{K}$ y $M, N \subseteq \mathbb{L}$ se consideran los postulados para el operador de package revision $*_p : \mathcal{K} \times \mathcal{P}(\mathbb{L}) \rightarrow \mathcal{K}$:

- (PM*1) $K *_p M = Cn(K *_p M)$ (closure).
- (PM*2) $K *_p M \subseteq K + M$ (package revision inclusion).
- (PM*3) Si $K *_p M = \mathbb{L}$ entonces $Cn(M) = \mathbb{L}$ (consistency).
- (PM*4) $M \subseteq K *_p M$ (package revision success).
- (PM*5) Si para todo $X \subseteq K$ vale que $X + M = \mathbb{L}$ si y sólo si $X + N = \mathbb{L}$ entonces $K -_p M = K -_p N$ (package uniformity).
- (PM*6) Si $\alpha \in K$ y $\alpha \notin K *_p M$ entonces existe $X \subseteq \mathbb{L}$ tal que $(K *_p M) \cap K \subseteq X \subseteq K$, $X + M \neq \mathbb{L}$ y $X + M + \alpha = \mathbb{L}$ (package relevance).
- (PM*7) Si $K + M \neq \mathbb{L}$ entonces $K *_p M = K + M$ (package revision vacuity).
- (PM*8) Si $Cn(M) = Cn(N)$ entonces $K *_p M = K *_p N$ (extensionality).
- (PM*9) $K *_p (M \cup N) \subseteq (K *_p M) + N$ (package superexpansion).
- (PM*10) Si $(K *_p M) + N \neq \mathbb{L}$ entonces $(K *_p M) + N \subseteq K *_p (M \cup N)$ (package subexpansion).

Un operador $*_p$ que satisface (PM*1)~(PM*6) se conoce como *Fuhrmann's package (multiple) revision*. Un operador $*_p$ se conoce como *Zhang's package (multiple) revision*⁴ si satisface (PM*1)~(PM*4) y (PM*7)~(PM*8). Si además satisface (PM*9) y (PM*10), lo llamaremos *Peppas' package (multiple) revision*⁵.

Estos postulados son una adaptación directa de los que vimos en la Sección 2.1, considerando que el objetivo sea que el nuevo conjunto de creencias deduzca todas las fórmulas de la observación. Fuhrmann demuestra que las tres presentaciones, vía negaciones, opening sets y postulados, son equivalentes.

Teorema 2.6.9 ([10] Representación de Operadores Package Revision). *Sea un operador de cambio múltiple $*_p : \mathcal{K} \times \mathcal{P}(\mathbb{L}) \rightarrow \mathcal{K}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes para todo $K \in \mathcal{K}$ y $M \subseteq \mathbb{L}$:*

1. $*_p$ satisface (PM*1)~(PM*6);
2. existe una función de selección γ tal que $K *_p M = \bigcap \gamma(K \perp_p \neg_c M) + M$;
3. existe una función de selección γ tal que $K *_p M = \bigcap \gamma(K \downarrow_p M) + M$.

En este contexto, los postulados vacuity (PM*7) y extensionality (PM*8) se pueden deducir de los demás postulados.

Paralelamente, Peppas prueba un teorema de representación donde los operadores package revision pueden entenderse en el contexto de esferas de Grove. Pero para ello, requiere de más propiedades para el sistema de esferas y su función asociada.

⁴La nomenclatura usada para estos operadores es *general revision* en [40] y *set revision* en [41].

⁵La nomenclatura usada en [32] para los operadores es *multiple revision*.

Definición 2.6.10 ([32]). Dado $K \in \mathcal{K}$, sea S un sistema de esferas según la Definición 2.3.4. Se consideran las siguientes propiedades:

4. Si $M \subseteq \mathbb{L}$ y $\|M\| \neq \emptyset$, entonces existe $A_M \in S$ tal que $A_M = \bigcap \{B \in S \mid \|M\| \cap B \neq \emptyset\}$;
5. Si $M \subseteq \mathbb{L}$ y $\|M\| \neq \emptyset$, entonces $\|\mathcal{T}(\|M\| \cap A_M)\| = \|M\| \cap A_M$.

Si S satisface estas condiciones, decimos que S es bien rankeado.

Estas condiciones surgen de considerar conjuntos M arbitrariamente grandes y son necesarias y suficientes para tener una representación que generaliza al de Grove.

Teorema 2.6.11 ([32]). Sea K una teoría y $*$ un operador de cambio. Entonces, se tiene que $*$ satisface $(PM*1) \sim (PM*4)$ y $(PM*7) \sim (PM*10)$ si y sólo si existe un sistema de esferas S centrado en K bien rankeado tal que $K *_p M = \mathcal{T}(f_S(M))$.

Buscando otro enfoque para trabajar con conjuntos de fórmulas y tener Identidades de Levi y Harper, Zhang [40] y luego Zhang y Foo [41] desarrollaron el operador set contraction como un posible dual para package revision. La ventaja de este operador es que no requiere una noción de negación para las Identidades Levi y Harper. Los operadores set contraction están basados en una idea que ya apareció en la Sección 2.5 sobre operadores no-priorizados: quedarse con una versión más débil del conjunto de creencias original, de forma tal que sea consistente con la observación, en vez de su negación.

Definición 2.6.12 ([40], [41]). Dados $K \in \mathcal{K}$ y $M, N \subseteq \mathbb{L}$ se consideran los postulados para el operador contraction $-_s : \mathcal{K} \times \mathcal{P}(\mathbb{L}) \rightarrow \mathcal{K}$:

- (SM-3) Si $K + M \neq \mathbb{L}$ entonces $K -_s M = K$ (set contraction vacuity).
- (SM-4) Si $Cn(M) \neq \mathbb{L}$ entonces $(K -_s M) + M \neq \mathbb{L}$ (set contraction success).
- (SM-5) $((K -_s M) + M) \cap K \subseteq K -_s M$ (set contraction saturation).
- (SM-6) Si $M + \psi = \mathbb{L}$ si y sólo si $N + \psi = \mathbb{L}$ para todo $\psi \in K$ entonces $K -_s M = K -_s N$ (set contraction uniformity).
- (SM-7) $K -_s N \subseteq (K -_s M) + N$ si $M \subseteq N$ (set contraction disjunctive overlap).
- (SM-8) Si $M \subseteq N$ y $(K -_s M) + N \neq \mathbb{L}$ entonces $K -_s M \subseteq K - N$ (set contraction disjunctive inclusion).

Un operador $-_s$ lo llamaremos *basic set (multiple) contraction* si satisface (M-1), (M-2) y (SM-3)~(SM-6). Si además satisface los postulados (SM-7) y (SM-8) se lo conoce como *set (multiple) contraction*.

De esta manera, Zhang demostró las siguientes Identidades de Levi y Harper.

Teorema 2.6.13 ([41]). Sean $-_s, *_p : \mathcal{K} \times \mathcal{P}(\mathbb{L}) \rightarrow \mathcal{K}$ operadores de cambio múltiple.

Levi Identity Si el operador $-_s$ satisface (M-1), (M-2) y (SM-3)~(SM-8) entonces $K *_p M = (K -_s M) + M$ satisface $(PM*1) \sim (PM*4)$ y $(PM*7) \sim (PM*10)$. Más aún, se cumple que $(K *_p M) \cap K = K -_s M$.

Harper Identity: Si el operador $*_p$ satisface $(PM*1) \sim (PM*4)$ y $(PM*7) \sim (PM*10)$ entonces $K -_s M = (K *_p M) \cap K$ satisface (M-1), (M-2) y (SM-3)~(SM-8). Más aún, se cumple que $(K -_s M) + M = K *_p M$.

Además, presentó un teorema de representación para estos operadores usando el conjunto de package openings si $-_s$ satisface los postulados básicos de la Definición 2.6.12.

Teorema 2.6.14 ([41]). Sean $-_s : \mathcal{K} \times \mathcal{P}(\mathbb{L}) \rightarrow \mathcal{K}$ operadores de cambio múltiple. Entonces $-_s$ satisface $(M-1)$, $(M-2)$ y $(SM-3) \sim (SM-6)$ si y sólo si existe una función de selección γ tal que para todo $K \in \mathcal{K}$ y $M \subseteq \mathbb{L}$:

$$K -_s M = \bigcap \gamma(K \downarrow_p M)$$

Por lo que podemos deducir que las Identidades de Levi y Harper también se satisfacen entre los operadores Fuhrmann's package revision y basic set contraction.

Teorema 2.6.15 ([40], [41]). Sean $-_s, *_p : \mathcal{K} \times \mathcal{P}(\mathbb{L}) \rightarrow \mathcal{K}$ operadores de cambio múltiple.

Levi Identity Si el operador $-_s$ satisface $(M-1)$, $(M-2)$ y $(SM-3) \sim (SM-6)$ entonces $K *_p M = (K -_s M) + M$ satisface $(PM*1) \sim (PM*6)$. Más aún, se cumple que $(K *_p M) \cap K = K -_s M$.

Harper Identity: Si el operador $*_p$ satisface $(PM*1) \sim (PM*6)$ entonces $K -_s M = (K *_p M) \cap K$ satisface $(M-1)$, $(M-2)$ y $(SM-3) \sim (SM-6)$. Más aún, se cumple que $(K -_s M) + M = K *_p M$.

Concluimos así esta (no tan) breve exposición de las ideas que hay en torno a operadores de cambio múltiple.

2.7 Resumen del Capítulo 2

En este capítulo nos propusimos dar los conceptos elementales de la Teoría de Cambio de Creencias a partir del modelo AGM, que van más allá de su formulación original. Estos conceptos, enlistados en un glosario, nos serán de guía para el desarrollo de toda la tesis. Por otro lado, hicimos una exposición de la diversidad de propuestas que surgieron a partir de los operadores expansion contraction y revision clásicos. Cubrimos las construcciones por postulados, por remainders y por mundos posibles; presentamos los operadores que contemplan las situaciones donde el entorno puede cambiar o donde las observaciones no son priorizadas; y dimos a conocer las problemáticas que hay detrás de proponer operadores de cambio múltiple, incluyendo generalizaciones más allá de la lógica CPL.

Habiendo conocido todo esto, puede ser un tanto abrumador preguntarnos si existirá una teoría unificada para todas estas propuestas. Nosotros creemos que sí, y que la respuesta se encuentra en desarrollar la idea de mundos posibles con un grado más de abstracción que lo hecho por Grove. Esta abstracción radica en trabajar únicamente con conjuntos de mundos como si fueran índices, desvinculados de toda lógica. Al trabajar con conjuntos y su estructura algebraica, redefiniremos todos los operadores presentados aquí, comenzando por expansion, contraction, revision, erase y update en el Capítulo 3. Luego, consideraremos desde la perspectiva de mundos las variantes que hicieron posible definir los operadores shielded contraction (Capítulo 4), credibility-limited revision, filtered revision y promotion (Capítulo 5). Pero en vez de volver a transitar un camino similar al de los desarrolladores de estos modelos, propondremos unas ideas diferentes, aunque equivalentes, para hablar de estos operadores no priorizados. Estas ideas nos ayudarán a explicitar mejor los comportamientos de estos operadores. En el Capítulo 6 veremos que todo esto puede unificarse en una familia de operadores, donde todas estas variantes serán subfamilias. Quedando pendiente para el Capítulo 7 revincular de alguna manera esta gran familia de operadores al marco conceptual de lógicas CPL en particular y de lógicas tarskianas en general.

Capítulo 3

Operadores Clásicos sobre Mundos

Vivimos en el mejor de todos los mundos posibles.

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1710).

En el Capítulo 2 se introdujeron los modelos más conocidos que la teoría de cambio de creencias tiene para ofrecer junto a algunas de sus variantes. En este capítulo nos proponemos desarrollar un marco en donde sea posible analizar esta diversidad de propuestas de forma homogénea, centrado en tres generalidades:

1. Como marco conceptual no utilizaremos un lenguaje formal para representar creencias, sino un conjunto $\mathcal{I}$ de índices, cuyos elementos llamaremos *mundos*, notados como w . La noción de coherencia viene dada por la inclusión de conjuntos y dos mundos distintos son distinguibles.
2. El conjunto de creencias original, la nueva observación y el nuevo conjunto de creencias se representa de la misma manera: cada uno de ellos es una colección de mundos del conjunto $\mathcal{I}$.
3. El conjunto de creencias original y la nueva observación son el primer y el segundo parámetro de los operadores de cambio a definir. Los mismos no están determinados a priori, a diferencia de lo que ocurre con los operadores clásicos de AGM o en cambio múltiple, donde se fija el conjunto de creencia original.

Esta generalización está basada en la representación vía mundos posibles de Grove de la Sección 2.3. Pero, a diferencia de ésta, al no tener un lenguaje, solamente entenderemos el cambio de creencias como cambio en el conjunto de mundos. En ese sentido, decimos que, dados un conjunto de creencias A y una nueva observación B :

- B es aceptada si $A \subseteq B$;
- B es rechazada si $A \subseteq B^c$ y $A \neq \emptyset$;
- B es indeterminada si $A \cap B \neq \emptyset \neq A \cap B^c$.

Si un conjunto de creencias tiene un solo mundo posible, digamos w , como $w \in B$ ó $w \notin B$ para cualquier conjunto, entonces B puede ser aceptada o rechazada, pero nunca indeterminada. Por otro lado, si $A = \emptyset$, entonces estamos ante un conjunto de creencias donde toda observación es aceptada. En el otro extremo, si $A = \mathcal{I}$, cualquier observación es indeterminada, excepto $B = \mathcal{I}$. En términos generales, se entiende que cuanto mayor sea el conjunto de mundos de un conjunto de creencias, menor será la información en la que pueda tomar posición.

3.1 Operadores World Contraction y World Revision

En esta sección presentamos los tres operadores clásicos de la teoría de cambio de creencias para un conjunto $\mathcal{I}$ de mundos: *expansion*, *contraction* y *revision*. Comenzamos por definirlos vía postulados para luego proponer una construcción y probar los teoremas de representación correspondientes.

Definición 3.1.1. Dados $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathcal{I})$, se consideran los siguientes postulados:

- para un operador $+_w : \mathcal{P}(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I})$:

$$(W+1) \quad A +_w B = A \cap B.$$

Llamaremos *world expansion* a los operadores $+_w$ que satisface **(W+1)**.

- para un operador $-_w : \mathcal{P}(\mathcal{I}) \times \mathcal{P}(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I})$:

$$(W-1) \quad A \subseteq A -_w B \text{ (contraction inclusion).}$$

$$(W-2) \quad (A -_w B) \cap B \subseteq A \text{ (recovery).}$$

$$(W-3) \quad \text{Si } B \neq \mathcal{I} \text{ entonces } A -_w B \not\subseteq B \text{ (contraction success).}$$

$$(W-4) \quad \text{Si } A \not\subseteq B \text{ entonces } A -_w B = A \text{ (contraction vacuity).}$$

$$(W-5) \quad A -_w (B \cap C) = \begin{cases} A -_w B \\ A -_w C \\ (A -_w B) \cup (A -_w C) \end{cases} \quad \text{(conjunctive factoring).}$$

Llamaremos *elementary world contraction* a los operadores $-_w$ que satisfacen **(W-1)** y **(W-2)**. Si además satisface **(W-3)**, los llamaremos *prioritized world contraction*. Si le agregamos **(W-4)**, *basic world contraction*. Por último, los basic world contraction que satisfagan **(W-5)** se los conoce como *transitive relational (TR) world contraction*.

- para un operador $*_w : \mathcal{P}(\mathcal{I}) \times \mathcal{P}(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I})$:

$$(W*1) \quad A *_w B \subseteq B \text{ (revision success).}$$

$$(W*2) \quad A \cap B \subseteq A *_w B \text{ (inclusion).}$$

$$(W*3) \quad \text{Si } B \neq \emptyset \text{ entonces } A *_w B \neq \emptyset \text{ (consistency).}$$

$$(W*4) \quad \text{Si } A \cap B \neq \emptyset \text{ entonces } A *_w B = A \cap B \text{ (vacuity).}$$

$$(W*5) \quad \text{Si } (A *_w B) \cap C \neq \emptyset \text{ entonces } A *_w (B \cap C) = (A *_w B) \cap C \text{ (super-subexpansion).}$$

Llamaremos *elementary world revision* a los operadores $*_w$ que satisfacen **(W*1)** y **(W*2)**. Si además satisface **(W*3)**, los llamaremos *consistent world revision*. Si le agregamos **(W*4)**, *basic world revision*. Por último, los basic world revision que satisfagan **(W*5)** se los conoce como *transitive relational (TR) world revision*.

El operador world expansion es la intersección de conjuntos, por lo que, en general, usaremos la notación $\cap$ para manipular conjuntos de $\mathcal{I}$. En el contexto de world contraction, los postulados *inclusion* **(W-1)** y *recovery* **(W-2)** caracterizan cuáles son los límites del cambio a realizar para la pérdida de información: todos los mundos que había deben seguir estando, y los nuevos (si es que hay) no pueden pertenecer a la nueva información. Algo similar ocurre con el postulado de *inclusion* **(W*2)** y *consistency* **(W*3)** para revision, forzando que sea una extensión del operador expansion y que, en caso de que la expansión sea vacía, priorizar la observación tomando un subconjunto no vacío de ella, excepto en el caso inevitable de que la observación sea vacía.

Los postulados **(W-3)** y **(W*1)** se conocen como *success* y son los que caracterizan el objetivo de los operadores: devolver un conjunto de creencias donde B sea indeterminado

para contraction, o donde B sea aceptado para revision. Los postulados *vacuity* (**W-4**) y (**W*4**) determinan en qué casos los operadores no requieren realizar cambios en el conjunto de creencias original para satisfacer los respectivos postulados *success*.

Los postulados (**W-5**) y (**W*5**) son considerados suplementarios. Se utilizan para definir un tipo de cambio asociado a la estructura de la teoría conjuntos. De ahora en más, cuando en general se hable de operadores revision o contraction, supondremos que son los operadores basic. Cuando la formalidad lo requiera, explicitaremos cuáles son los postulados que caracterizan al operador en cuestión.

Habiendo definido los operadores vía postulados, queda construir estos operadores. Para ello, definimos la siguiente función de selección en términos de mundos:

Definición 3.1.2. La función $\sigma : \mathcal{P}(\mathcal{I}) \times \mathcal{P}(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I})$ se define como *world-selection* si $\sigma(A, B) \subseteq (A \cup B)^c$, donde $X^c = \mathcal{I} \setminus X$, el conjunto complemento de X en $\mathcal{I}$. Esta función emula la elección que se hace ante situaciones de inconsistencias, por eso toma mundos que no son ni de A ni de B . Por lo tanto, esta elección representa cualquier decisión extralógica aplicada al par (A, B) . Además, decimos que σ es:

normal si cumple que si $A \not\subseteq B$ entonces $\sigma(A, B) = \emptyset$;

semantically successful si cumple que si $A \subseteq B \subsetneq \mathcal{I}$ entonces $\sigma(A, B) \neq \emptyset$.

La función world-selection está inspirada en la biyección de Grove para remainders [17] (ver Teorema 2.3.6) y la función de selección de AGM clásico [1] que elige remainders (ver Definición 2.2.2). La condición que la define, $\sigma(A, B) \subseteq (A \cup B)^c$, sólo nos alcanzará para construir operadores elementary world contraction, ya que siempre es posible elegir el conjunto vacío. Para limitar esta posibilidad, definimos dos propiedades extra: normal afirma que no es necesario tomar elementos de B^c si A ya tiene alguno; semantically successful fuerza que la función σ tome un subconjunto no vacío de B^c cuando $A \cap B^c = \emptyset$. Los siguientes teoremas de representación afirman que estas propiedades alcanzan para construir los operadores world contraction y revision, ya sean elementary, prioritized o basic.

Teorema 3.1.3. Un operador world contraction $-_w$ satisface (**W-1**) y (**W-2**) si y sólo si existe σ función world-selection tal que $A -_w B = A \cup \sigma(A, B)$. Más aún:

1. $-_w$ satisface (**W-3**) si y sólo si σ es semantically successful;
2. $-_w$ satisface (**W-4**) si y sólo si σ es normal.

Demostración en la página 43, al final del capítulo.

Concluida la demostración del teorema de representación de los operadores world contraction, continuamos con los operadores world revision.

Teorema 3.1.4. Un operador world revision $*_w$ satisface (**W*1**) y (**W*2**) si y sólo si existe una función world-selection σ tal que $A *_w B = (A \cap B) \cup \sigma(A, B^c)$. Más aún:

1. $*_w$ satisface (**W*3**) si y sólo si σ es semantically successful;
2. $*_w$ satisface (**W*4**) si y sólo si σ es normal.

Demostración en la página 43, al final del capítulo.

A partir de los teoremas de representación podemos decir que los operadores contraction y revision se diferencian, en su construcción, en esencialmente dos cuestiones. La primera es respecto a qué elementos de A se preservan en el nuevo conjunto de creencias. Mientras que los operadores contraction preservan a todo el conjunto, por (**W-1**), los operadores revision sólo preservan aquellos que también están en B , lo que afirma (**W*2**). Por lo tanto, solamente se preservan todos los mundos de A es cuando $A \subseteq B$, es decir, cuando B es

aceptada en A . En cualquier caso, podemos decir entonces que los postulados inclusion se encargan de determinar qué elementos de A se preservan.

La segunda es respecto a cuáles son los nuevos elementos que potencialmente puede agregar, es decir, los mundos no pertenecientes a A . Según se deduce de **(W-2)**, los operadores contraction agregan mundos que están por fuera de B , mientras que los operadores de revision agregan mundos de B , dado lo que implica **(W*1)**. Es decir que los postulados **(W-2)** y **(W*1)** determinan de dónde provienen los elementos que no están en A y que pasarán a formar parte del nuevo conjunto de creencias. El hecho de que en todo momento nos estamos refiriendo a elementos que no están en A , significa que ambos postulados cumplen, cada uno en su operador, el rol de caracterizar a las funciones world-selection.

Esta dualidad que vemos en los postulados y sus construcciones se puede representar mediante las identidades de Levi y Harper para este contexto.

Teorema 3.1.5. *Sean $-_w$ un operador world contraction que satisface **(W-1)** y **(W-2)** y $*_w$ un operador world revision que satisface **(W*1)** y **(W*2)**, donde ambos están caracterizados por la misma función world-selection σ . Entonces, para cualquier $A, B \subseteq \mathcal{I}$ se cumplen las siguientes identidades:*

Identidad de Levi: $A *_w B = (A -_w B^c) \cap B$

Identidad de Harper: $A -_w B = (A *_w B^c) \cup A$

Más aún, en este contexto, vale que:

1. $-_w$ cumple **(W-3)** si y sólo si $*_w$ cumple **(W*3)**.
2. $-_w$ cumple **(W-4)** si y sólo si $*_w$ cumple **(W*4)**.
3. $-_w$ cumple **(W-5)** si y sólo si $*_w$ cumple **(W*5)**.

Demostración en la página 43, al final del capítulo.

Observación 3.1.6. Se destaca del teorema anterior el hecho de que solamente son necesarios los postulados de los operadores elementary para presentar operadores que satisfagan los postulados suplementarios. Esto equivale a que la función world-selection asociada sea *trichotomic*:

$$\sigma(A, B \cap C) = \begin{cases} \sigma(A, B) \\ \sigma(A, C) \\ \sigma(A, B) \cup \sigma(A, C) \end{cases}$$

Esto deja abierta la posibilidad de estudiar operadores contraction (resp. revision) que satisfagan sólo los postulados **(W-1)**, **(W-2)**, y **(W-5)** (resp. **(W*1)**, **(W*2)**, y **(W*5)**) los cuales están fuera del alcance de esta tesis.

Observación 3.1.7. Es importante notar que el teorema precedente también establece un vínculo entre el postulado success de revision con el recovery de contraction, vía Levi-Harper. Se establece así una correspondencia entre un operador contraction no-priorizado y un operador revision priorizada. Esto tomará más relevancia en los siguientes capítulos.

Para finalizar esta sección, vamos a reproducir el resultado principal de Katsuno y Mendelzon en [24]: el operador basic revision con el postulado suplementario se puede caracterizar por una asignación de preórdenes totales bien fundados para cada representación del conjunto de creencias original. Reescribimos esta asignación, conocida como *faithful*, a nuestro marco de la siguiente manera:

Definición 3.1.8 ([24]). Dado $B \subseteq \mathcal{I}$, decimos que un mundo w es minimal en B con respecto a un preorden bien fundado $\leq$ si $w \in B$ y $w \leq w'$ para todo $w' \in B$. Notamos $\min(B, \leq)$ al conjunto de los mundos minimales con respecto a $\leq$.

Una función $\leq_\bullet: \mathcal{P}(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{I} \times \mathcal{I}$ es una asignación *faithful* si para todo $A \subseteq \mathcal{I}$:

($\leq_\bullet 1$) $\leq_A$ es un preorden bien fundado¹ ($\min(S, \leq_A) \neq \emptyset$ para todo $\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{I}$);

($\leq_\bullet 2$) Si $w, w' \in A$ entonces $w \leq_A w'$;

($\leq_\bullet 3$) Si $w \in A$ y $w' \notin A$ entonces $w \leq_A w'$ y $w' \not\leq_A w$.

Alternativamente, podemos definir una partición bien ordenada $\{X_j\}_{j \in J}$ de $\mathcal{I}$, donde:

- Los X_j son los conjuntos de equivalencia con respecto a $\leq$;
- $j < j'$ si y sólo si $w < w'$ para todo $w \in X_j$ y $w' \in X_{j'}$;
- $\min(B, \leq) = B \cap X_m$ donde $m = \min_{j \in J} \{B \cap X_j \neq \emptyset\}$.

Trabajar con una partición bien ordenada nos ayuda a lidiar con el caso $\mathcal{I}$ infinito, como lo determina el siguiente teorema.

Teorema 3.1.9. Sea $*_w$ operador world revision que satisfice $(W*1) \sim (W*4)$. Entonces, $*_w$ cumple $(W*5)$ si y sólo si para todo $A \subseteq \mathcal{I}$ existe $\{X_j^A\}_{j \in J}$ partición bien ordenada de $\mathcal{I}$ tal que si $B \neq \emptyset$ entonces $A *_w B = B \cap X_n$ con $n = \min\{j \in J \mid B \cap X_j \neq \emptyset\}$.

Demostración en la página 44, al final del capítulo.

Tener una partición bien ordenada de $\mathcal{I}$ equivale a tener un preorden total bien fundado sobre $\mathcal{I}$. Así que, por el Teorema 3.1.9, podemos definir una asignación *faithful* que caracterice el operador world revision.

Corolario 3.1.10. Sea $*_w$ operador world revision que satisfice $(W*1) \sim (W*4)$. Entonces, $*_w$ satisfice $(W*5)$ si y sólo si existe una asignación *faithful* que dado un $A \subseteq \mathcal{I}$ lo asocie a un preorden total y bien fundado $\leq_A$ tal que $A *_w B = \min(B, \leq_A)$.

El resultado del Corolario anterior nos dio además la propiedad de las funciones world-selection que caracterizan a los operadores transitive relational world revision.

Definición 3.1.11. Decimos que una función σ world-selection es *transitive relational (TR)* si existe una asignación *faithful* que a cada $X \subseteq \mathcal{I}$ le asocia un preorden total $\leq_X$ tal que para todo $A, B \subseteq \mathcal{I}$:

$$\sigma(A, B) = \min(B^c, \leq_A) \cap A^c$$

En la siguiente sección desarrollaremos la versión de mundos de los operadores definidos por Katsuno y Mendelzon, update y erase.

3.2 Operadores World Update y World Erase

Como vimos en la Sección 2.4, los operadores erase y update son las versiones de contraction y revision respectivamente que modelan la situación en que el entorno es cambiante. En esta sección desarrollaremos la versión en mundos de estos operadores, generalizando lo realizado por Katsuno y Mendelzon en [23]. No sólo lo llevaremos al caso infinito sino que analizaremos más en detalle el vínculo con las diferentes familias de operadores contraction y revision, incluyendo parte de lo hecho en [33].

¹Esto formaliza la noción de “Limit Assumption” considerada por Lewis en la presentación de su semántica de sistemas de esferas para contrafácticos (ver [25]).

Definición 3.2.1. Dados $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{I})$, se consideran los siguientes postulados:

- para un operador $\blacklozenge_w : \mathcal{P}(\mathcal{I}) \times \mathcal{P}(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I})$:
 - (W♦3) Si $A \neq \emptyset$ y $B \neq \mathcal{I}$ entonces $A \blacklozenge_w B \not\subseteq B$ (contraction weak success).
 - (W♦4) Si $A \cap B = \emptyset$ y $A \neq \emptyset$ entonces $A \blacklozenge_w B = A$ (contraction weak vacuity).

A los operadores elementary world contraction $\blacklozenge_w$, que satisfacen (W-1) y (W-2), los llamaremos *weak prioritized world contraction* si cumplen (W♦3), *standard world contraction* si cumplen (W♦4) y *weak world contraction* si cumplen ambos postulados.

- para un operador $\diamond_w : \mathcal{P}(\mathcal{I}) \times \mathcal{P}(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I})$:
 - (W♦3) Si $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$ entonces $A \diamond_w B \neq \emptyset$ (weak consistency).
 - (W♦4) Si $\emptyset \neq A \subseteq B$ entonces $A \diamond_w B = A$ (weak vacuity).

A los operadores elementary world revision $\diamond_w$, que satisfacen (W*1) y (W*2), los llamaremos *weak consistent world revision* si cumplen (W♦3), *standard world revision* si cumplen (W♦4) y *weak world revision* si cumplen ambos postulados.

Decimos que un operador standard world es *strong* si preserva la inconsistencia del conjunto de creencias original, es decir, si satisface:

$$(WI1) \quad \emptyset \diamond_w B = \emptyset.$$

Decimos que un operador standard world es *local world* si preserva la unión en la primer coordenada, es decir, si satisface:

$$(WL1) \quad A \diamond_w B = \bigcup_{w \in A} (\{w\} \diamond_w B) \text{ (pointwise).}$$

Definimos a los operadores *world erase* y *world update* como los operadores local world contraction y local world revision respectivamente.

Se deduce de forma inmediata que cualquier basic world contraction satisface los postulados de un operador weak world contraction, porque (W-3) implica (W♦3) y (W-4) implica (W♦4). Lo mismo sucede con cualquier basic world revision, porque (W*3) implica (W♦3) y (W*4) implica (W♦4). Por otro lado, el postulado (WI1) resulta incompatible con postulados como (W-3) o bien (W*3).

Lema 3.2.2. Sea $-_w$ y $*_w$ dos operadores de cambio.

1. $-_w$ no puede satisfacer simultáneamente (W-3) y (WI1).
2. $*_w$ no puede satisfacer simultáneamente (W*3) y (WI1).

Demostración en la página 45, al final del capítulo.

El postulado (WL1) tiene la particularidad de definir el comportamiento de los operadores elemento a elemento, concepto conocido como *local*, clave en la teoría de entornos cambiantes. Dado que (WL1) implica (WI1), la incompatibilidad del Lema 3.2.2 también afecta al postulado (WL1). Es por eso que necesitamos definir nuevas propiedades para las funciones world-selection que sean versiones más débiles de las que ya conocemos.

Definición 3.2.3. Sea σ una función world-selection. Decimos que σ es:

standard si cumple que si $A \cap B = \emptyset$ y $A \neq \emptyset$ entonces $\sigma(A, B) = \emptyset$.

strong standard si cumple que si $A \cap B = \emptyset$ entonces $\sigma(A, B) = \emptyset$.

semantically successful under consistency si $\sigma(A, B) \neq \emptyset$ cuando $\emptyset \neq A \subseteq B \subsetneq \mathcal{I}$.

local si $\sigma(A, B) = A^c \cap \bigcup_{w \in A \cap B} \sigma(\{w\}, B)$.

A partir de los Teoremas 3.1.3 y 3.1.4, vía los postulados **(W-1)**, **(W-2)**, **(W*1)** y **(W*2)** ya tenemos funciones world-selection que nos sirven para representar a los operadores, por lo que estamos en condiciones de probar el Teorema de Representación correspondiente.

Teorema 3.2.4. *Sea un operador $\blacklozenge_w$ que satisface **(W-1)** y **(W-2)**, un operador $\diamond_w$ que satisface **(W*1)** y **(W*2)**, y σ su función world-selection asociada, es decir, tal que $A \blacklozenge_w B = A \cup \sigma(A, B)$ y tal que $A \diamond_w B = (A \cap B) \cup \sigma(A, B^c)$. Entonces:*

1. *Las siguientes afirmaciones son equivalente:*

- (a) $\blacklozenge_w$ satisface **(W $\blacklozenge$ 3)**;
- (b) $\diamond_w$ satisface **(W $\diamond$ 3)**;
- (c) σ es semantically successful under consistency.

2. *Las siguientes afirmaciones son equivalente:*

- (a) $\blacklozenge_w$ satisface **(W $\blacklozenge$ 4)**;
- (b) $\diamond_w$ satisface **(W $\diamond$ 4)**;
- (c) σ es standard.

Además, si $\blacklozenge_w$ o bien $\diamond_w$ satisfacen **(WI1)**, se tiene que σ es strong standard.

Demostración en la página 45, al final del capítulo.

Las relaciones biunívocas entre propiedades de funciones world-selection y postulados, tanto del lado de los operadores contraction como de los operadores revision, permiten que estos operadores satisfagan las Identidades de Levi y Harper. Para poder mantener esta relación biunívoca para los operadores update y erase, es decir, cuando su función world-selection asociada es local, es necesario que además ésta sea standard.

Teorema 3.2.5. *Sea un operador $\blacklozenge_w$ que satisface **(W-1)**, **(W-2)** y **(W $\blacklozenge$ 4)**, un operador $\diamond_w$ que satisface **(W*1)**, **(W*2)** y **(W $\diamond$ 4)** y σ su función world-selection asociada, es decir, tal que $A \blacklozenge_w B = A \cup \sigma(A, B)$ y tal que $A \diamond_w B = (A \cap B) \cup \sigma(A, B^c)$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- 1. $\blacklozenge_w$ satisface **(WL1)**;
- 2. $\diamond_w$ satisface **(WL1)**;
- 3. σ es local.

Se concluye además que los operadores world erase y world update satisfacen las identidades de Levi y Harper del Teorema 3.1.5.

Demostración en la página 45, al final del capítulo.

La teoría de asignaciones faithful para operadores update de Katsuno y Mendelzon está fuertemente asociada a mundos posibles, concepto en el cual está basado está propuesta más abstracta. Nosotros comenzaremos desde un poco más atrás, con un corolario que confirma que el postulado **(W*5)** ya da los resultados conocidos de la teoría de asignaciones faithful en el caso en que trabajemos con operadores weak world revision y conjuntos de creencias A consistentes.

Corolario 3.2.6. *Sea $\diamond_w$ un operador weak world revision que satisface **(W*1)**, **(W*2)**, **(W $\diamond$ 3)** y **(W $\diamond$ 4)**. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\diamond_w$ satisface **(W*5)** si $A \neq \emptyset$;
2. para todo $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{I}$ existe $\{X_j^A\}_{j \in J}$ partición bien ordenada de $\mathcal{I}$ tal que $A *_w B = B \cap X_n$ con $n = \min\{j \in J \mid B \cap X_j \neq \emptyset\}$;
3. para todo $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{I}$ existe un preorden total y bien fundado $\leq_A$ tal que $A *_w B = \min(B, \leq_A)$.

A tales operadores los llamaremos *weak transitive relational* (TR).

Demostración en la página 46, al final del capítulo.

El corolario anterior pone de manifiesto que, mientras A sea consistente, los operadores world revision y weak world revision tienen el mismo comportamiento cuando se satisface el postulado **(W*5)**. Pero eso cambia cuando A es inconsistente. Como comentamos en la Sección 2.4, el caso $A = \emptyset$ tiene cierta relevancia al momento de comparar conceptualmente los operadores de tipo update y revision. Por un lado, en update se busca actualizar el conjunto de creencias, por lo que es aceptable dar una conjunto de creencias inconsistente si el original ya lo era. Todo lo contrario sucede en el caso revision, pensado justamente para corregir este tipo de situaciones. Es por eso que cuando $A = \emptyset$, la construcción que caracteriza al postulado **(W*5)** sólo es compatible con world revision.

Continuando con la adaptación de la teoría de asignaciones faithful, probamos que es posible trabajar con órdenes parciales sobre mundos cuando además se satisface **(WL1)**.

Teorema 3.2.7. *Sea $\diamond_w$ un operador world update que satisface **(W*1)**, **(W*2)**, **(W*3)**, **(W*4)** y **(WL1)**. Entonces, $\diamond_w$ satisface:*

- (W*5)** $(A \diamond_w B) \cap C \subseteq A \diamond_w (B \cap C)$ (*superexpansion*).
- (W*6)** Si $A \diamond_w B \subseteq C$ y $A \diamond_w C \subseteq B$ entonces, $A \diamond_w B = A \diamond_w C$ (*inclusion equivalence*).
- (W*7)** Si $w \in \mathcal{I}$ y $S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{I})$, entonces $\bigcap_{B \in S} (\{w\} \diamond_w B) \subseteq \{w\} \diamond_w (\bigcup S)$ (*pointwise inclusion*).

si y sólo si existe una asignación tal que a un $w \in \mathcal{I}$ le asocia un orden parcial y bien fundado $\leq_w$ donde w sea el elemento mínimo y $A \diamond_w B = \bigcup_{w \in A} \min(B, \leq_w)$.

A tales operadores los llamaremos *pointwise partially relational* (PR).

Demostración en la página 46, al final del capítulo.

Para finalizar la teoría de asignaciones faithful, el siguiente teorema prueba que existe una subfamilia de operadores que tienen un comportamiento local al de los operadores TR world revision, en el sentido de que satisfacen el postulado **(W*5)** localmente.

Teorema 3.2.8. *Sea $\diamond_w$ un operador world update, i.e. que satisface **(W*1)**, **(W*2)**, **(W*3)**, **(W*4)** y **(WL1)**. Entonces, $\diamond_w$ satisface:*

- (W*8)** Si $w \in \mathcal{I}$ y $(\{w\} \diamond_w B) \cap C \neq \emptyset$, entonces $\{w\} \diamond_w (B \cap C) = (\{w\} \diamond_w B) \cap C$ (*pointwise super-subexpansion*).

si y sólo si existe una asignación tal que a un $w \in \mathcal{I}$ le asocia un preorden total y bien fundado $\leq_w$ donde w sea el elemento mínimo y $A \diamond_w B = \bigcup_{w \in A} \min(B, \leq_w)$.

Más aún, en tal caso, el operador $\diamond_w$ satisface **(W*5)**, **(W*6)** y **(W*7)**. También cumple **(W*5)** si para todo $w \in A$ se tiene que $(\{w\} \diamond_w B) \cap C \neq \emptyset$.

A tales operadores los llamaremos *pointwise transitive relational* (TR).

Demostración en la página 47, al final del capítulo.

Es importante destacar que, al estar trabajando con elementos de $\mathcal{I}$ en vez de conjuntos, no nos preguntamos la situación del caso $A = \emptyset$. Sin embargo, la misma queda determinada por el postulado **(WL1)**, que implica que $\emptyset \diamond_w B = \emptyset$ para cualquier $B \subseteq \mathcal{I}$.

Como en el caso de TR world revision, los teoremas anteriores nos dan propiedades de las funciones world-selection que caracterizan a las familias de operadores estudiadas.

Definición 3.2.9. Decimos que una función σ world-selection standard y semantically successful over consistency es:

- *weak relational* si existe una asignación faithful que a un $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{I}$ lo asocia a un preorden total $\leq_A$ tal que $\sigma(A, B) = A^c \cap \min(B^c, \leq_A)$ para todo $A, B \subseteq \mathcal{I}$.
- *local partially relational* si existe una asignación faithful que a un $w \in \mathcal{I}$ lo asocia a un orden parcial $\leq_w$ tal que $\sigma(A, B) = A^c \cap \bigcup_{w \in A \cap B} \min(B^c, \leq_w)$ para todo $A, B \subseteq \mathcal{I}$.
- *local relational* si existe una asignación faithful que a un $w \in \mathcal{I}$ lo asocia a un preorden total $\leq_w$ tal que $\sigma(A, B) = A^c \cap \bigcup_{w \in A \cap B} \min(B^c, \leq_w)$ para todo $A, B \subseteq \mathcal{I}$.

El Teorema 3.2.8 nos permite deducir que hay una subfamilia de operadores update que se comportan de forma muy similar a los operadores revision. De hecho, el postulado **(W*5)** implica **(W*8)**. Esto sugiere la idea de que los postulados **(W*5)** y **(WL1)** son compatibles en los casos en que $A \neq \emptyset$, en sintonía con el Corolario 3.2.6². En tal caso, se tiene que existe una asignación tal que a un $w \in \mathcal{I}$ le asocia un preorden total y bien fundado $\leq_w$ donde w sea el elemento mínimo, y que además determina a los preórdenes totales para todo conjunto A no vacío de la siguiente manera:

$$w_1 \leq_A w_2 \quad \text{si y sólo si} \quad \exists w \in A \mid w_1 \leq_w w_2$$

También vemos que esta subfamilia forma parte a su vez de la familia que cumple los postulados suplementarios de los operadores update. Aunque es importante destacar que el preorden total que se define en este teorema no necesariamente está relacionado con el orden parcial del Teorema 3.2.7.

3.3 Resumen del Capítulo 3

En este capítulo presentamos un marco conceptual para la teoría de cambio de creencias basado en mundos y desarrollamos las versiones “world” de los operadores clásicos: expansion, contraction, revision, erase y update. A nivel constructivo, se destaca la familia de funciones world-selection, inspirada en la biyección de Groove de mundos posibles y la familia de funciones de selección de AGM. Esta construcción permite además ver más fácilmente a los operadores de cambio trabajados como de dos parámetros. Por último, vimos que, en general, los postulados adaptados a mundos están en relación uno a uno con propiedades específicas de las funciones world-selection. Esto resulta particularmente deseable para entender las Identidades de Levi y Harper no sólo a nivel de los operadores, sino de todas las subfamilias en simultáneo.

En la Figura 3.1 se puede identificar, en un árbol, las relaciones de inclusión de las diferentes familias presentadas en este capítulo. Las flechas se pueden leer como “incluye a”. Estas relaciones se pueden representar bajo tres aspectos diferentes: como propiedades de funciones world-selection, como postulados de elementary world revision y como postulados de elementary world contraction. En particular, podemos interpretar que todas las familias

²Una prueba formal de este resultado queda fuera del alcance de esta tesis.

del árbol satisfacen las identidades de Levi y Harper. Por lo tanto, el árbol representa tanto las relaciones entre operadores contraction como las relaciones entre operadores revision. La Figura 3.2 resume, también en un árbol, la teoría de asignaciones faithful, que está enfocada en operadores de tipo revision. Se pueden distinguir cuatro diferentes tipos a partir de las subfamilias.

Árbol de Operadores Elementary World

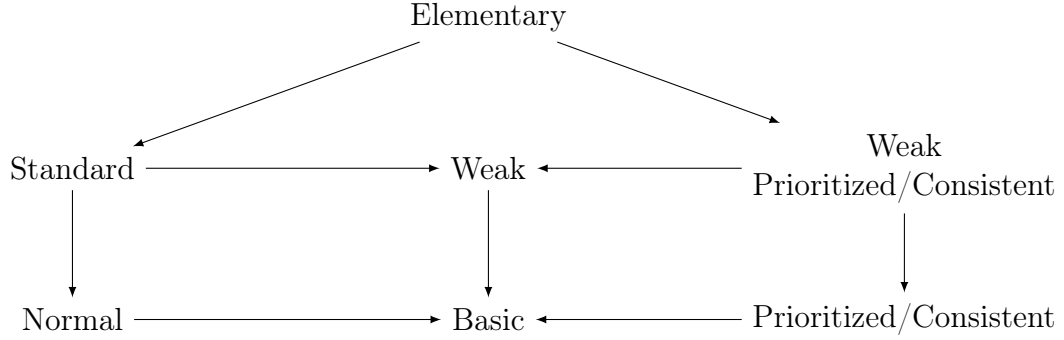


Figura 3.1: Árbol de relaciones tanto de las familias de operadores world contraction como las de operadores world revision según propiedades de sus funciones world-selection, aprovechando la articulación con las identidades de Levi y Harper.

Árbol de Operadores Relational World

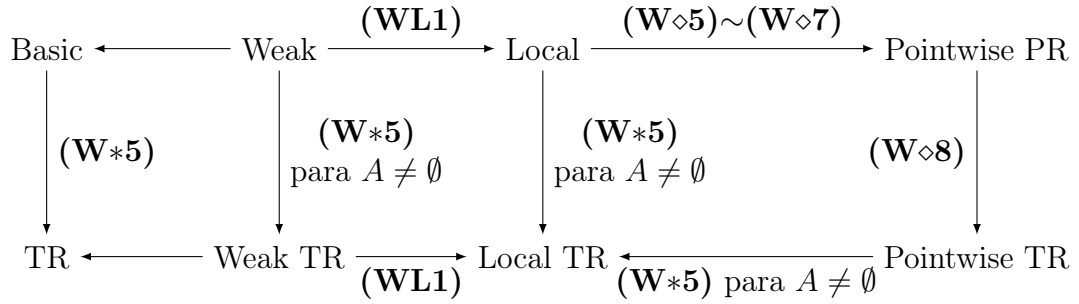


Figura 3.2: Árbol de relaciones de familias de operadores de tipo world revision, asociados por postulados de tipo relacionales, que definen asignaciones faithful.

Demostraciones de los Resultados del Capítulo 3

Demostración de Teorema 3.1.3. Definido el operador $-_w$ vía postulados, consideramos $\sigma(A, B) = (A -_w B) \cap A^c$. Por **(W-2)** tenemos que:

$$\sigma(A, B) \cap B = (A -_w B) \cap A^c \cap B \subseteq A \cap A^c = \emptyset$$

Por lo tanto, $\sigma(A, B) \cap B = \emptyset$, o lo que es lo mismo, $\sigma(A, B) \subseteq B^c$. Luego $\sigma(A, B) \subseteq A^c \cap B^c$, es decir, σ es una función world-selection.

Si lo que tenemos definido es la función σ , considerar $A -_w B = A \cup \sigma(A, B)$. Entonces $-_w$ cumple **(W-1)** por construcción y $(A -_w B) \cap B = (A \cap B) \cup (\sigma(A, B) \cap B)$. Como $\sigma(A, B) \subseteq B^c$ nos queda que $(A -_w B) \cap B = A \cap B$. Luego, $(A -_w B) \cap B \subseteq A$, es decir, $-_w$ satisface **(W-2)**.

A partir de la construcción en términos de la función world-selection σ , tenemos que:

1. Que $-_w$ cumpla **(W-3)** significa que si $B \neq \mathcal{I}$ entonces $(A -_w B) \cap B^c \neq \emptyset$. Por la construcción, equivale a que si $B \neq \mathcal{I}$ entonces $(A \cap B^c) \cup (\sigma(A, B) \cap B^c) \neq \emptyset$. En particular, si $A \subseteq B \neq \mathcal{I}$ entonces $\sigma(A, B) \neq \emptyset$.

Si σ es semantically successful y $B \neq \mathcal{I}$, separamos en dos casos: si $A \subseteq B \neq \mathcal{I}$ entonces $A -_w B \not\subseteq B$ por la propiedad de σ ; y si $A \not\subseteq B$ entonces $A -_w B \not\subseteq B$ por **(W-1)**.

2. Consideremos $A, B \subseteq \mathcal{I}$ tal que $A \not\subseteq B$. Si $-_w$ cumple **(W-4)**, entonces $A -_w B = A$, y como $\sigma(A, B^c) \subseteq A^c$ por construcción resulta que $\sigma(A, B^c) = \emptyset$. Si σ es normal, entonces $\sigma(A, B^c) = \emptyset$. Por lo tanto, $A -_w B = A$.

□

Demostración de Teorema 3.1.4. Si tenemos el operador $*_w$ definido vía postulados, tomamos $\sigma(A, B) = (A *_w B^c) \cap A^c$. Por el postulado **(W*1)** concluimos que $\sigma(A, B) \subseteq B^c \cap A^c$, por lo que σ es una función world-selection.

Pero si lo que tenemos es la función σ , consideramos $A *_w B = (A \cap B) \cup \sigma(A, B^c)$. Entonces, $*_w$ cumple **(W*1)** pues $\sigma(A, B^c) \subseteq B$ y satisface **(W*2)** por construcción.

Usando que los operadores elementary world revision se construyen vía funciones world-selection como $A *_w B = (A \cap B) \cup \sigma(A, B^c)$, tenemos que:

1. Que $*_w$ cumpla **(W*3)** significa que si $D \neq \emptyset$ entonces $(A \cap D) \cup \sigma(A, D^c) \neq \emptyset$. Tomando $D = B^c$, lo anterior equivale a que si $B \neq \mathcal{I}$, entonces $(A \cap B^c) \cup \sigma(A, B) \neq \emptyset$. Luego, si $A \subseteq B \neq \mathcal{I}$, por lo anterior vale que $\sigma(A, B) \neq \emptyset$.

Si, en cambio, σ es semantically successful y $B \neq \emptyset$, para ver que $A *_w B \neq \emptyset$, podemos suponer que $A \cap B \neq \emptyset$ o bien $A \cap B = \emptyset$. En el primer caso, $A *_w B \neq \emptyset$ por construcción, mientras que en el segundo caso tenemos que $\sigma(A, B^c) \neq \emptyset$ pues $A \subseteq B^c \neq \mathcal{I}$. En cualquier caso, $A *_w B \neq \emptyset$.

2. Si $A \cap B \neq \emptyset$ y σ es normal, entonces $\sigma(A, B^c) = \emptyset$. Luego $A *_w B = A \cap B$ por construcción. Es decir, $*_w$ cumple **(W*4)**. Si $*_w$ satisface **(W*4)** y $A \not\subseteq B$, entonces $A *_w B^c = (A \cap B^c)$ pues $A \cap B^c \neq \emptyset$. Esto significa que $\sigma(A, B) = (A *_w B^c) \cap A^c = \emptyset$, es decir, σ es normal.

□

Demostración de Teorema 3.1.5. Primero, probamos las identidades para los postulados elementales, aplicando los Teoremas de Representación 3.1.3 y 3.1.4:

Identidad de Levi: $A *_w B = (A \cap B) \cup \sigma(A, B^c) = (A \cup \sigma(A, B^c)) \cap B = (A -_w B^c) \cap B$.

Identidad de Harper: $A -_w B = A \cup \sigma(A, B) = A \cup (A \cap B^c) \cup \sigma(A, B) = (A *_w B^c) \cup A$.

Los primeros ítem de la segunda parte se deducen directamente de las pruebas de los Teoremas 3.1.3 y 3.1.4 y su conexión con las propiedades de la función σ .

Supongamos ahora que $-_w$ satisface **(W-5)** y consideremos $A, B, C \subseteq \mathcal{I}$ donde $(A *_w B) \cap C \neq \emptyset$. Por la identidad de Levi, tenemos: $(A *_w B) \cap C = (A -_w B^c) \cap B \cap C$. Por lo tanto, $(A *_w B) \cap C$ equivale a una de estas tres opciones:

- $(A -_w (B \cap C)^c) \cap B \cap C$: entonces es equivalente a $A *_w (B \cap C)$ por Harper;
- $(A -_w (B \cap C^c)^c) \cap B \cap C$: entonces es vacío, pero esto no sucede pues $(A *_w B) \cap C \neq \emptyset$;
- $((A -_w (B \cap C)^c) \cap B \cap C) \cup ((A -_w (B \cap C^c)^c) \cap B \cap C)$: combinando los razonamientos de los casos anteriores, resulta que también es equivalente a $A *_w (B \cap C)$.

En cualquier caso, $(A *_w B) \cap C = A *_w (B \cap C)$.

Por último, supongamos que $*_w$ satisface **(W*5)** y consideremos $A, B, C \subseteq \mathcal{I}$. En el caso particular en que $B = C = \mathcal{I}$, el postulado **(W-5)** se cumple trivialmente. Supongamos que $B \cap C \neq \mathcal{I}$, entonces:

$$A *_w (B \cap C)^c = ((A *_w (B \cap C)^c) \cap B^c) \cup (A *_w (B \cap C)^c \cap C^c) \neq \emptyset$$

Si $(A *_w (B \cap C)^c) \cap B^c \neq \emptyset$ podemos usar **(W*5)** para reemplazarlo por $A *_w B^c$, pues $(B \cap C)^c \cap B^c = B^c$. Análogamente, $A *_w (B \cap C)^c \cap C^c = A *_w C^c$ si $A *_w (B \cap C)^c \cap C^c \neq \emptyset$. Como al menos uno de ellos es no vacío, se obtiene que:

$$A \cup (A *_w (B \cap C)^c) = \begin{cases} A \cup (A *_w B^c) \\ A \cup (A *_w C^c) \\ A \cup (A *_w B^c) \cup (A *_w C^c) \end{cases}$$

Que equivale al postulado **(W-5)** luego de aplicar la identidad de Harper. $\square$

Demostración de Teorema 3.1.9.

De postulado a partición: Fijado un conjunto A consideremos la siguiente construcción recursiva sobre el conjunto de índices J :

$$\begin{cases} X_0 &= A *_w \mathcal{I} \\ X_j &= A *_w \left(\bigcap_{0 \leq k < j} X_k^c \right) \end{cases}$$

Notar que los conjuntos X_j son disjuntos dos a dos por **(W*1)**, y que $X_0 = A$ por **(W*4)**, a menos que $A = \emptyset$. Además, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $X_j \neq \emptyset$, de lo contrario, si hay un $m \in J$ tal que $X_m = \emptyset$, como J es bien ordenado podemos tomar l el menor elemento de J tal que $X_l = \emptyset$. Esto significa que $\bigcap_{0 \leq j < l} X_j^c = \emptyset$ por **(W*3)** y que todo $X_j \neq \emptyset$ si $j < l$. Entonces, $X_k = \emptyset$ para todo $k \geq l$ por **(W*1)** y $\bigcup_{0 \leq j < l} X_j = \mathcal{I}$. En particular, podemos redefinir el índice de la definición recursiva considerando el intervalo $[0, l)$.

Tomemos ahora $\{Z_j\}_{j \in J}$ una cadena estrictamente creciente de conjuntos de $\mathcal{I}$ definida como $Z_j = \bigcup_{0 \leq k < j} X_k$. Claramente, $Y = \bigcup_{j \in J} X_j$ es el supremo de la cadena.

Supongamos que $Y^c = X \setminus Y \neq \emptyset$. Entonces, podemos tomar $\tilde{X} = A *_w Y^c$, que es no vacío por **(W*3)** y por lo tanto un elemento de la recursión. Pero $\tilde{X} \cap Y = \emptyset$, por lo que Y no es maximal, obteniendo una contradicción. Podemos concluir entonces que $\{X_j\}_{j \in J}$ es una partición bien ordenada de $\mathcal{I}$.

Veamos ahora que dado $\emptyset \neq B \subseteq \mathcal{I}$, entonces $A * B = B \cap X_n$, donde n se lo toma como $\min \{j \in J \mid B \cap X_j \neq \emptyset\}$. Por definición de n , si $m < n$ entonces $B \cap X_m = \emptyset$, luego:

$$B \subseteq \bigcap_{0 \leq j < n} X_j^c = Z_n^c$$

Recordar que $X_n = A *_w Z_n^c$, por lo que $(A *_w Z_n^c) \cap B \neq \emptyset$ por definición de n , así que podemos aplicar **(W*5)**:

$$X_n \cap B = (A *_w Z_n^c) \cap B = A *_w (Z_n^c \cap B) = A *_w B$$

De partición a postulado: Consideremos $A, B, C \subseteq \mathcal{I}$ tal que $(A *_w B) \cap C \neq \emptyset$ y supongamos que tenemos $\{X_j^A\}_{j \in J}$ una partición bien ordenada de $\mathcal{I}$ tal que:

- $A * B = B \cap X_n^A$ donde $n = \min\{j \in J \mid B \cap X_j^A \neq \emptyset\}$ y
- $A * (B \cap C) = (B \cap C) \cap X_m^A$ donde $m = \min\{j \in J \mid (B \cap C) \cap X_j^A \neq \emptyset\}$.

Por **(W*1)** sabemos que $(B \cap C) \neq \emptyset$, entonces $(B \cap C) \cap X_m \neq \emptyset$ por **(W*3)**, por lo que $B \cap X_m \neq \emptyset$. Esto implica que $n \leq m$ por definición de n . Por otro lado, por hipótesis tenemos que $(B \cap C) \cap X_n \neq \emptyset$, por lo que análogamente al caso anterior podemos deducir que $m \leq n$. Concluimos que:

$$(A *_w B) \cap C = (B \cap C) \cap X_n = A * (B \cap C)$$

Con esto vimos que $*_w$ satisface **(W*5)**. □

Demostración de Lema 3.2.2.

1. El caso patológico es cuando se considera $A = \emptyset$. En este caso, **(WL1)** implica que $\emptyset -_w B = \emptyset$, por lo que en particular $\emptyset -_w B \subseteq B$ para cualquier $B \neq \mathcal{I}$. Por lo tanto, no se satisface **(W-3)**.
2. El caso patológico es cuando se considera $A = \emptyset$. En este caso, **(WL1)** implica que $\emptyset *_w B = \emptyset$, por lo que en no satisface **(W*3)**. □

Demostración de Teorema 3.2.4. Las doble implicaciones entre los postulados de $\blacklozenge_w$ y $\diamond_w$ se deducen de forma directa ya que valen las identidades de Levi y Harper, por lo que nos concentraremos en probar la doble implicación entre los postulados de $\blacklozenge_w$ y las propiedades de σ . Retomamos la prueba del Teorema 3.1.3 y recordamos que, definido el operador $\blacklozenge_w$ vía postulados, tenemos que $\sigma(A, B) = (A \blacklozenge_w B) \cap A^c$. Mientras que si lo que tenemos definido es la función σ , tomamos $A \blacklozenge_w B = A \cup \sigma(A, B)$. Se deduce directamente por estas construcciones que $\blacklozenge_w$ cumple **(W $\blacklozenge$ 4)** si y sólo si σ es standard. Además satisfacer **(WI1)** en este contexto equivale a que σ sea strong standard.

Supongamos ahora que $A \neq \emptyset$ y $B \neq \mathcal{I}$. Si $A \subseteq B$, como σ es semantically successful under consistency, es inmediato que $\sigma(A, B) \neq \emptyset$, por lo que $A \cup \sigma(A, B) \not\subseteq B$ por definición de σ . Por otro lado, si $A \not\subseteq B$, entonces claramente $A \cup \sigma(A, B) \not\subseteq B$. Esto prueba que $A \cup \sigma(A, B)$ satisface **(W $\blacklozenge$ 3)**.

Probemos que $\sigma(A, B) = (A \blacklozenge_w B) \cap A^c$ es semantically successful under consistency. Supongamos que $\emptyset \neq A \subseteq B \subsetneq \mathcal{I}$. En particular, $B^c \subseteq A^c$. Por otro lado, **(W $\blacklozenge$ 3)** nos dice que en este contexto $A \blacklozenge_w B \not\subseteq B$, es decir, $(A \blacklozenge_w B) \cap B^c \neq \emptyset$. Luego, $\emptyset \neq (A \blacklozenge_w B) \cap B^c \subseteq (A \blacklozenge_w B) \cap A^c = \sigma(A, B)$, concluyendo que σ es semantically successful under consistency. □

Demostración de Teorema 3.2.5. Veamos que σ es local a partir del operador $\blacklozenge_w$. Aplicando **(WL1)** y **(W $\blacklozenge$ 4)** tenemos que:

$$\begin{aligned} A \blacklozenge_w B &= \bigcup_{w \in A} \{w\} \blacklozenge_w B \\ &= \left(\bigcup_{w \in A \cap B} \{w\} \cup \sigma(\{w\}, B) \right) \cup \left(\bigcup_{w \in A \cap B^c} \{w\} \right) \\ &= A \cup \bigcup_{w \in A \cap B} \sigma(\{w\}, B) \end{aligned}$$

Por la construcción de $\blacklozenge_w$ a partir de σ se deduce que es local. La secuencia de igualdades en el otro sentido prueba que si σ es local y standard, entonces $\blacklozenge_w$ satisface **(WL1)**.

Continuamos viendo que σ es local a partir del operador $\diamond$. Aplicando **(WL1)** y **(W $\diamond$ 4)** tenemos que:

$$\begin{aligned} A \diamond_w B &= \bigcup_{w \in A} (\{w\} \diamond_w B) \\ &= \left(\bigcup_{w \in A \cap B} \{w\} \right) \cup \left(\bigcup_{w \in A \cap B^c} (\{w\} \cap B) \cup \sigma(\{w\}, B^c) \right) \\ &= (A \cap B) \cup \bigcup_{w \in A \cap B^c} \sigma(\{w\}, B^c) \end{aligned}$$

Por la construcción de $\diamond$ a partir de σ se deduce que es local. La secuencia de igualdades en el otro sentido prueba que si σ es local y standard, entonces $\diamond_w$ satisface **(WL1)**. $\square$

Demostración de Corolario 3.2.6. Notar que, suponiendo $A \neq \emptyset$ se tiene que **(W $\diamond$ 3)** es equivalente a **(W*3)**. Por otro lado, en la demostración del Teorema 3.1.9, el único caso en donde usamos **(W*4)** es para cuando tenemos que $X_0 = A \diamond_w \mathcal{I}$. Como $A \subseteq \mathcal{I}$, podemos utilizar **(W $\diamond$ 4)**. $\square$

Demostración de Teorema 3.2.7.

De postulados a construcción: Para un $w \in A$ decimos que $x \leq_w y$ ssi $x = w$ o bien $\{w\} \diamond_w \{x, y\} = \{x\}$. Por los postulados **(W*1)** y **(W $\diamond$ 3)**, esta relación es reflexiva. Si sucede que $x \leq_w y$ y $y \leq_w x$, eso significa que $\{w\} \diamond_w \{x, y\} = \{x\} = \{y\}$, por lo que $x = y$. Luego $\leq_w$ es antisimétrica.

Para ver que es transitiva, supongamos que $x \leq_w y$ y $y \leq_w z$ y veamos que $x \leq_w z$. Si $x = w$ entonces $x \leq_w z$ por definición, por lo que supondremos que $x \neq w$. Esto implica que $y \neq w$ y, análogamente, $z \neq w$. Para este caso analizaremos el resultado de $\{w\} \diamond_w \{x, y, z\}$. Por **(W $\diamond$ 5)**, tenemos que:

- $(\{w\} \diamond_w \{x, y, z\}) \cap \{x, y\} \subseteq \{w\} \diamond_w \{x, y\} = \{x\}$, luego $y \notin \{w\} \diamond_w \{x, y, z\}$;
- $(\{w\} \diamond_w \{x, y, z\}) \cap \{y, z\} \subseteq \{w\} \diamond_w \{y, z\} = \{y\}$, luego $z \notin \{w\} \diamond_w \{x, y, z\}$;

Por lo tanto, $\{w\} \diamond_w \{x, y, z\} \subseteq \{x\}$. Como $\{w\} \diamond_w \{x\} \subseteq \{x, y, z\}$ por **(W*1)**, usamos **(W $\diamond$ 6)** para deducir que $\{w\} \diamond_w \{x, y, z\} = \{w\} \diamond_w \{x\}$. Por **(W $\diamond$ 3)** y **(W*1)** concluimos que $\{w\} \diamond_w \{x\} = \{x\}$. Luego, $\{w\} \diamond_w \{x, y, z\} = \{x\}$. Entonces, $\{w\} \diamond_w \{x, y, z\} \subseteq \{x, z\}$ y $\{w\} \diamond_w \{x, z\} \subseteq \{x, y, z\}$ por **(W*1)**. Se deduce de **(W $\diamond$ 6)** que $\{w\} \diamond_w \{x, y, z\} = \{w\} \diamond_w \{x, z\}$. Luego, $\{w\} \diamond_w \{x, z\} = \{x\}$, lo que significa que $x \leq_w z$. De esta forma, se prueba que $\leq_w$ es un orden. Como asignación, podemos ver que, vía **(W $\diamond$ 4)** $\{w\} \diamond_w \{x, w\} = \{w\}$, la asignación es fiel, es decir w es un mínimo de $\leq_w$.

Veamos ahora que $A \diamond_w B$ cumple la igualdad del enunciado. Por **(WL1)**, sabemos que podemos reescribir $A \diamond_w B$ de la siguiente manera:

$$A \diamond_w B = \bigcup_{w \in A} \{w\} \diamond_w B$$

Esto en particular prueba la igualdad en el caso en que $A = \emptyset$ y para cualquier B , de un lado por **(W $\diamond$ 4)** y del otro porque no habría elementos para unir. Además, si $B = \emptyset$ sabemos por **(W*1)** que $A \diamond_w B = \emptyset$ para cualquier A , mientras que $\min(\emptyset, \leq_w) = \emptyset$ por ser un subconjunto de $\emptyset$. Así que en este caso también coinciden para cualquier A . Por lo que alcanza con probar que, si $B \neq \emptyset$:

$$\{w\} \diamond_w B = \min(B, \leq_w) = \{x \in B \mid \forall y \in B, y \neq x, y \not\leq_w x\}$$

Veamos primero que $\{w\} \diamond_w B \subseteq \min(B, \leq_w)$. Sea $x \in \{w\} \diamond_w B$ y $y \in B$, $y \neq x$, entonces por **(W♦5)**, tenemos que:

$$x \in (\{w\} \diamond_w B) \cap \{x, y\} \subseteq \{w\} \diamond_w \{x, y\}$$

Lo que significa que $\{x\} \subseteq \{w\} \diamond_w \{x, y\} \subseteq \{x, y\}$, en cualquier caso, $y \not\leq_w x$. Por lo tanto, $x \in \min(B, \leq_w)$. Por otro lado, si $x \in \min(B, \leq_w)$, tenemos que $\{x\} \subseteq \{w\} \diamond_w \{x, y\} \subseteq \{x, y\}$ para cualquier $y \in B$. Aplicando esto en **(W♦7)**, con $S = \{\{x, y\} \mid y \in B, y \neq x\}$, resulta que:

$$x \in \bigcap_{y \in B \setminus \{x\}} (\{w\} \diamond_w \{x, y\}) \subseteq \{w\} \diamond_w B$$

Por lo que $x \in \{w\} \diamond_w B$. Concluimos entonces que $\{w\} \diamond_w B = \min(B, \leq_w)$. Por último, notar que la igualdad y **(W♦3)** confirman que $\leq_w$ es bien fundada.

De construcción a postulados: Veamos que $A \diamond_w B = \bigcup_{w \in A} \min(B, \leq_w)$ satisface los postulados:

(W♦5) Sea $w \in \mathcal{I}$. Dado un $x \in \min(B, \leq_w) \cap C$, es claro que $x \in B \cap C$. Si tomamos $y \in B \cap C$, $y \neq x$, tenemos que $y \not\leq_w x$ pues $x \in \min(B, \leq_w)$ y $y \in B$. Luego $x \in \min(B \cap C, \leq_w)$. Luego:

$$C \cap \bigcup_{w \in A} \min(B, \leq_w) \subseteq \bigcup_{w \in A} \min(C \cap B, \leq_w)$$

(W♦6) Sean $A, B, C \subseteq \mathcal{I}$ tales que $A \diamond_w B \subseteq C$ y $A \diamond_w C \subseteq B$. Por la construcción, esto significa que para cualquier $w \in A$ vale que

$$\min(B, \leq_w) \subseteq C \quad \text{y} \quad \min(C, \leq_w) \subseteq B$$

Como $\leq_w$ es bien fundado, tenemos que $\min(B, \leq_w) \neq \emptyset \neq \min(C, \leq_w)$. Supongamos que existe $x \in \min(B, \leq_w)$ tal que $x \notin \min(C, \leq_w)$. Eso significa que existe $y \in \min(C, \leq_w)$ tal que $y \leq_w x$. Pero como $\min(C, \leq_w) \subseteq B$, entonces $y \in B$. Luego $x \leq_w y$ o bien no se relacionan, llegando a una contradicción. Como la hipótesis es simétrica para B y C , tenemos la doble inclusión entre $\min(B, \leq_w)$ y $\min(C, \leq_w)$. Luego, aplicando el resultado en la construcción, tenemos que $A \diamond_w B = A \diamond_w C$.

(W♦7) Sea $w \in \mathcal{I}$ y $S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{I})$, tomamos $x \in \bigcap_{B \in S} \{w\} \diamond_w B = \bigcap_{B \in S} \min(B, \leq_w)$. Si $y \in \bigcup S$ y $x \neq y$, entonces existe $B_y \in S$ tal que $y \in B_y$. Como $x \in \min(B_y, \leq_w)$, se tiene que $y \not\leq_w x$. Como la elección del y fue arbitraria para cualquier elemento de $\bigcup S$, se tiene que $x \in \min(\bigcup S, \leq_w) = \{w\} \diamond_w (\bigcup S)$. En conclusión, $\bigcap_{B \in S} \{w\} \diamond_w B \subseteq \{w\} \diamond_w (\bigcup S)$.

□

Demostración de Teorema 3.2.8. En la prueba del Teorema 3.1.9, para definir la partición, aplicamos los postulados **(W*4)**, **(W*3)** y **(W*5)**. Si restringimos estos postulados al caso en que $A = \{w\}$, es inmediato que son equivalentes a **(W♦4)**, pues $\{w\} \cap B \neq \emptyset$ ssi $\{w\} \subseteq B$, **(W♦3)**, pues $\{w\} \neq \emptyset$, y **(W♦8)**. Por lo que se puede replicar la demostración y para cada $\{w\}$ obtener una partición de $\mathcal{I}$ como lo determina el Teorema 3.1.9. Por el Corolario 3.1.10 estas particiones están en relación uno a uno con preórdenes totales, definiendo una asignación faithful con cada $\{w\}$. Finalmente, aplicando **(WL1)**, se deduce la igualdad que queríamos probar.

Ahora veamos que **(W♦8)** implica **(W♦5)**, **(W♦6)** y **(W♦7)**:

(W♦5) Si $(A \diamond_w B) \cap C = \emptyset$ entonces se deduce trivialmente, si no, aplicando **(WL1)** notamos A' al conjunto de $w \in A$ tales que $(\{w\} \diamond_w B) \cap C \neq \emptyset$. Luego, por **(W♦8)**, se tiene que $(\{w\} \diamond_w B) \cap C = \{w\} \diamond_w (B \cap C)$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} (A \diamond_w B) \cap C &= \bigcup_{w \in A} (\{w\} \diamond_w B) \cap C \\ &= \bigcup_{w \in A'} \{w\} \diamond_w (B \cap C) \\ &\subseteq \bigcup_{w \in A} \{w\} \diamond_w (B \cap C) = A \diamond_w (B \cap C) \end{aligned}$$

(W♦6) Supongamos que $A \diamond_w B \subseteq C$ y $A \diamond_w C \subseteq B$. Si $A \diamond_w B = \emptyset$ entonces por **(W♦3)** tenemos que $A = \emptyset$ o bien $B = \emptyset$. En cualquier caso, notar que $A \diamond_w C = \emptyset$ por hipótesis o usando **(W♦4)**. Luego, $A \diamond_w B = A \diamond C = \emptyset$. La situación es simétrica si $A \diamond_w C = \emptyset$. Supongamos entonces que $A \diamond_w B \neq \emptyset \neq A \diamond_w C$. Aplicando **(W♦8)** y **(WL1)** similar a como lo hicimos antes, tenemos que:

$$\begin{aligned} A \diamond_w B = (A \diamond_w B) \cap C &= \bigcup_{w \in A} (\{w\} \diamond_w B) \cap C \\ &= \bigcup_{w \in A} \{w\} \diamond_w (B \cap C) \\ &= A \diamond_w (B \cap C) \end{aligned}$$

Una vez más, esto también aplica a $A \diamond_w C$, resultando que:

$$A \diamond_w B = A \diamond_w (B \cap C) = A \diamond C$$

(W♦7) Si $w \in \mathcal{I}$ y $S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{I})$, por **(W♦8)** sabemos que $(\{w\} \diamond_w (\bigcup S)) \cap B = \{w\} \diamond_w B$ para cualquier $B \in S$ tal que $(\{w\} \diamond_w (\bigcup S)) \cap B \neq \emptyset$. Tomamos $S' \subseteq S$ el subconjunto de tales elementos B . Entonces:

$$\bigcup_{B \in S'} \{w\} \diamond_w B = \{w\} \diamond_w (\bigcup S)$$

En particular, tenemos que $\bigcap_{B \in S'} \{w\} \diamond_w B \subseteq \{w\} \diamond_w (\bigcup S)$, por lo tanto:

$$\bigcap_{B \in S} \{w\} \diamond_w B \subseteq \{w\} \diamond_w (\bigcup S)$$

□

Capítulo 4

Shielded Contraction sobre Mundos

Si este es el mejor de los mundos posibles, ¡Cómo serán los otros!

Candide, M. de Voltaire (1758)

En la Sección 2.5 definimos las familias de operadores shielded contraction y credibility-limited revision para una teoría K . En ambos casos existe un conjunto fijo de fórmulas retractables $\mathcal{R}$ o bien creíbles $\mathcal{C}$, que determina si la fórmula puede o no generar un cambio en el conjunto de creencias. A través de la identidad de Harper estos conjuntos se relacionan por la negación: si $\neg\mu \in \mathcal{C}$ entonces $\mu \in \mathcal{R}$. En este capítulo nos enfocaremos en adaptar esta idea a nuestro marco actual centrándonos en $\mathcal{C}$, y la usaremos para construir operadores world shielded contraction.

Recordemos además que para esos operadores tanto el conjunto de creencias como el de credibilidad son fijos. Como en el marco conceptual de mundos consideramos al conjunto de creencias como un parámetro, esto nos motiva a considerar que el conjunto de credibilidad dependa del conjunto de creencias. De hecho, podemos entender que estos conjuntos representan una información extralógica dado un conjunto de creencias. También en nuestro marco tenemos que el conjunto de creencias y la observación se interpretan de la misma manera. Es por eso que decidimos trabajar con relaciones *credible* sobre $\mathcal{P}(\mathcal{I})$, donde los conjuntos de creencias se relacionan con las observaciones. Tal cambio es una simplificación notacional que nos ayuda a percibir a ambos parámetros en una misma categoría, pero que resulta equivalente a la propuesta original: fijado un conjunto de creencias A , el conjunto de observaciones creíbles se define a partir de todas las observaciones B tales que A se relacione con B .

Las relaciones *credible* parecen entonces enriquecer la estructura conceptual de los operadores de mundos vistos hasta el momento, tal y como lo hacen los conjuntos retractables y de credibilidad en el caso clásico. Pero luego de estudiar la versión adaptada de shielded contraction para mundos, veremos que esta familia de operadores es en realidad la familia de operadores elementary world contraction. Esto significa además que las funciones world-selection capturan la información que se genera a partir de una relación *credible* en el contexto de cambio de creencias. A la luz de este resultado, reflexionaremos sobre las identidades de Levi y Harper y analizaremos el vínculo entre los operadores elementary world revision y credibility-limited revision.

4.1 Operadores World Shielded Contraction

En general, los operadores no priorizados que vimos en el Capítulo 2 incluyen una condición extralógica que determina si se realiza el cambio de creencias o no. Es decir, tienen un condicional que decide entre preservar completamente su conjunto de creencias o aplicar un

operador priorizado. En el caso de los operadores shielded contraction, como su nombre lo indica, nos referimos a operadores contraction. En nuestro marco conceptual, el condicional que usaremos es una relación definida sobre $\mathcal{P}(\mathcal{I})$.

Definición 4.1.1. Sean $\prec$ una relación definida sobre $\mathcal{P}(\mathcal{I})$ y $-_w$ un operador weak prioritized world contraction que satisface **(W-1)**, **(W-2)** y **(W-3)**. Definimos el operador *world shielded contraction* $\ominus_w : \mathcal{P}(\mathcal{I}) \times \mathcal{P}(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I})$ como:

$$A \ominus_w B = \begin{cases} A -_w B & \text{Si } A \prec B^c \\ A & \text{Caso contrario} \end{cases}$$

Si el operador $-_w$ además satisface **(W-3)**, diremos que el operador $\ominus_w$ es *basic*.

Recordemos que un operador contraction reduce la información que tiene un conjunto de creencias agregando nuevos mundos inconsistentes con B . Por lo que un operador shielded contraction, para decidir contraer por una observación B , debe considerar creíble B^c , ya que seleccionará a un subconjunto de B^c para agregar a su nuevo conjunto de creencias.

A partir de la Definición 4.1.1 es posible construir dos operadores world shielded contraction diferentes (i.e. definidos por diferentes relaciones creíble y operadores weak prioritized world contraction) con el mismo comportamiento para cualquier par (A, B) . Esto sucede porque $A \ominus_w B = A$ puede valer por dos motivos diferentes: o bien $A \not\prec B^c$, y es el caso por definición, o bien $A \prec B^c$ y $\sigma_-(A, B) = \emptyset$, siendo σ_- la función world-selection del operador priorizado $-_w$ asociado. De esta manera, cualquier par (A, B) tal que $\sigma_-(A, B^c) = \emptyset$ puede descartarse o incluirse en $\prec$ y no cambiaría el comportamiento de $\ominus_w$. Por lo tanto, es posible decidir qué pares se relacionan o no en estos casos para utilizar los resultados vistos en la Sección 4.2. La perspectiva de que la información relevante de $\prec$ sea aquella en la que σ_- dé resultados no vacíos nos permite caracterizar a la familia de operadores world shielded contraction y ver que, en realidad, es la familia de operadores elementary world contraction.

Teorema 4.1.2. Sea el operador $\ominus_w : \mathcal{P}(\mathcal{I}) \times \mathcal{P}(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\ominus_w$ es un operador world shielded contraction según la Definición 4.1.1.
2. $\ominus_w$ es un operador elementary world contraction (i.e., satisface **(W-1)** y **(W-2)**).

Más aún, los operadores world shielded contraction están en correspondencia uno a uno con los operadores elementary world contraction, donde:

$$A \prec B \quad \text{si y sólo si} \quad \sigma(A, B^c) \neq \emptyset$$

Demostración en la página 60, al final del capítulo.

Este teorema no sólo confirma que la familia de los operadores world shielded contraction es en realidad la familia de operadores elementary world contraction que vimos en el capítulo anterior, sino que también da una manera sistemática de diferenciar operadores world shielded contraction.

Ahora bien, analicemos si la relación definida se comporta acorde a la noción de credibilidad. Por ejemplo, si tomamos el postulado **(W-4)** o equivalentemente la propiedad de σ de ser standard, se fuerza a que si $\emptyset \neq A \subseteq B$ entonces $\sigma(A, B^c) = \emptyset$. Lo mismo sucede con la propiedad de σ de ser normal, sólo que haciendo referencia a los pares (A, B) tales que $A \cap B \neq \emptyset$. Si usamos la idea de que $A \prec B$ si $\sigma(A, B^c) \neq \emptyset$, se puede llegar a interpretar que toda B observación aceptada o indeterminada sea no creíble. Por lo que la relación del teorema anterior puede no coincidir con nuestra interpretación usual de credibilidad. Pero aprovechando que es posible decidir libremente qué pares (A, B) que satisfacen $\sigma(A, B^c) = \emptyset$ se pueden interpretar como creíbles o no, podemos considerar una relación que modele de manera más natural la noción de credibilidad. Por ejemplo, si $A = \emptyset$ ó $A \cap B \neq \emptyset$ o bien $\sigma(A, B^c) \neq \emptyset$, entonces B debería interpretarse como creíble en A .

Teorema 4.1.3. Sea $\mathcal{R}$ una relación sobre $\mathcal{P}(\mathcal{I})$ y sea $-_w$ un operador weak prioritized world contraction (i.e., que satisface $(W-1)$, $(W-2)$ y $(W\blacklozenge 3)$). Construimos el siguiente operador world shielded contraction $\%_w : \mathcal{P}(\mathcal{I}) \times \mathcal{P}(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I})$ como:

$$A\%_w B = \begin{cases} A -_w B & \text{Si } ARB^c \\ A & \text{Caso contrario} \end{cases}$$

Entonces, existe un operador world shielded contraction $\ominus_w$ equivalente a $\%_w$ tal que, si $A\%_w B = A \cup \sigma(A, B)$ con σ la función world-selection que representa $\%_w$ como operador elementary world contraction, la relación que define a $\ominus_w$ es:

$$A \prec B \quad \text{si y sólo si} \quad (A \cap B) \cup \sigma(A, B^c) \neq \emptyset \text{ ó } A = \emptyset$$

Demostración en la página 60, al final del capítulo.

Los Teoremas 4.1.2 y 4.1.3 nos muestran que a partir de las funciones world-selection obtenemos relaciones que asocian operadores world shielded contraction con operadores elementary world contraction. Esto refuerza el concepto de que las funciones world-selection representan la información extralógica del agente.

Definición 4.1.4. Dada una función world-selection σ , consideramos las siguientes relaciones sobre $\mathcal{P}(\mathcal{I})$:

- $A \prec_{\perp} B$ dada por $\sigma(A, B^c) \neq \emptyset$, es la relación *significativa*;
- $A \prec_{\top} B$ dada por $\sigma(A, B^c) = \emptyset$ y o bien $A = \emptyset$ ó $A \cap B \neq \emptyset$, es la relación *tautológica*;
- $A \prec B$ dada por $A \prec_{\perp} B$ o bien $A \prec_{\top} B$ es la relación *credible* y coincide con la relación asociada a un operador elementary world contraction considerada en el Teorema 4.1.3.

La definición anterior explicita qué relaciones es posible definir a partir de una función world-selection. Esto nos permite movernos entre las familias de operadores world shielded contraction y las elementary world contraction. La relación $\prec_{\perp}$ es el menor subconjunto con el cual podemos asociar a la familia de operadores elementary world contraction con la familia de world shielded contraction. La relación $\prec$ también nos permite esta asociación, con la diferencias de que $\prec$ tiene un comportamiento que modela mejor la noción de credibilidad.

Veamos qué sucede cuando σ satisface algunas propiedades de las funciones world-selection que vimos en el Capítulo 3. Si σ es strong standard (aprovechando que además de standard también incluye los casos $A = \emptyset$), tenemos que si $A \subseteq B$ entonces $A \prec_{\top} B$, mientras que si es normal, sucede que $A \prec_{\top} B$ equivale a que $A = \emptyset$ o bien $A \cap B \neq \emptyset$. Esto último fuerza a que $A \prec B$ y $A \cap B = \emptyset \neq B$ si y sólo si $A \prec_{\perp} B$, teniendo así una vinculación explícita entre las relaciones significativa y credible de σ . Pero notemos que, en ambos casos, las propiedades de standard o normal no generan cambios en la relación $\prec$, sólo sucede que pares (A, B) que podrían cumplir $A \prec_{\perp} B$ ahora están forzados a cumplir $A \prec_{\top} B$.

En el caso de que σ sea semantically successful under consistency, sucede que si $A \neq \emptyset \neq B$ y $A \cap B = \emptyset$, entonces $\sigma(A, B^c) \neq \emptyset$, por lo que $A \prec_{\perp} B$. Es decir, $A \prec B$ si y sólo si $B \neq \emptyset$ ó $A = B = \emptyset$, la relación credible más grande posible. Como caso particular, lo mismo sucede si σ es semantically successful. Ambos coinciden con lo que la relación representa en este contexto: el agente siempre realiza un cambio en sus creencias ante una observación consistente.

Existen más propiedades que se pueden considerar para las relaciones, basadas en las propiedades que los autores en [6], [21] consideraron para los operadores shielded contraction y credibility-limited revision. En la siguiente sección las presentaremos en el marco conceptual de mundos y en términos de relaciones. Se destaca además que, si bien las propiedades a considerar están inspiradas en lo que ocurre con los operadores de cambio, las definiciones de las relaciones y sus propiedades no están determinadas por los mismos.

4.2 Relaciones Credible en Mundos

En el marco conceptual de mundos utilizaremos relaciones credíble para representar aquellas situaciones en que una observación B se considera apta para cambiar un conjunto de creencias A . En la sección anterior identificamos algunas de estas situaciones: cuando $A \cap B \neq \emptyset$ y cuando $A = \emptyset$. Podemos agregar también casos donde una observación no es creíble, como ser cuando $A \neq \emptyset$ y $B = \emptyset$, es decir, que la observación inconsistente no es creíble para conjunto de creencias consistentes.

Definición 4.2.1. Sea $\prec$ una relación definida sobre $\mathcal{P}(\mathcal{I})$. Diremos que $\prec$ es:

pro-consistent observation si cumple que si $A \prec \emptyset$, entonces $A = \emptyset$;

compatible si cumple que si $A = \emptyset$ ó $A \cap B \neq \emptyset$ entonces $A \prec B$.

Una relación $\prec$ definida sobre $\mathcal{P}(\mathcal{I})$ pro-consistent observation y compatible la llamaremos *credíble* y representará las siguientes actitudes epistémicas:

- B es creíble en A si $A \prec B$;
- B es no creíble en A si $A \not\prec B$.

Así, las relaciones credíble asociadas a funciones world-selection son un caso particular de las relaciones credíble consideradas en esta sección.

Corolario 4.2.2. Sea σ una función world-selection y $\prec$ su relación asociada. Entonces $\prec$ es pro-consistent observation y compatible.

Existen otras propiedades, basadas en [6], [21], vinculadas a la estructura de conjuntos de $\mathcal{P}(\mathcal{I})$ que simplifican la representación de la relación.

Definición 4.2.3. Sea $\prec$ una relación definida sobre $\mathcal{P}(\mathcal{I})$. Diremos que es:

closed over inclusion si cumple que si $A \prec B$ y $B \subseteq B'$ entonces $A \prec B'$;

union complete si cumple que si $A \prec (\bigcup S)$ para un $S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{I}) \setminus \{\emptyset\}$ entonces existe $B \in S$ tal que $A \prec B$;

complement complete si cumple que $A \prec B$ ó $A \prec B^c$ para cualquier $A, B \subseteq \mathcal{I}$;

core definable si existe una función $\alpha : \mathcal{P}(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I})$, que llamaremos *core*, tal que $A \prec B$ es equivalente a $\alpha(A) \cap B \neq \emptyset$, a menos que $A = B = \emptyset$;

closed over inverted inclusion si cumple que si $A \prec B$, $A \cap B = \emptyset$ y $\emptyset \neq B' \subseteq B$ entonces $A \prec B'$;

union distributive si cumple que si $A \prec B$ y $A \cap B = \emptyset$ para todo $B \in S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{I}) \setminus \{\emptyset\}$ entonces $A \prec (\bigcup S)$.

frame definable si existe una función $\Omega : \mathcal{P}(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I})$, que llamaremos *frame*, tal que si $A \cap B = \emptyset$ y $B \neq \emptyset$ entonces $A \not\prec B$ equivale a $\Omega(A) \cap B \neq \emptyset$.

En el contexto de relaciones de credibilidad, la propiedad de ser closed over inclusion representa el comportamiento de que si una observación B es creíble, también debe ser creíble cualquier observación B' que la contenga, ya que es más débil. Union complete se refiere a que si la unión de una colección de observaciones es creíble es porque hay una de esas observaciones que se la considera creíble. Complement complete significa que o bien una observación o su complemento es creíble. Por último, core definable emula una extensión del conjunto de creencias A : así como $A \cap B \neq \emptyset$ representa que B es no rechazada en A , $\alpha(A) \cap B \neq \emptyset$ representa que B es creíble en A . Muchas de estas propiedades están

inspiradas en algunas condiciones dadas para el conjunto de credibilidad $\mathcal{C}$ en [21] fijado un conjunto de creencias A , como ser single sentence closure, disjunctive completeness y negation completeness. Ahondaremos en esto cuando adaptemos el marco conceptual de mundos a lógicas, en el Capítulo 7.

También se pueden considerar comportamientos inversos a los anteriores. Por ejemplo, en el caso de closed over inclusion, closed over inverted inclusion se trata de considerar creíbles observaciones más fuertes a las que ya se consideran creíbles, con la condición de que tales observaciones sean rechazadas por A . En el mismo sentido tenemos a union distributive, respecto de union complete, que afirma que la unión de observaciones creíbles rechazadas debe ser creíble. Frame definable define un comportamiento similar al de core definable, pero como viene ocurriendo con los comportamientos inversos, solamente se enfoca en identificar qué pares que cumplen $A \cap B = \emptyset \neq B$ quedan afuera de la relación.

Las propiedades propuestas para $\prec$ pueden vincularse. Comenzaremos viendo qué podemos deducir cuando $\prec$ es closed over inclusion.

Proposición 4.2.4. *Sea $\prec$ una relación definida sobre $\mathcal{P}(\mathcal{I})$ closed over inclusion. Entonces:*

1. *es union distributive;*
2. *Si vale que $\emptyset \prec \emptyset$, entonces $\emptyset \prec B$ para todo $B \subseteq \mathcal{I}$;*
3. *Si es union complete y $B \neq \emptyset$, entonces $A \prec B$ si y sólo si existe $w \in B$ tal que $A \prec \{w\}$;*
4. *Si es union complete y además vale que si $A \neq \emptyset$ entonces existe B tal que $A \not\subseteq B$ y $A \prec B$, entonces es complement complete;*

Demostración en la página 61, al final del capítulo.

Otra vinculación la podemos encontrar entre closed over inverted inclusion, union distributive y frame definable.

Proposición 4.2.5. *Sea $\prec$ una relación definida sobre $\mathcal{P}(\mathcal{I})$, entonces es closed over inverted inclusion y union distributive si y sólo si es frame definable. En tal caso:*

$$\Omega(A) = \{w \in \mathcal{I} \mid A \not\prec \{w\}\}$$

Demostración en la página 61, al final del capítulo.

Los casos core definable y compatible son de mayor interés, por lo que los analizaremos de de manera más detallada. En la definición de core definable se evita el caso $(\emptyset, \emptyset)$ ya que no puede ser representado mediante la intersección. En el siguiente teorema veremos que esta propiedad además puede ser vista como equivalente a ser simultáneamente pro-consistent observation, closed over inclusion y union complete.

Teorema 4.2.6. *Sea $\prec$ una relación definida sobre $\mathcal{P}(\mathcal{I})$, entonces $\prec$ es pro-consistent observation, closed over inclusion y union complete si y sólo si es core definable. En tal caso, la función core se puede construir de las siguientes maneras:*

$$\alpha(A) = \{w \in \mathcal{I} \mid A \prec \{w\}\} = \bigcap_{A \not\prec B^c} B$$

Más aún, si $\prec$ es:

1. *complement complete, entonces α es no vacía;*
2. *closed over inverted inclusion, entonces $\alpha(A) \subseteq A$ o bien $A^c \subseteq \alpha(A)$ para cada $A \subseteq \mathcal{I}$;*
3. *compatible, entonces $A \subseteq \alpha(A)$ si $A \neq \emptyset$ y $\alpha(\emptyset) = \mathcal{I}$.*

Demostración en la página 61, al final del capítulo.

Del Teorema 4.2.5 y 4.2.6 podemos concluir que $\Omega(A) = \alpha(A)^c$, por lo que es posible intuir un comportamiento dual. Sin embargo, notar que cuando usamos $\Omega(A)$, lo hacemos suponiendo que $A \cap B = \emptyset \neq B$, mientras que para $\alpha(A)$ pedimos que $A \neq \emptyset$ ó $B \neq \emptyset$.

Para finalizar, tenemos la propiedad compatible. Esta propiedad, en principio, da una base mínima de casos creíbles. El hecho de que los casos no rechazados estén incluidos en la relación, hace que sólo nos preocupemos por los casos rechazados, simplificando y validando otras propiedades.

Teorema 4.2.7. *Sea $\prec$ una relación definida sobre $\mathcal{P}(\mathcal{I})$. Si $\prec$ es compatible entonces es complement complete, $\emptyset \prec B$ para todo $B \subseteq \mathcal{I}$ y si $A \neq \emptyset$ entonces existe B tal que $A \not\subseteq B$ y $A \prec B$. Más aún, si $\prec$ es:*

1. *closed over inverted inclusion entonces es union complete;*
2. *frame definable y pro-consistent observation, entonces:*

$$A \prec B \quad \text{si y sólo si} \quad A = \emptyset \text{ ó } A \cap B \neq \emptyset \text{ ó } A \cap B = \emptyset \neq B, \Omega(A) \cap B = \emptyset$$

3. *closed over inverted inclusion y core definable entonces es frame definable con la función Ω definida como $\Omega(A) = \alpha(A)^c$ y para cada $A \subseteq \mathcal{I}$ vale que $\alpha(A) = A$ o bien $\alpha(A) = \mathcal{I}$.*

Demostración en la página 62, al final del capítulo.

Estos resultados nos permiten clasificar las relaciones credible según las propiedades analizadas y sus combinaciones.

Definición 4.2.8. Diremos que una relación credible $\prec$ es:

bottom-up si además satisface closed over inclusion;

top-down si además satisface closed over inverted inclusion;

core si además es core definable;

frame si además es frame definable;

dichotomic si además es core y frame definable.

Habiendo conceptualizado nociones de credibilidad y considerado algunas propiedades posibles, aplicaremos esta estructura para clasificar operadores world shielded contraction.

4.3 Propiedades de Relaciones Credible en Funciones World-selection

En la Sección 4.2 identificamos propiedades que las relaciones credible pueden cumplir para reflejar cierto comportamiento posible de esta dinámica. Cabe preguntarnos entonces, ¿bajo qué propiedades de las funciones world-selection, su relación credible $\prec$ satisface tales propiedades?

Definición 4.3.1. Sea σ una función world-selection. Diremos que σ es:

weak null-monotonic si satisface que dado $S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{I}) \setminus \{\mathcal{I}\}$, si $A \subseteq \bigcap S$ y $\sigma(A, \bigcap S) = \emptyset$ entonces existe $B \in S$ tal que $\sigma(A, B) = \emptyset$;

null-monotonic si satisface que si $\sigma(A, B) = \emptyset$ y $\emptyset \neq A \subseteq B \subseteq B'$ entonces $\sigma(A, B') = \emptyset$;

weak inverted null-monotonic si satisface que dado $S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{I}) \setminus \{\mathcal{I}\}$, si para todo $B \in S$ se tiene que $\emptyset \neq A \subseteq B$ y $\sigma(A, B) = \emptyset$ entonces $\sigma(A, \bigcap S) = \emptyset$;

inverted null-monotonic si satisface que si $\sigma(A, B) = \emptyset$ y $\emptyset \neq A \subseteq B' \subseteq B \neq \mathcal{I}$ entonces $\sigma(A, B') = \emptyset$;

Estas definiciones determinan propiedades que se relacionan directamente con el contrarrecíproco de las propiedades para las relaciones credible de la Definición 4.2.3.

Teorema 4.3.2. *Sea σ una función world-selection y $\prec$ su relación credible asociada. Entonces:*

1. $\prec$ es closed over inclusion si y sólo si σ es null-monotonic;
2. $\prec$ es closed over inverted inclusion si y sólo si σ es inverted null-monotonic;
3. $\prec$ es union complete si y sólo si σ es weak inverted null-monotonic;
4. $\prec$ es union distributive si y sólo si σ es weak null-monotonic;
5. Si $\prec$ es core definable, entonces su función core se puede representar como:

$$\alpha(A) = A \cup \bigcup_{w \in A^c} \sigma(A, \{w\}^c)$$

Demostración en la página 62, al final del capítulo.

De esta manera, todas las propiedades de las relaciones credible que no se deducen directamente por la construcción están representadas una a una por propiedades de las funciones world-selection. Esto nos ayuda a entender qué subfamilias de operadores están entre los operadores elementary world contraction y weak prioritized world contraction. Las propiedades de las funciones world-selection las entendimos como monotonía en el segundo parámetro en caso de que la respuesta de la función sea vacío. Las propiedades weak null-monotonic y weak inverted null-monotonic son las versiones más débiles de monotonía, en el sentido de que la misma vale para algunos subconjuntos. Después tenemos las versiones más fuertes de monotonía. Vía el Teorema 4.2.6, la combinación de estas cuatro propiedades nos permite reescribir la relación con una función core α .

Definición 4.3.3. Sea $-_w$ un operador elementary world contraction, que satisface (W-1) y (W-2) y sea σ su función world-selection asociada. Decimos que el operador es:

bottom-up world contraction si σ es null-monotonic;

top-down world contraction si σ es inverted null-monotonic;

core world contraction si σ es null-monotonic y weak inverted null-monotonic;

frame world contraction si σ es inverted null-monotonic y weak null-monotonic;

dichotomic world contraction si σ es null-monotonic e inverted null-monotonic;

La subfamilia dichotomic lleva su nombre porque, como lo afirma el Teorema 4.2.7, para cada A se tiene que $\alpha(A) = A$ o bien $\alpha(A) = \mathcal{I}$. Es decir, para cada A o bien $\sigma(A, \{w\}^c) = \{w\}$ para todo $w \in A^c$ o bien $\sigma(A, \{w\}^c) = \emptyset$ para todo $w \in A^c$.

Fijemos un $A \neq \emptyset$ y supongamos que $\sigma(A, \{w\}^c) = \emptyset$ para todo $w \in A^c$. Si tomamos B tal que $A \subseteq B$, como existe $w \in A^c$ tal que $B \subseteq \{w\}^c$, tenemos que $\sigma(A, B) = \emptyset$ por ser inverted null-monotonic. En conclusión, $\sigma(A, B) = \emptyset$ para cualquier B aceptado por A . Esto significa que toda observación no aceptada por A es retractable, es decir, mientras que los casos interesantes a contraer no son retractables. Como situación extrema, esto

podría pasar con todos los conjuntos de creencias, que combinado con que σ sea normal, nos queda el operador elementary world contraction trivial $A - B = A$.

Supongamos ahora, nuevamente fijado $A \neq \emptyset$, que $\sigma(A, \{w\}^c) = \{w\}$ para todo $w \in A^c$. Si $A \subseteq B$, y aplicando la misma idea de antes pero el contrarrecíproco de null-monotonic, obtenemos que $\sigma(A, B) \neq \emptyset$. Si esto sucediera para todo conjunto de creencias, tendríamos un operador weak prioritized world contraction, donde la función core es constantemente $\mathcal{I}$.

Como ocurrió en el capítulo anterior, las propiedades de las funciones world-selection pueden capturarse vía postulados de operadores world contraction.

Definición 4.3.4. Dados $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{I})$, se consideran los siguientes postulados para un operador $-_w : \mathcal{P}(\mathcal{I}) \times \mathcal{P}(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I})$:

- (W $\ominus$ 1) Si $A -_w B \subseteq B$ y $B \subseteq B'$ entonces $A -_w B' \subseteq B'$ (success propagation).
- (W $\ominus$ 2) Si $A -_w B \subseteq B$ y $A \subseteq B' \subseteq B \neq \mathcal{I}$ entonces $A -_w B' \subseteq B'$ (success reduction).
- (W $\ominus$ 3) Si $A \neq \emptyset$ entonces existe C tal que $A -_w B \not\subseteq B$ si y sólo si $C \not\subseteq B$ (core success).
- (W $\ominus$ 4) Si $A \neq \emptyset$ entonces existe C tal que $A -_w B \not\subseteq B$ si y sólo si $A \not\subseteq B$ o bien $C \subseteq B \neq \mathcal{I}$ (frame success).

Los postulados success propagation (W $\ominus$ 1) y success reduction (W $\ominus$ 2) hacen referencia a las propiedades de monotonía de las funciones world-selection. Las propiedades weak null-monotonic o weak inverted null-monotonic no pueden representarse con postulados que eviten utilizar uniones e intersecciones arbitrarias, pero sí pueden capturarse al combinarlas con otras propiedades. Sabemos de la Sección 4.2 que estas combinaciones redundan en tener las funciones core y frame, representadas vía postulados por (W $\ominus$ 3) y (W $\ominus$ 4) respectivamente. Finalizaremos esta sección caracterizando las propiedades de las funciones world-selection asociadas a operadores elementary world contraction vía postulados.

Teorema 4.3.5. Sea $-_w$ un operador elementary world contraction, i.e. que satisfice (W-1) y (W-2). Entonces:

1. $-_w$ es un operador bottom-up world contraction si y sólo si satisfice (W $\ominus$ 1);
2. $-_w$ es un operador top-down world contraction si y sólo si satisfice (W $\ominus$ 2);
3. $-_w$ es un operador core world contraction si y sólo si satisfice (W $\ominus$ 3);
4. $-_w$ es un operador frame world contraction si y sólo si satisfice (W $\ominus$ 4).

Demostración en la página 63, al final del capítulo.

De esta manera, diversificamos aún más el árbol de familias de los operadores elementary world contraction. Cabe preguntarnos entonces si ocurre lo mismo que en el Capítulo 3, donde las propiedades de las funciones world-selection también podían reflejarse en términos de operadores elementary world revision.

Por otro lado, tenemos que los operadores world shielded contraction deberían corresponderse con las versiones world de los operadores credibility-limited revision, pero ya vimos que los operadores elementary world contraction están en correspondencia con los operadores elementary world revision, que son priorizados. En la siguiente sección analizaremos qué sucede con las identidades de Levi y Harper relacionadas con los estos operadores.

4.4 Operadores World Non-consistent Revision

En lo que va de este capítulo, probamos que la familia de operadores world shielded contraction es equivalente a la familia de operadores elementary world contraction y vimos que las propiedades en términos de las relaciones credible se pueden representar según las funciones world-selection asociadas a los operadores, i.e., cada subfamilia de world shielded contraction se corresponde unívocamente a otra subfamilia generada por una apropiada función de world-section. Esto entra en conflicto con algunos supuestos implícitos: uno es que el dual en términos de Levi y Harper de esta familia es la de operadores elementary world revision, operadores que son priorizados, ya que satisfacen el postulado de success (**W*1**). Cabe aclarar que esto ya había sido observado en el trabajo seminal de shielded contraction y credibility-limited revision, pero la decisión que se tomó fue acondicionar la identidad de Levi para que tal dualidad funcione como vimos en la Sección 2.5. El otro supuesto es que las relaciones credible de los operadores shielded contraction son un enriquecimiento distintivo y separado del operador contraction asociado, en el sentido de que se piensa a este tipo de operaciones como de dos pasos: primero se decide qué hacer (vía la relación) y luego se opera (vía el operador priorizado). Sin embargo, de los resultados anteriores, a partir de una función world-selection σ podemos tener:

- Un operador elementary world contraction definido como $A -_w B = A \cup \sigma(A, B)$;
- Un operador elementary world revision definido como $A *_w B = (A \cap B) \cup \sigma(A, B^c)$ vía identidad de Harper del operador elementary world contraction definido anteriormente;
- Una relación credible $\prec_\perp$ donde $A \prec_\perp B$ si y sólo si $\sigma(A, B^c) \neq \emptyset$;
- Una relación credible $\prec$ donde $A \prec B$ si y sólo si $(A \cap B) \cup \sigma(A, B^c) \neq \emptyset$ ó $A = \emptyset$;
- Un operador shielded contraction que coincide con el operador elementary world contraction, definido por $\prec_\perp$ o bien $\prec$ y un operador weak prioritized world contraction que extienda al operador $-_w$ en los casos en que $\sigma(A, B) = \emptyset$.

Podemos ver que el dual de los operadores world shielded contraction, en términos de las Identidades de Levi y Harper y de la relación $\prec$, está enfocado en la consistencia del nuevo conjunto de creencias, no en su éxito (success). Esto se corresponde con los resultados de los Teoremas 3.1.5 y 3.2.4, donde los operadores (weak) consistent world revision, cuya función world-selection es semantically successful, se corresponden con los operadores (weak) prioritized world contraction.

Dado que los postulados de la Definición 4.3.4 son versiones más débiles del postulado contraction success (**W-3**), lo mismo entonces debe existir para el postulado consistency (**W*3**) de los operadores consistent world revision.

Definición 4.4.1. Dados $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{I})$, se consideran los siguientes postulados para un operador $*_w : \mathcal{P}(\mathcal{I}) \times \mathcal{P}(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I})$:

- (**W○1**) Si $(A *_w B) \cap B \neq \emptyset$ y $B \subseteq B'$ entonces $(A *_w B') \cap B' \neq \emptyset$ (consistent propagation).
- (**W○2**) Si $(A *_w B) \cap B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$ y $\emptyset \neq B' \subseteq B$ entonces $(A *_w B') \cap B' \neq \emptyset$ (consistent reduction).
- (**W○3**) Si $A \neq \emptyset$ entonces existe C tal que $(A *_w B) \cap B \neq \emptyset$ si y sólo si $C \cap B \neq \emptyset$ (core consistency).
- (**W○4**) Si $A \neq \emptyset$ entonces existe C tal que $(A *_w B) \cap B \neq \emptyset$ si y sólo si $A \cap B \neq \emptyset$ ó $C \cap B = \emptyset \neq B$ (frame consistency).

A los operadores elementary world revision $*_w$, que satisfacen **(W*1)** y **(W*2)**, los llamaremos *bottom-up world revision* si cumplen **(W◦1)** y *core world revision* si además satisfacen **(W◦3)**. En cambio, a los operadores elementary world revision que cumplan **(W◦1)** se los conoce como *top-down world revision* si satisfacen **(W◦2)** y *frame world revision* si además satisfacen **(W◦4)**. A los operadores elementary world revision que cumplan simultáneamente **(W◦3)** y **(W◦4)** los llamaremos *dichotomic world revision*.

Cada postulado está en correspondencia con los de la Definición 4.3.4. Por otro lado, en combinación con el postulado success **(W*1)**, es posible reemplazar las instancia de $(A *_w B) \cap B$ por $A *_w B$.

Teorema 4.4.2. *Sea $*_w$ un operador elementary world revision, i.e. que satisfice **(W*1)** y **(W*2)** y $-_w$ su operador elementary world contraction asociado. Entonces:*

1. $*_w$ satisfice **(W◦1)** si y sólo si $-_w$ satisfice **(W◦1)**;
2. $*_w$ satisfice **(W◦2)** si y sólo si $-_w$ satisfice **(W◦2)**;
3. $*_w$ satisfice **(W◦3)** si y sólo si $-_w$ satisfice **(W◦3)**;
4. $*_w$ satisfice **(W◦4)** si y sólo si $-_w$ satisfice **(W◦4)**.

Demostración en la página 64, al final del capítulo.

Es posible que llame la atención que la credibilidad es la que determina la consistencia de estos operadores revision. Eso no sería muy grave, y hasta podría considerarse correcto cuando la observación es creíble, pero el problema es que ante algo no creíble devuelve un conjunto de creencias inconsistente. Si aplicásemos la identidad de Levi a un operador $\ominus_w$ world shielded contraction (es decir, $(A \ominus_w B^c) \cap B$ al resultado), construido a partir de un operador weak prioritized world contraction $-_w$ y una relación creíble $\prec$, definiría el siguiente operador:

$$(A \ominus_w B^c) \cap B = \begin{cases} A *_w B & \text{Si } A \prec B \\ A \cap B & \text{Caso contrario} \end{cases}$$

donde $*_w$ es el operador weak consistent world revision asociado al operador contraction $-_w$. Se puede apreciar que ante una observación no creíble, ¡el operador aplica una expansión! Es difícil identificar un agente que se comporte de esta manera, que a lo que considera no creíble decida utilizarlo para expandir su conjunto de creencias. Esto motivó a que se definiera un operador como *credibility-limited revision*, que ante lo no creíble preserva el conjunto de creencias original.

A pesar de esto, no ser capaz de modelar un comportamiento deseado no debe ser motivo suficiente para descartar un operador de cambio. Es importante destacar que el origen de este operador es diferente al resto: surge de aplicar una generalización teórica que creemos válida como la Identidad de Levi a un operador contraction construido. Este tipo de construcciones tal vez no están pensadas para representar a un agente, pero pueden ser útiles para simplificar una teoría o explicitar una herramienta que por ignorarla quedó escondida. Por ejemplo, un rol que podemos darle a este operador es el de caracterizar el comportamiento de la relación creíble en el contexto de un operador elementary world contraction:

$$A \prec B \quad \text{si y sólo si} \quad A *_w B \neq \emptyset \text{ ó } A = \emptyset$$

Además, la falta de consistencia del operador elementary world revision no fue un problema al momento de presentar los resultados del Capítulo 3. Esto es porque desde el primer momento, aunque implícitamente, el foco ha estado siempre puesto en poder satisfacer las Identidades de Levi y Harper. Por otro lado, aceptar este operador nos abre la posibilidad de preguntarnos qué lugar ocupan los operadores revision no priorizados de la Sección 2.5. Esta cuestión la trataremos en el Capítulo 5.

4.5 Resumen del Capítulo 4

En este capítulo reinterpretamos el comportamiento visto en los operadores shielded contraction y credibility-limited revision de la Sección 2.5, que buscan representar una noción de retractabilidad o bien de credibilidad de la observación, respectivamente. Tal reinterpretación la hicimos en términos de relaciones $\prec$, llamadas *credibles*. Esto nos permitió simplificar la representación y preservar la idea de poner en igualdad de condiciones al conjunto de creencias y la observación. Del análisis hecho tenemos dos resultados:

- la familia de operadores world shielded contraction es equivalente a la familia de operadores elementary world contraction;
- La función world-selection σ asociada a un operador elementary world contraction puede definir una relación *credible* $\prec$:

$$A \prec B \quad \text{si y sólo si} \quad (A \cap B) \cup \sigma(A, B^c) \neq \emptyset \text{ ó } A = \emptyset$$

de forma tal que el operador puede presentarse como un operador world shielded contraction mediante esta relación.

De esta manera, vimos que la noción de credibilidad que construimos para un agente puede embeberse en el comportamiento de la función world-selection asociada al operador de cambio que modela al agente. Esto se distingue de la idea tradicional de que hay dos pasos, donde primero se analizaba la relación para luego aplicar el operador correspondiente.

Además, las propiedades pensadas para las relaciones *credibles* pueden interpretarse como propiedades de funciones world-selection. Algunas de ellas pueden deducirse directamente de la construcción vía funciones world-selection, como ser compatible y pro-consistent observation. Las demás generan subfamilias de operadores elementary world contraction más débiles que la subfamilia prioritized.

Vía la Identidad de Levi del Capítulo 3 y que los operadores world shielded contraction son operadores elementary world contraction, se deduce que sus duales son los operadores elementary world revision. Esto parece generar cierta contradicción con el estado del arte visto en la Sección 2.5. Aunque en realidad, lo que se hizo en ese caso fue adaptar la Identidad de Levi para que los operadores no-priorizados queden asociados. Nosotros, al preservar la Identidad de Levi, obtuvimos operadores world non-consistent revision.

Como ocurrió en el Capítulo 3, es posible construir un árbol de familias (ver Figura 4.1) donde se expresa el mismo concepto de cambio vistos desde los 3 aspectos: funciones world-selection, operadores elementary world contraction y operadores elementary world revision. De esta manera, se amplía el árbol de la Figura 3.1 vista en el Capítulo 3,

Árbol de Operadores Elementary World Contraction de tipo Credible

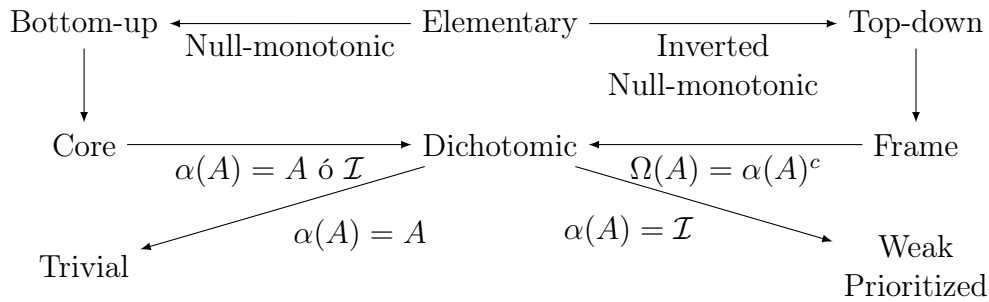


Figura 4.1: Árbol de relaciones de las familias de operadores elementary world contraction asociadas a las propiedades world-selection de las relaciones *credibles*.

Demostraciones de los Resultados del Capítulo 4

Demostración de Teorema 4.1.2. Por la Definición 4.1.1, probemos que una $\ominus_w$ world shielded contraction implica que $\ominus_w$ satisface los postulados **(W-1)** y **(W-2)**:

(W-1): Se deduce de que A es subconjunto tanto de $A \ominus_w B$ como A .

(W-2): Se deduce de que $\ominus_w$ satisface **(W-2)** y que $A \cap B \subseteq A$.

Si $\ominus_w$ es un operador elementary world contraction, sabemos que existe una función world-selection σ tal que $A \ominus_w B = A \cup \sigma(A, B)$ para cualquier $A, B \subseteq \mathcal{I}$. Consideramos la siguiente función σ_- :

$$\sigma_-(A, B) = \begin{cases} \sigma(A, B) & \text{Si } \sigma(A, B) \neq \emptyset \\ \sigma'(A, B) & \text{Caso contrario} \end{cases}$$

donde $\sigma'(A, B)$ es una función world-selection semantically successful under consistency arbitraria. A partir de esta función definimos el operador $\ominus_w$ que satisface **(W-1)**, **(W-2)** y **(W-3)** y tomamos la relación $\prec$ del enunciado del teorema para construir un operador world shielded contraction $\ominus'$. Como $A \prec B^c$ si y sólo si $\sigma(A, B) \neq \emptyset$, tenemos que si $A \prec B^c$ entonces $A \ominus' B = A \cup \sigma(A, B) = A \ominus B$; mientras que si $A \not\prec B^c$ entonces significa que $A \ominus' B = A$ por definición de $\ominus'$ y $A \ominus B = A \cup \sigma(A, B) = A$ por construcción de $\prec$. Luego, $A \ominus' B = A \ominus B$ es válido para cualquier par (A, B) .

Por último, definimos una correspondencia uno a uno entre operadores world shielded contraction y elementary world contraction a partir de las funciones σ world-selection. Ya sabemos que todo operador elementary world contraction está caracterizado por una función σ world-selection. Lo que haremos entonces es caracterizar unívocamente a los operadores world shielded contraction de la misma manera.

Los operadores world shielded contraction están determinados por una relación credible $\prec$ y un operador $\ominus_w$ prioritized world contraction. Notemos σ_-' a la función world-selection que determina al operador $\ominus_w$. Definimos entonces una función σ y un conjunto D :

$$D = \{(A, B) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I} \mid A \prec B^c \text{ y } \sigma_-(A, B) \neq \emptyset\}$$

tal que $\sigma|_D \equiv \sigma_-|_D$ y $\sigma|_{D^c} = \emptyset$. Es evidente que σ es una función world-selection.

Veamos que esta función σ caracteriza a los operadores world shielded contraction. Tomemos dos operadores $\ominus_w$ y $\ominus'_w$ tales que $A \ominus_w B = A \ominus'_w B$ para todo $A, B \subseteq \mathcal{I}$. Recordemos que esto no necesariamente implica que estén contruidos con el mismo operador y la misma relación. Pero si consideramos la construcción hecha arriba para cada operador, se puede ver que $D = D'$. Más aún, $\sigma_-|_D = \sigma_-'|_{D'}$. Y como $A \ominus_w B = A \ominus'_w B = A$ si $A \not\prec B^c$, tenemos que ambos operadores tienen la misma función σ world-selection.

En conclusión, tanto los operadores elementary world contraction como los operadores world shielded contraction se puede caracterizar con funciones world-selection, y se la utiliza de la misma manera en ambos casos para construir al operador. Por lo que podemos concluir que ambas familias son en realidad la misma. $\square$

Demostración de Teorema 4.1.3. Por el Teorema 4.1.2 podemos trabajar directamente con σ la función world-selection tal que $A \dot{\ominus}_w B = A \cup \sigma(A, B)$. Tomando $\prec$ como la definida en el enunciado, notemos que si $A \prec B$, $A \neq \emptyset$ y $B \neq \mathcal{I}$ entonces o bien $A \cap B \neq \emptyset$ o bien $\sigma(A, B^c) \neq \emptyset$. En cualquier caso, $A \dot{\ominus}_w B \not\subseteq B$, por lo que podemos definir un operador $\dot{\ominus}'_w$ que satisface **(W-1)**, **(W-2)** y **(W-3)** tal que:

$$A \dot{\ominus}'_w B = \begin{cases} A \dot{\ominus}_w B & \text{Si } A \prec B^c \\ A \cup \sigma'(A, B) & \text{caso contrario} \end{cases}$$

siendo σ' una función world-selection semantically successfull over consistency.

De esta manera construimos un operador world shielded contraction $\ominus_w$ a partir de $\prec$ y $\neg'_w$, donde además sabemos que si $A \prec B^c$ entonces $A \ominus_w B = A \neg'_w B$. Si, en cambio $A \not\prec B^c$ entonces $\sigma(A, B) = \emptyset$ y $A \cap B = \emptyset \neq A$. Luego $A \neg'_w B^c = A \cup \sigma(A, B^c) = A$, mientras que $A \ominus_w B = A$ por construcción. $\square$

Demostración de Proposición 4.2.4.

1. Si es closed over inclusion y tenemos que $A \prec B$ y $A \cap B = \emptyset$ para todo $B \in S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{I}) \setminus \{\emptyset\}$. Claramente $B \subseteq \bigcup S$ para todo $B \in S$, así que por closed over inclusion $A \prec \bigcup S$. Por lo tanto $\prec$ es union distributive.
2. Si sé que $\emptyset \prec \emptyset$ y $\prec$ es closed over inclusion, entonces vale que $\emptyset \prec B$ para todo $B \subseteq \mathcal{I}$.
3. Supongamos que $B \neq \emptyset$. Si $A \prec B$ entonces por union complete existe $w \in B$ tal que $A \prec \{w\}$. Si existe $w \in B$ tal que $A \prec \{w\}$ entonces por closed over inclusion $A \prec B$.
4. A partir de la hipótesis y closed over inclusion, podemos deducir que $A \prec \mathcal{I}$ para todo $A \neq \emptyset$. Entonces para este caso, si tomamos $S = \{B, B^c\}$, como sabemos que $A \prec (B \cup B^c)$, entonces $A \prec B$ o bien $A \prec B^c$ por union complete. Por lo que $\prec$ es complement complete. $\square$

Demostración de Proposición 4.2.5. Consideramos la función $\Omega(A)$ definida como en el enunciado. Si $\prec$ es closed over inverted inclusion y union distributive, supongamos que $A \cap B = \emptyset \neq B$. Si $A \prec B$, por ser closed over inverted inclusion $A \prec \{w\}$ para cualquier $w \in B$. Luego $B \cap \Omega(A) = \emptyset$. Por otro lado, si $B \cap \Omega(A) = \emptyset$, significa que $A \prec \{w\}$ para cualquier $w \in B$. Por union distributive tenemos que $B \prec A$.

Sea ahora $\prec$ frame definable con $\Omega(A)$. Si $A \prec B$, $A \cap B = \emptyset$ y $\emptyset \neq B' \prec B$, entonces $A \prec \{w\}$ para todo $w \in B$. Luego, $A \prec \{w\}$ para todo $w \in B'$, por lo tanto $A \prec B'$. Si tenemos que $A \prec B$, $A \cap B = \emptyset$ y $B \neq \emptyset$ para todo $S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{I})$, entonces dado $B \in S$, sabemos que $A \prec \{w\}$ para todo $w \in B$. Por lo tanto, $A \prec \{w\}$ para todo $w \in \bigcup S$. Luego $A \prec \bigcup S$. $\square$

Demostración de Teorema 4.2.6. Supongamos que $\prec$ es **pro-consistent observation, closed over inclusion y union complete**. De la idea presentada en el ítem 3 de la Proposición 4.2.4, definimos la función $\alpha(A) = \{w \in \mathcal{I} \mid A \prec \{w\}\}$. Veamos que $\prec$ es core definable con ella. Separemos los casos en que $\alpha(A) \neq \emptyset$ y $\alpha(A) = \emptyset$. Recordar que el caso $A = B = \emptyset$ no está contemplado.

Supongamos que $\alpha(A) \neq \emptyset$. Si $\alpha(A) \cap B \neq \emptyset$ entonces tenemos que existe un $w \in B$ tal que $A \prec \{w\}$. Por el ítem 3 de la Proposición 4.2.4 se deduce que $A \prec B$. Por otro lado, si $A \prec B$ entonces $B \neq \emptyset$ pues $\prec$ es pro-consistent observation y no consideramos el caso $A = B = \emptyset$. Entonces existe un $w \in B$ tal que $A \prec \{w\}$ por el ítem 3 de la Proposición 4.2.4. Luego $\alpha(A) \cap B \neq \emptyset$.

Si $\alpha(A) = \emptyset$, entonces $\alpha(A) \cap B = \emptyset$ para cualquier $B \subseteq \mathcal{I}$. Por contrarrecíproco del caso anterior, concluimos que $A \not\prec B$ para cualquier $B \subseteq \mathcal{I}$. Análogamente, si sabemos que $A \not\prec B$ para cualquier $B \subseteq \mathcal{I}$, en particular tenemos que $\alpha(A) = \emptyset$, por lo que $\alpha(A) \cap B = \emptyset$ para cualquier $B \subseteq \mathcal{I}$.

Supongamos ahora que $\prec$ es **core definable**. Por hipótesis, tenemos que, excepto si $A = B = \emptyset$, $A \prec B$ si y sólo si $\alpha(A) \cap B \neq \emptyset$. Si $A \prec B$, y $B \subseteq B'$ entonces vale que $\emptyset \neq \alpha(A) \cap B \subseteq \alpha(A) \cap B'$. En particular $\alpha(A) \cap B' \neq \emptyset$. Por otro lado, si $S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{I}) \setminus \{\emptyset\}$ tal que $\alpha(A) \cap \bigcup S \neq \emptyset$, significa que existe $B \in S$ tal que $\alpha(A) \cap B \neq \emptyset$. Por último, si $A \prec B$, sabemos que vale que $\alpha(A) \cap B \neq \emptyset$. En particular, $B \neq \emptyset$, por lo que $\prec$ es pro-consistent observation.

Veamos ahora la otra caracterización. Sea $w \in \mathcal{I}$. Si tenemos que $A \not\prec \{w\}$, entonces por definición $w \notin \bigcap_{A \not\prec B^c} B$. Supongamos entonces que $A \prec \{w\}$ y que $w \notin \bigcap_{A \not\prec B^c} B$. Esto es

lo mismo que tener $A \prec \{w\}$ y que $w \in \bigcup_{A \not\prec B} B$. Entonces existe $B \subseteq \mathcal{I}$ tal que $A \not\prec B$ y $w \in B$. Pero por closed over inclusion $A \not\prec \{w\}$, llegando a una contradicción.

Por último, analizamos los casos con más propiedades:

complement complete: Es claro que si $\alpha(A) = \emptyset$ entonces $\prec$ no satisface complement complete. Es más, si $\alpha(A) \neq \emptyset$ se tiene que vale complement complete.

closed over inverted inclusion: Dado A , puede pasar que $\alpha(A) \cap A^c = \emptyset$ o bien $\alpha(A) \cap A^c \neq \emptyset$. Del primer caso, se deduce que $\alpha(A) \subseteq A$. Del segundo caso, aplicando closed over inverted inclusion, sabemos que $\alpha(A) \cap \{w\} \neq \emptyset$ para todo $w \in A^c$. Luego $A^c \subseteq \alpha(A)$.

compatible: Por la definición de compatible sabemos que si $A = \emptyset$ ó $A \cap B \neq \emptyset$ entonces $A \prec B$. Por lo tanto, si $A = \emptyset$, entonces $\alpha(\emptyset) = \mathcal{I}$. Si $A \neq \emptyset$, en particular, todo $w \in A$ cumple que $A \prec \{w\}$. Por la primera construcción de $\alpha(A)$ se deduce que $A \subseteq \alpha(A)$.

□

Demostración de Teorema 4.2.7. $\prec$ es complement complete, $\emptyset \prec B$ para todo $B \subseteq \mathcal{I}$ y cumple que si $A \neq \emptyset$ entonces existe B tal que $A \not\subseteq B$ y $A \prec B$ como consecuencia directa de ser compatible.

1. Supongamos que $A \prec (\bigcup S)$ con $S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{I}) \setminus \{\emptyset\}$. Si $A \cap (\bigcup S) \neq \emptyset$, entonces existe $B \in S$ tal que $A \cap B \neq \emptyset$. Luego por ser compatible $A \prec B$. Si $A \cap (\bigcup S) = \emptyset$, aplico la condición de ser closed over inverted inclusion. Tomo cualquier $B \in S$, como $\emptyset \neq B \subseteq \bigcup S$, se tiene que $A \prec B$. En cualquier caso, $\prec$ es union complete.
2. Sabemos que si $A \prec B$ y $A \cap B = \emptyset \neq B$, entonces $\Omega(A) \cap B = \emptyset$ por ser frame definable. Y por definición de frame definable, sabemos que si $A \cap B = \emptyset \neq B$ y $\Omega(A) \cap B = \emptyset$, entonces $A \prec B$. Por último, de la definición de compatible se deduce que si $A = \emptyset$ o bien $A \cap B \neq \emptyset$ entonces $A \prec B$. De todo esto se deduce la equivalencia del enunciado.
3. Al ser core definable, se deduce que es union distributive por la Proposición 4.2.4. Luego, al ser closed over inverted inclusion, se tiene que es frame definable por la Proposición 4.2.5. Además, de la caracterizaciones de Ω y α se deduce que $\Omega(A) = \alpha(A)^c$. Por último, combinando core definable, compatible y closed over inclusion, resulta del Teorema 4.2.6 que $\alpha(A) = A$ o bien $\alpha(A) = \mathcal{I}$.

□

Demostración de Teorema 4.3.2. Para dar las equivalencias enlistadas en el teorema, primero analizaremos el caso $A = \emptyset$. Como sabemos que $\emptyset \prec B$ para cualquier B , todas las propiedades de la Definición 4.2.3 se satisfacen trivialmente para este caso. Por otro lado, todas las propiedades para σ tienen como premisa que $A \neq \emptyset$, por lo que este caso se satisface vacuamente.

En lo que sigue, al probar las equivalencias supondremos entonces que $A \neq \emptyset$. Comenzamos por reescribir las propiedades de la Definición 4.2.3 por el contrarrecíproco y usando B^c en vez de B .

closed over inclusion: si $A \not\prec B^c$ y $B \subseteq B'$ entonces $A \not\prec B'^c$;

closed over inverted inclusion: si $A \not\prec B^c$, $A \subseteq B' \subseteq B \neq \mathcal{I}$ entonces $A \not\prec B'^c$;

union complete: sea $S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{I}) \setminus \{\mathcal{I}\}$, si para todo $B \in S$ se tiene que $A \not\prec B^c$ entonces $A \not\prec (\bigcap S)^c$;

union distributive: sea $S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{I}) \setminus \{\mathcal{I}\}$ tal que $A \subseteq B$, si $A \not\prec (\bigcap S)^c$ entonces existe $B \in S$ tal que $A \not\prec B^c$;

Reemplazaremos la relación abstracta por la definida como creíble en términos de σ .

closed over inclusion: si $(A \cap B^c) \cup \sigma(A, B) = \emptyset$ y $B \subseteq B'$ luego $(A \cap B'^c) \cup \sigma(A, B') = \emptyset$;

closed over inverted inclusion: si $(A \cap B^c) \cup \sigma(A, B) = \emptyset$, $A \subseteq B' \subseteq B \neq \mathcal{I}$ entonces $(A \cap B'^c) \cup \sigma(A, B') = \emptyset$;

union complete: sea $S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{I}) \setminus \{\mathcal{I}\}$, si para todo $B \in S$ se tiene que $(A \cap B^c) \cup \sigma(A, B) = \emptyset$ entonces $(A \cap (\bigcap S)^c) \cup \sigma(A, \bigcap S) = \emptyset$;

union distributive: sea $S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{I}) \setminus \{\mathcal{I}\}$ tal que $A \subseteq B$, si $(A \cap (\bigcap S)^c) \cup \sigma(A, \bigcap S) = \emptyset$ entonces existe $B \in S$ tal que $(A \cap B^c) \cup \sigma(A, B) = \emptyset$;

Por lo tanto, lo que hay que ver es que estas expresiones, cuando $A \neq \emptyset$, equivalen a las propiedades de σ de la Definición 4.3.1. Notemos que $(A \cap B^c) \cup \sigma(A, B) = \emptyset$ equivale a tener que $A \subseteq B$ y $\sigma(A, B) = \emptyset$. Realizamos esta última adaptación a cada caso.

closed over inclusion: si $\sigma(A, B) = \emptyset$ y $A \subseteq B \subseteq B'$ entonces $\sigma(A, B') = \emptyset$;

closed over inverted inclusion: si $\sigma(A, B) = \emptyset$, $A \subseteq B' \subseteq B \neq \mathcal{I}$ luego $\sigma(A, B') = \emptyset$;

union complete: sea $S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{I}) \setminus \{\mathcal{I}\}$, si para todo $B \in S$ se tiene que $A \subseteq B$ y $\sigma(A, B) = \emptyset$ entonces $A \subseteq \bigcap S$ y $\sigma(A, \bigcap S) = \emptyset$;

union distributive: sea $S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{I}) \setminus \{\mathcal{I}\}$ tal que $A \subseteq B$, si $A \subseteq \bigcap S$ y $\sigma(A, \bigcap S) = \emptyset$ entonces existe $B \in S$ tal que $A \subseteq B$ y $\sigma(A, B) = \emptyset$;

Quitando algunas redundancias y suponiendo $A \neq \emptyset$, resulta que las propiedades de σ que queríamos probar son reescrituras de las propiedades de $\prec$.

Para la caracterización del caso core, utilizaremos que $\alpha(A) = \{w \in \mathcal{I} \mid A \prec \{w\}\}$. Si $w \in A$ entonces $A \prec \{w\}$ por ser compatible. Por otro lado, si $w \in A^c$, notar que por definición $\sigma(A, \{w\}^c) = \{w\}$ o bien $\sigma(A, \{w\}^c) = \emptyset$. Por lo que si $w \in \bigcup_{w \in A^c} \sigma(A, \{w\}^c)$, eso significa que $\sigma(A, \{w\}^c) = \{w\}$. Luego $A \prec \{w\}$. En resumen, si $w \in A \cup \bigcup_{w \in \mathcal{I}} \sigma(A, \{w\}^c)$, entonces $w \in \alpha(A)$.

Si tenemos que $w \in \alpha(A)$, entonces $(A \cap \{w\}) \cup \sigma(A, \{w\}^c) \neq \emptyset$. Esto significa que o bien $w \in A$ o bien $\sigma(A, \{w\}^c) \neq \emptyset$, es decir $\sigma(A, \{w\}^c) = \{w\}$. Por lo tanto, $w \in A \cup \bigcup_{w \in \mathcal{I}} \sigma(A, \{w\}^c)$. $\square$

Demostración de Teorema 4.3.5. Utilizaremos el Teorema 4.3.2 para las equivalencias, considerando a su vez que los operadores elementary world contraction tienen asociada una relación creíble $\prec$ caracterizada en el Teorema 4.1.3.

1. Que σ es null-monotonic significa que $\prec$ es closed over inclusion. Es decir, vale que si $(A \cap B) \cup \sigma(A, B^c) \neq \emptyset$ y $B \subseteq B'$ entonces $(A \cap B') \cup \sigma(A, B'^c) \neq \emptyset$. Como $(A \cap B) \cup \sigma(A, B^c) = (A -_w B^c) \cap B$, reemplazamos B por B^c y B' por B'^c junto con otras reescrituras, y resulta que σ es null-monotonic equivale a que si $(A -_w B) \not\subseteq B$ y $B' \subseteq B$ entonces $(A -_w B') \not\subseteq B'$. Esto es el contrarrecíproco de **(W-1)**.
2. Que σ es inverted null-monotonic significa que $\prec$ es closed over inverted inclusion. Es decir, vale que si $\sigma(A, B^c) \neq \emptyset$ y $A \subseteq B^c$ y $B^c \subseteq B'^c \neq \mathcal{I}$ entonces $\sigma(A, B'^c) \neq \emptyset$. En los casos en que $A \cap B = \emptyset$ tenemos que $A -_w B^c = \sigma(A, B^c) = (A -_w B^c) \cap B$. Por lo que si reemplazamos B por B^c y B' por B'^c , tenemos que lo anterior equivale a que si $(A -_w B) \cap B^c \neq \emptyset$, $A \subseteq B \subseteq B' \neq \mathcal{I}$ entonces $(A -_w B') \cap B'^c \neq \emptyset$. Reemplazando $(A -_w B) \cap B^c \neq \emptyset$ por $A -_w B \not\subseteq B$ en donde corresponda nos queda el contrarrecíproco de **(W-2)**;

3. Que σ es null-monotonic y weak inverted null-monotonic equivale a que $\prec$ sea core definable. Luego, basta tomar $C = \alpha(A)$ para probar que $-_w$ satisface **(W $\ominus$ 3)**. Si ahora $-_w$ satisface **(W $\ominus$ 3)**, veamos que $C = \alpha(A)$. Que $w \in C$ equivale a que $C \not\subseteq \{w\}^c$. Por hipótesis, esto significa que $A -_w \{w\}^c \not\subseteq \{w\}^c$, que coincide con que $(A -_w \{w\}^c) \cap \{w\} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $w \in C$ si y sólo si $(A \cap \{w\}) \cup \sigma(A, \{w\}^c) \neq \emptyset$. Pero esto último equivale a que $A \prec \{w\}$ por el Teorema 4.1.3.
4. Que σ es weak null-monotonic e inverted null-monotonic equivale a que $\prec$ sea frame definable. Como también es pro-consistent observation, tenemos que:

$$A \prec B \quad \text{si y sólo si} \quad A = \emptyset \text{ ó } A \cap B \neq \emptyset \text{ ó } A \cap B = \emptyset \neq B, \Omega(A) \cap B = \emptyset$$

Como sabemos que $(A -_w B^c) \cap B \neq \emptyset$ si y sólo si $A \prec B$, basta tomar $C = \Omega(A) = \alpha(A)^c$ para probar que $-_w$ satisface **(W $\ominus$ 4)**. Supongamos $A \neq \emptyset$. Si tenemos que $A \not\subseteq B$ o bien $\Omega(A) \subseteq B \neq \mathcal{I}$, por lo anterior se deduce que $A \prec B^c$, es decir $(A -_w B) \cap B^c \neq \emptyset$. O lo que es lo mismo, $A -_w B \not\subseteq B$. Si $(A -_w B) \not\subseteq B$, entonces $A \prec B^c$, es decir, $A \cap B^c \neq \emptyset$ o bien $C \cap B^c = \emptyset \neq B^c$. Esto equivale a que o bien $A \not\subseteq B$ ó $C \subseteq B \neq \mathcal{I}$. Si $-_w$ satisface **(W $\ominus$ 4)**, al reescribir en términos de B^c queda que si $A \neq \emptyset$ entonces:

$$A \prec B \quad \text{si y sólo si} \quad A \cap B \neq \emptyset \text{ ó } C \cap B = \emptyset \neq B$$

Definimos entonces la función $\Omega(A) = C$ si $A \neq \emptyset$ y $\Omega(\emptyset) = \emptyset$ y veamos que $\prec$ es frame definable con ella. Supongamos que $A \cap B = \emptyset \neq B$. Si $A = \emptyset$, sabemos que $\emptyset \prec B$ para cualquier B por ser $\prec$ compatible. Por lo tanto, vale que $\emptyset \prec B$ si y sólo si $\emptyset \cap B = \emptyset$. Si $A \neq \emptyset$, entonces $A \not\prec B$ equivale a que $C \cap B \neq \emptyset$ por hipótesis, es decir $\Omega(A) \cap B \neq \emptyset$, por definición.

□

Demostración de Teorema 4.4.2. La demostración se deduce vía la Identidad de Levi:

1. Que $-_w$ satisface **(W $\ominus$ 1)**, por la Identidad de Levi, equivale a que si $(A *_w B^c) \cup A \subseteq B$ y $B \subseteq B'$ entonces $(A *_w B'^c) \cup A \subseteq B'$.
2. Que $-_w$ satisface **(W $\ominus$ 2)**, por la Identidad de Levi, equivale a que si $(A *_w B^c) \cup A \subseteq B$ y $A \subseteq B' \subseteq B \neq \mathcal{I}$ entonces $(A *_w B'^c) \cup A \subseteq B'$.
3. Que $-_w$ satisface **(W $\ominus$ 3)**, por la Identidad de Levi, equivale a que si $A \neq \emptyset$ entonces existe C tal que $(A *_w B^c) \cup A \not\subseteq B$ si y sólo si $C \not\subseteq B$.
4. Que $-_w$ satisface **(W $\ominus$ 4)**, por la Identidad de Levi, equivale a que si $A \neq \emptyset$ entonces existe C tal que $(A *_w B^c) \cup A \not\subseteq B$ si y sólo si existe $A \not\subseteq B$ o bien $C \subseteq B \neq \mathcal{I}$.

Reemplazando $B = B^c$ y $B' = B'^c$ y reescribiendo nos queda que:

1. Que $-_w$ satisface **(W $\ominus$ 1)** equivale a que si $(A *_w B) \cup (A \cap B) = \emptyset$ y $B' \subseteq B$ entonces $(A *_w B') \cup (A \cap B') = \emptyset$.
2. Que $-_w$ satisface **(W $\ominus$ 2)** equivale a que si $(A *_w B) \cup (A \cap B) = \emptyset$, $A \cap B' = \emptyset$ y $\emptyset \neq B \subseteq B'$ entonces $(A *_w B') \cup (A \cap B') = \emptyset$.
3. Que $-_w$ satisface **(W $\ominus$ 3)** equivale a que si $A \neq \emptyset$ entonces existe C tal que $(A *_w B) \cup (A \cap B) \neq \emptyset$ si y sólo si $C \cap B \neq \emptyset$.
4. Que $-_w$ satisface **(W $\ominus$ 4)** equivale a que si $A \neq \emptyset$ entonces existe C tal que $(A *_w B) \cup (A \cap B) \neq \emptyset$ si y sólo si existe $A \cap B \neq \emptyset$ o bien $C \cap B = \emptyset \neq B$.

Como $*_w$ satisface **(W*2)**, se tienen los contrarrecíprocos de **(W $\circ$ 1)** y **(W $\circ$ 2)** en los dos primeros casos respectivamente, y **(W $\circ$ 3)** y **(W $\circ$ 4)** para los dos últimos casos respectivamente.

□

Capítulo 5

Revisiones No Priorizadas sobre Mundos

La causa fundamental de los problemas del mundo moderno es que los necios son demasiado confiados, mientras que los inteligentes están llenos de dudas.

Bertrand Russell (1933).

En lo que va de este trabajo venimos afirmando que los operadores se dividen en esencialmente dos: operadores de tipo contraction y revision, vinculados por las Identidades de Levi y Harper como dos caras de una misma moneda. Las funciones world-selection nos permitieron identificar cómo los postulados se asocian a uno y otro lado a partir de trabajar con operadores elementary world. De hecho, todas las subfamilias de operadores se pueden deducir a partir de darle propiedades extra a estas funciones, permitiendo un estudio simultáneo de la teoría en tres aspectos: funciones world-selection, operadores revision y operadores contraction. Pero esta triple interpretación parece romperse cuando se va más allá, como lo notamos con los operadores no priorizados de tipo revision.

Formalmente hablando, sucede que el postulado **(W*1)** success (éxito) de los operadores revision no priorizados de la Sección 2.5 se deja de cumplir al agregarle mundos de $A \cap B^c$. Estas situaciones se pueden interpretar como que, a pesar de que la observación sea creíble, se la esté *cuestionando* a partir de lo que se sabe de A . En este capítulo desarrollaremos la idea de relaciones *questionable*, inspirados en la estructura de las relaciones credible y en las propuestas de operadores revision no priorizados.

5.1 Multitud de Identidades de Levi y Harper para Operadores Elementary World

En el Capítulo 4 descubrimos que los operadores world shielded contraction, operadores contraction no priorizados, coinciden con los operadores elementary world contraction. Esto implica que los duales en términos de Levi y Harper son los operadores revision no consistentes, pero que satisfacen el postulado success. En algún sentido esta afirmación se contrapone con el estado del arte [6], donde el dual de los operadores shielded contraction son los operadores credibility-limited revision. Cabe preguntarnos entonces dónde encajan estos operadores, así como filtered revision [2] y promotion [36]. Para responder esta pregunta, primero veremos en qué se diferencian estos operadores de los world non-consistent revision.

Habíamos visto que, dado una función world-selection σ , los operadores world non-consistent revision pueden presentarse de la siguiente manera:

$$A *_w B = \begin{cases} (A \cap B) \cup \sigma(A, B^c) & \text{Si } A \prec B \\ A \cap B & \text{Caso contrario} \end{cases}$$

Es decir, ante una observación no creíble, el operador aplica una expansión. Conceptualmente debería pasar que en este caso el agente preserve el conjunto de creencias original, como ocurre con los operadores world shielded contraction. Esta es la gran diferencia con un operador como credibility-limited revision, que ante lo no creíble, preserva el conjunto de creencias original. Incluso, no requiere en un principio hacer referencia a la consistencia en el caso creíble, ya que solamente está enfocado en el éxito del operador $*_w$, que viene dado por el postulado **(W*1)** que define a los operadores elementary world revision.

Definición 5.1.1. Sean $*_w$ un operador elementary world revision, que satisface **(W*1)** y **(W*2)**, y $\mathcal{R}$ una relación en $\mathcal{P}(\mathcal{I})$. Definimos el operador world credibility-limited revision $\circ_w : \mathcal{P}(\mathcal{I}) \times \mathcal{P}(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I})$ como:

$$A \circ_w B = \begin{cases} A *_w B & \text{Si } A\mathcal{R}B \\ A & \text{Caso contrario} \end{cases}$$

Los operadores world credibility-limited revision son entonces una variante de los elementary world revision: estos operadores agregan al resultado el conjunto $A \cap B^c$ cuando las observaciones no son creíbles. Esta distinción hace que pueden distinguir a los pares tautológicamente creíbles (respondiendo con $A \cap B$) de los no creíbles (respondiendo con A), a diferencia de lo que sucede con los world shielded contraction. Así y todo, al aplicarle la identidad de Harper obtenemos:

$$(A \circ_w B^c) \cup A = \begin{cases} A -_w B & \text{Si } A\mathcal{R}B^c \\ A & \text{Caso contrario} \end{cases}$$

Tanto $A -_w B$ como A son operadores elementary world contraction, por lo que $(A \circ_w B^c) \cup A$ es también un operador elementary world contraction. Para ver esto como un operador world shielded contraction debemos considerar una relación $\prec$ tal que $A \prec B$ si y sólo si $A\mathcal{R}B^c$ y $A -_w B \neq A$ y considerar un operador weak prioritized world contraction que coincida con $A -_w B$ cuando $A\mathcal{R}B^c$. De aquí se deduce que si $A \prec B$ entonces $A\mathcal{R}B^c$, la versión en mundos de la observación con la que comenzamos el Capítulo 4, aunque vemos que no necesariamente vale la vuelta. Debido a que trabajar con operadores world shielded contraction conlleva tener presente estas consideraciones, las comparaciones al momento de aplicar la Identidad de Harper las haremos con elementary world contraction, pero siempre teniendo presente que pueden reescribirse como operadores world shielded contraction.

Otro ejemplo de operadores que devuelve operadores elementary world contraction a pesar de no satisfacer **(W*1)**, es el de world filtered revision, la versión de mundos posibles de otro operador visto en la Sección 2.5, filtered revision [2].

Definición 5.1.2. Sean $*_w$ un operador elementary world revision que satisface **(W*1)** y **(W*2)** y $\mathcal{R}$ una relación en $\mathcal{P}(\mathcal{I})$. Definimos $\odot_w : \mathcal{P}(\mathcal{I}) \times \mathcal{P}(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I})$ al operador world filtered revision como:

$$A \odot_w B = \begin{cases} A *_w B & \text{Si } A\mathcal{R}B \\ (A *_w B) \cup A & \text{Caso contrario} \end{cases}$$

Si siguiésemos la versión original del operador, deberíamos usar dos relaciones. Pero como $(A *_w B) \cup A$ es un operador world shielded contraction, la relación que falta ya está integrada en el comportamiento de $*_w$. Por lo que implícitamente existe una relación restringida a los

casos en que $A\mathcal{R}B$ que funciona como condicionante para tener $(A *_w B) \cup A \neq A$ o bien A . Aplicando entonces Harper a un operador world filtered revision, tenemos que:

$$(A \odot_w B^c) \cup A = \begin{cases} A -_w^* B & \text{Si } A\mathcal{R}B^c \\ A -_w^* B & \text{Caso contrario} \end{cases}$$

El operador $-_w^*$ es el operador world elementary contraction asociado a $*_w$. Como unir por A no afecta a $(A *_w B) \cup A$, resulta que $(A \odot_w B^c) \cup A$ es el operador elementary world contraction asociado al operador elementary world revision que se utilizó para construir al operador filtered revision.

La siguiente definición completa la lista de operadores dada en la Sección 2.5.

Definición 5.1.3. Sean $*_w$ y $*'_w$ dos operadores transitive relational world revision, que satisfacen **(W*1)**~**(W*5)**, y sea $s : \mathcal{P}(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I})$ una función tal que $B \subseteq s(B)$. Definimos el operador world promotion $\ominus_w : \mathcal{P}(\mathcal{I}) \times \mathcal{P}(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I})$ como:

$$A \ominus_w B = (A *_w B) \cup (B *_w' (A \cap s(B)))$$

Aplicando Harper, nos queda que $(A \ominus_w B) \cup A = (A *_w B) \cup A$ pues $B *_w' (A \cap s(B)) \subseteq A$.

En conclusión, aplicar Harper a operadores de tipo elementary world revision, world promotion, world credibility-limited revision o world filtered revision pueden devolvernos un mismo operador elementary world contraction. Es decir, parece que aplicar la construcción de Harper “empuja” a estas extensiones al mismo operador elementary world contraction.

Una pregunta que podemos hacernos es si aplicar la construcción de Levi, es decir intersecar por B , a estos operadores revision no priorizados nos “empujará” a un operador elementary world revision. Si intersecamos por B a un operador credibility-limited revision:

$$(A \odot_w B) \cap B = \begin{cases} A *_w B & \text{Si } A\mathcal{R}B \\ A \cap B & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Tenemos que se comporta como un elementary world revision. Más aún, cuando $A\mathcal{R}B$, el operador obtenido coincide con el operador elementary world revision que define al operador con world credibility-limited revision. Para el caso de world filtered revision no es necesaria ninguna condición:

$$(A \odot_w B) \cap B = \begin{cases} A *_w B & \text{Si } A\mathcal{R}B \\ (A *_w B) \cup (A \cap B) & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Debido a que $*_w$ satisface **(W*2)**, se tiene que $(A \odot_w B) \cap B = A *_w B$. Esto también se cumplen con los operadores world promotion:

$$(A \ominus_w B) \cap B = (A *_w B) \cup ((B *_w' (A \cap s(B))) \cap B)$$

A partir de que $B \subseteq s(B)$ y que el operador $*'_w$ cumple que **(W*1)** y **(W*2)**, se deduce que $(B *_w' (A \cap s(B))) \cap B \subseteq A \cap B$, por lo que $A \ominus_w B = A *_w B$

Estos resultados nos hacen pensar que los operadores world elementary, más que dos caras de una misma moneda, son dos posiciones extremas a las que accedemos via Levi y Harper, pero que en el medio hay una gran variedad de operadores por analizar. Desde revision, los entendemos como no priorizados, es decir, no satisfacen **(W*1)**; mientras que desde contraction, lo que sucede es que no cumplen **(W-1)**, no necesariamente se incluye al conjunto de creencias original. Desde ambas perspectivas, entendiendo que estamos comparando una situación $A *_w B$ con una $A -_w B^c$, estos operadores permiten elegir mundos de $A \cap B^c$, rompiendo **(W*1)** o bien **(W-1)** en cada caso. Esta nueva elección se puede entender a través de un concepto que ya se presentó al hablar de filtered revision y promotion en la Sección 2.5, y que será central en este capítulo: el agente permite cambiar el conjunto de creencias, pero el cambio no es para aceptar la observación, sino que el objetivo es que el nuevo conjunto de creencias no la contradiga. A este concepto, lo llamaremos *cuestionar* la observación.

Retomemos el Ejemplo 2.6 dado en la Sección 2.5. Analicemos, en el contexto de mundos, a qué estructura se relaciona la idea de cuestionabilidad de la observación en cada opción.

Opción I: El agente preserva el conjunto de creencias original. Es decir, se queda con todos los mundos de A , tanto los que están en B como los que no. En particular, se preservan todos los mundos de $A \cap B^c$.

Opción II: El agente acepta la nueva observación. En este caso no hay mundos de $A \cap B^c$, por lo que no se cuestiona la observación.

Opción III: El agente contrae su conjunto de creencias. Nuevamente todos los mundos de A se preservan, pero a diferencia de la Opción I, aquí hay un subconjunto de $A^c \cap B$.

Opción IV: El agente acepta parte de la nueva observación pero duda del resto, es decir, hay un cuestionamiento parcial de la observación. Se elige tanto un subconjunto no vacío de $A^c \cap B$ como de $A \cap B^c$ para construir el nuevo conjunto de creencias.

Podemos notar que el caso de revision hace referencia a no cuestionar, mientras que los casos de no credibilidad o de contraer utilizan todos los mundos de $A \cap B^c$ para cuestionar la observación. En el último caso, donde se cuestiona parcialmente la observación, se utiliza un subconjunto de $A \cap B^c$.

Formalmente hablando, diremos que un operador revision no priorizado $*_w$ cuestiona la observación si $(A *_w B) \cap B^c \cap A \neq \emptyset$. Más en detalle, vemos que:

- Si $(A *_w B) \cap B^c \cap A = \emptyset$ entonces la observación B es incuestionable, ningún mundo de A en $A *_w B$ está fuera de B ;
- Si $(A *_w B) \cap B^c \cap A = B^c \cap A$ entonces la observación B es totalmente cuestionable, en el sentido que todo lo que A que cuestiona a B , i.e. todo mundo de $A \cap B^c$, quedó preservado en $A *_w B$;
- Si $\emptyset \neq (A *_w B) \cap B^c \cap A \neq B^c \cap A$ entonces la observación B es parcialmente cuestionable, ya que se tomó un subconjunto propio y no vacío de $A \cap B^c$ para cuestionar algunas afirmaciones de B .

Es decir, la noción de cuestionabilidad se puede aplicar para cada par (A, B) y traducirse a efectos de si un conjunto es o no vacío, tal y como sucede con la noción de credibilidad que desarrollamos en el Capítulo 4. Por otro lado, la noción de credibilidad puede no estar relacionada con la de cuestionabilidad, como es el caso de los operadores contraction o filtered revision, o bien tener alguna influencia o correlación, como sucede en los operadores credibility-limited revision.

En las siguientes secciones desarrollaremos el concepto de cuestionabilidad en términos de relaciones, inspirados en lo hecho con el concepto de credibilidad, para luego ver cómo se lo captura en los operadores revision no priorizados conocidos.

5.2 Relaciones Questionable en Mundos

Presentaremos la idea de cuestionabilidad del mismo modo en que los hicimos para las relaciones creíbles. Es decir, entenderemos a la cuestionabilidad como una relación entre conjuntos de mundos y definiremos las relaciones *questionable* (cuestionables).

Comenzaremos por identificar propiedades para estas relaciones según nuestra intuición de lo que queremos representar. Por ejemplo, podemos pedir que si A es capaz de cuestionar una observación B rechazada ($A \cap B = \emptyset$), entonces es capaz de cuestionar una observación inconsistente. O bien, pedir que todo conjunto de creencias tenga al menos una observación rechazada cuestionable. La combinación de estas dos propiedades equivale a pedir que la observación inconsistente ($B = \emptyset$) siempre sea cuestionable.

También podemos pedir que toda observación aceptada sea no cuestionable. Es decir, si $A \subseteq B$, entonces A no cuestiona a B . Esto se interpreta del hecho de que la noción de cuestionabilidad proviene de preservar mundos de A que no están en B . En particular, se

interpreta que el conjunto de creencia inconsistente no tiene herramientas para cuestionar observaciones. Cuando $A \not\subseteq B$, es decir si A rechaza o considera indeterminada a B , puede ser tanto cuestionable, o bien ser no cuestionable, cambiando la actitud epistémica a aceptada. En particular, se puede considerar una tendencia a cuestionar solamente los casos donde B es rechazada.

Definición 5.2.1. Sea $\succ$ una relación definida sobre $\mathcal{P}(\mathcal{I})$ Diremos que es:

closed over empty set si cumple que si $A \cap B = \emptyset \neq A$ y $A \succ B$ entonces $A \succ \emptyset$.

skeptic si cumple que dado $A \neq \emptyset$ existe B tal que $A \cap B = \emptyset$ y $A \succ B$;

questionable si cumple que si $A \succ B$ entonces $A \not\subseteq B$;

normal questionable si cumple que si $A \succ B$ entonces $A \cap B = \emptyset \neq A$.

La propiedad normal questionable puede compararse con la propiedad compatible de las relaciones creíble, en el sentido de que están determinadas únicamente por los pares donde B es rechazada. Lo mismo podría decirse de questionable pero en este caso serían los pares donde B no es aceptada. En cualquier caso, ambas situaciones son combinables con skeptic y closed over empty set.

Cuando hablamos de cuestionabilidad, podemos encontrarnos con agentes que tienden a cuestionar o dudar más de las nuevas observaciones. En el otro extremo, hay agentes que son más proclives a aceptar una nueva observación sin cuestionarla. Estas tendencias pueden capturarse en términos de $\succ$ adaptando algunas de las propiedades de la Definición 4.2.3 vinculadas a la estructura de conjuntos de $\mathcal{P}(\mathcal{I})$, como también algunas propiedades de la Definición 4.2.1. Además, tendremos que hacer una adaptación para las relaciones questionable y otra para las normal questionable.

Comencemos por un agente proclive a aceptar la observación sin cuestionarla. A las propiedades que buscan modelar este comportamiento las consideraremos de tipo *imprudent*. Supongamos entonces que el agente utiliza una relación (normal) questionable, y que si no cuestiona una observación consistente, tampoco cuestionará una observación más fuerte que la anterior. Esta idea coincide con el contrarrecíproco de que $\succ$ sea closed over inclusion, pero tiene un problema: si se cuestiona una observación, entonces se cuestionará la observación tautológica. No hacerlo implicaría no cuestionar ninguna observación. Por lo que debemos restringir la propiedad a los pares donde B no es aceptado (o bien rechazado). También podemos intuir que si no cuestiona individualmente a una colección de observaciones, entonces no cuestionará a la unión de esas observaciones. Esto equivale al contrarrecíproco de que $\succ$ sea union complete. Por último, nada impide que el agente no cuestione las observaciones inconsistentes. Aunque esto suene raro, es lo que sucede con los agentes modelados por operadores revision priorizadas, y significa que $\succ$ es pro-consistent observation.

Definición 5.2.2. Sea $\succ$ una relación questionable. Diremos que es:

imprudent si cumple que si $A \succ B$, $\emptyset \neq B \subseteq B'$ y $A \not\subseteq B'$ entonces $A \succ B'$;

normal imprudent la relación es normal questionable y además cumple que si $A \succ B$, $\emptyset \neq B \subseteq B'$ y $A \cap B' = \emptyset$ entonces $A \succ B'$;

union imprudent si es imprudent y además cumple que si $A \succ (\bigcup S)$ para un $S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{I})$ tal que $\bigcup S \neq \emptyset$ entonces existe $B \in S$ tal que $A \succ B$;

Estas propiedades se pueden combinar entre sí y con pro-consistent observation:

complete imprudent si es imprudent y pro-consistent observation;

core imprudent si es union imprudent y pro-consistent observation;

union normal imprudent si es normal imprudent y union imprudent;

complete normal imprudent si es normal imprudent y pro-consistent observation;

core normal imprudent si es union normal imprudent y pro-consistent observation;

Inspirados en algunos resultados de la Sección 4.2, podemos dar caracterizaciones de las relaciones questionable consideradas en la definición anterior.

Teorema 5.2.3. *Sea $\succ$ una relación questionable. Entonces:*

1. *Si es closed over inclusion, entonces $A \not\succ B$ para todo $A, B \subseteq \mathcal{I}$;*
2. *es union imprudent si y sólo si vale que si $A \not\subseteq B \neq \emptyset$ entonces $A \succ B$ si y sólo si existe $w \in B$ tal que $A \succ \{w\}$;*
3. *es core imprudent si y sólo si vale que si $A \not\subseteq B$ entonces $A \succ B$ si y sólo si existe $w \in B$ tal que $A \succ \{w\}$;*
4. *es union normal imprudent si y sólo si vale que si $A \cap B = \emptyset$ y $B \neq \emptyset$ entonces $A \succ B$ si y sólo si existe $w \in B$ tal que $A \succ \{w\}$;*
5. *es core normal imprudent si y sólo si vale que si $A \cap B = \emptyset$ entonces $A \succ B$ si y sólo si existe $w \in B$ tal que $A \succ \{w\}$.*

Más aún, si $\Omega : \mathcal{P}(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I})$ es la función tal que $\Omega(A) = \{w \in \mathcal{I} \mid A \succ \{w\}\}$, entonces las equivalencias de union imprudent, core imprudent, union normal imprudent y core normal imprudent se pueden reescribir en términos de la función Ω como:

$$A \succ B \quad \text{si y sólo si} \quad \Omega(A) \cap B \neq \emptyset$$

bajo sus respectivas condiciones: $A \not\subseteq B \neq \emptyset$, $A \not\subseteq B$, $A \cap B = \emptyset \neq B$ y $A \cap B = \emptyset$.

Demostración en la página 78, al final del capítulo.

El uso de la función Ω definido en la Proposición 4.2.5 no es casual. Tiene que ver con el hecho de que $\succ$ es normal questionable si y sólo si $\not\succ$ es creíble. En particular, las propiedades imprudent se reflejan en $\not\succ$ como las propiedades que vimos en la Proposición 4.2.5, pudiendo identificar así un vínculo con las propiedades vistas en la Sección 4.2.

Continuamos ahora con las situaciones donde un agente tiende a cuestionar o dudar más de la observación. Llamaremos de tipo *wise* a las propiedades asociadas a este comportamiento. Por ejemplo, podemos considerar el caso en que si el agente cuestiona una observación, también cuestionará toda observación más fuerte. Este caso coincide con que $\succ$ sea closed over inverted inclusion, aunque nuevamente puede que haya que adaptarlo al contexto de relaciones questionable. Incluso podemos agregar que si son capaces de cuestionar alguna observación rechazada, entonces seguro cuestionarán una observación inconsistente. Esto equivale a que $\succ$ sea closed over empty set. También tenemos el caso en que si cuestiona individualmente a una colección de observaciones, entonces cuestionará a la unión de esas observaciones. Esto se traduce formalmente en que $\succ$ satisfaga una versión de union distributive. Por último, podemos considerar en este contexto una propiedad que propusimos anteriormente: que todo conjunto de creencias (salvo el inconsistente) tiene una observación rechazada questionable, es decir $\succ$ es skeptic.

Definición 5.2.4. Sea $\succ$ una relación questionable. Diremos que es:

wise si cumple que si $A \succ B$ y $B' \subseteq B$ entonces $A \succ B'$;

union wise si es wise y además cumple que si $A \succ B$ para todo $B \in S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{I})$ y $A \not\subseteq \bigcup S \neq \emptyset$ entonces $A \succ \bigcup S$;

union normal wise si es normal questionable, wise y además cumple que si $A \succ B$ para todo $B \in S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{I})$ y $\bigcup S \neq \emptyset$ entonces $A \succ \bigcup S$;

Estas propiedades se pueden combinar entre sí y con normal questionable y skeptic:

normal wise si es normal questionable y wise;

complete wise si es wise y además es skeptic;

complete normal wise si es normal wise y skeptic;

core wise si union wise y además es keptic;

core normal wise si union normal wise y skeptic;

Como con las relaciones imprudent, es posible caracterizar a estas familias de relaciones.

Teorema 5.2.5. *Sea $\succ$ una relación questionable. Entonces:*

1. *Si es wise, entonces es closed over empty set;*
2. *es union wise si y sólo si vale que si $A \not\subseteq B \neq \emptyset$ entonces $A \succ B$ si y sólo si $A \succ \{w\}$ para todo $w \in B$;*
3. *es core wise si y sólo si vale que si $A \not\subseteq B$ entonces $A \succ B$ si y sólo si $A \succ \{w\}$ para todo $w \in B$;*
4. *Si es union normal wise, entonces es union wise.*
5. *es union normal wise si y sólo si vale que si $A \cap B = \emptyset \neq B$ entonces $A \succ B$ si y sólo si $A \succ \{w\}$ para todo $w \in B$;*
6. *es core normal wise si y sólo si vale que si $A \cap B = \emptyset$ entonces $A \succ B$ si y sólo si $A \succ \{w\}$ para todo $w \in B$.*

Más aún, si $\alpha : \mathcal{P}(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I})$ es la función tal que $\alpha(A) = \{w \in \mathcal{I} \mid A \not\prec \{w\}\}$, entonces las equivalencias de union wise, core wise, union normal wise y core normal wise se pueden reescribir en términos de la función α como:

$$A \succ B \quad \text{si y sólo si} \quad \alpha(A) \cap B = \emptyset$$

bajo sus respectivas condiciones: $A \not\subseteq B \neq \emptyset$, $A \not\subseteq B$, $A \cap B = \emptyset \neq B$ y $A \cap B = \emptyset$.

Demostración en la página 78, al final del capítulo.

Como ocurrió en el Teorema 5.2.3, las propiedades wise se reflejan en términos de $\not\prec$ como las propiedades asociadas al Teorema 4.2.6 de relaciones credible. Se destaca el paralelismo en donde las equivalencias se caracterizan por una función bajo las mismas condiciones. De hecho, las definiciones de las funciones α y Ω dadas en los Teoremas 5.2.3 y 5.2.5 satisfacen que $\alpha(A)^c = \Omega(A)$. Esto da a entender que las propiedades wise e imprudent son duales entre sí, a la vez de identificarse con propiedades de la Sección 4.2 vía $\not\prec$.

Finalizando esta sección, podemos ver que las propiedades imprudent y wise también pueden combinarse entre sí. Esto genera un comportamiento algo más rígido comparándose con situaciones similares a lo que sucede con las relaciones dichotomic credible.

Definición 5.2.6. Sea $\succ$ una relación questionable. Diremos que es:

wise-imprudent si es wise e imprudent;

normal wise-imprudent si es wise y normal imprudent;

naïve si es wise-imprudent y además es pro-consistent observation;

doubtful si es wise-imprudent y además es skeptic;

normal doubtful si es normal wise-imprudent y además es skeptic.

Por supuesto, combinar ambas propiedades hace que surjan otras que ya vimos espontáneamente, e incluso llegamos a obtener las situaciones extremas que caracterizan a los operadores priorizados.

Teorema 5.2.7. *Sea $\succ$ una relación questionable. Entonces:*

1. *Si es wise, entonces cumple que si $A \succ (\bigcup S)$ para un $S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{I})$ tal que $\bigcup S \neq \emptyset$ entonces $A \succ B$ para todo $B \in S$;*
2. *Si es imprudent, entonces cumple que si $A \succ B$ para todo $B \in S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{I})$ y $A \not\subseteq \bigcup S \neq \emptyset$ entonces $A \succ \bigcup S$;*
3. *Si es wise-imprudent, entonces es union wise y union imprudent;*
4. *Si es normal imprudent, entonces cumple que si $A \succ B$ para todo $B \in S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{I})$ y $\bigcup S \neq \emptyset$ entonces $A \succ \bigcup S$;*
5. *Si es normal wise-imprudent, entonces es union normal wise y union normal imprudent;*
6. *es naïve si y sólo si $A \not\succ B$ para todo $A, B \subseteq \mathcal{I}$;*
7. *es doubtful si y sólo si $A \succ B$ equivale a que $A \not\subseteq B$;*
8. *es normal doubtful si y sólo si $A \succ B$ equivale a que $A \cap B = \emptyset \neq A$.*

Demostración en la página 79, al final del capítulo.

En esta sección formalizamos una intuición para las relaciones questionable. Veamos cómo implementarla en los operadores revision no priorizados definidos en la sección anterior.

5.3 Relaciones Basadas en Operadores World

En esta sección presentaremos de qué manera las relaciones questionable se insertan en los operadores de cambio sobre mundos, particularmente world credibility-limited revision, world filtered revision y world promotion. En el final de las Secciones 4.4 y 5.1 se dieron nociones sobre cómo identificar las relaciones credible y questionable de un operador world.

Definición 5.3.1. Sea $\bullet_w$ un operador world $\bullet_w : \mathcal{P}(\mathcal{I}) \times \mathcal{P}(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I})$. Definimos:

- la relación credible $A \prec B$ dada por $(A \bullet_w B) \cap B \neq \emptyset$ ó $A = \emptyset$;
- la relación questionable $A \succ B$ dada por $(A \bullet_w B) \cap A \cap B^c \neq \emptyset$;
- la relación full questionable $A \succ\succ B$ dada por $\emptyset \neq A \cap B^c \subseteq A \bullet_w B$.

En el caso de que $A \succ\succ B$, diremos que A cuestiona totalmente a B .

Esto nos dice que las relaciones se pueden representar vía la consistencia de $(A \bullet_w B) \cap B$ para credibilidad y $(A \bullet_w B) \cap A \cap B^c$ para cuestionabilidad. Es decir, la credibilidad y la cuestionabilidad, cuando se la mira en términos de operadores de cambio, se trata de consistencia. Dado un operador de cambio $\bullet_w$ y un conjunto de creencias A , el agente considera que B es creíble si al realizar la operación de cambio se queda con algunos mundos de B . Análogamente, si al realizar la operación de cambio el agente se queda con mundos de A que no están en B , es porque decidió cuestionar la observación. Se destaca además el caso particular, dentro de $\succ$, en que el cuestionamiento implique utilizar todos los mundos de $A \cap B^c$. Aunque la intuición parece funcionar bien, todavía no tenemos la certeza de que estas relaciones satisfagan las propiedades que las caracterizan como credible y questionable.

Proposición 5.3.2. Sean $\bullet_w$ un operador world $\bullet_w : \mathcal{P}(\mathcal{I}) \times \mathcal{P}(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I})$, $\prec$ y $\succ$ sus relaciones asociadas de la Definición 5.3.1.

1. $\prec$ es pro-consistent observation y $\succ$ es questionable.

2. $\prec$ es credible si y sólo si $\bullet_w$ satisface:

(Rel1) Si $A \cap B \neq \emptyset$ entonces $(A \bullet_w B) \cap B \neq \emptyset$ (credible vacuity).

3. $\succ$ es normal questionable si y sólo si $\bullet_w$ satisface:

(Rel2) Si $A \cap B \neq \emptyset$ entonces $(A \bullet_w B) \cap A \subseteq B$ (questionable vacuity).

Demostración en la página 79, al final del capítulo.

De la proposición anterior podemos concluir que cualquier operador que satisfaga revision inclusion (**W*2**) define relaciones credible y questionable. Esto sucede para todos los operadores elementary world, world credibility-limited revision, world filtered revision y world promotion. A continuación veremos que la relación que caracteriza a los operadores world filtered revision es la de cuestionabilidad, aunque no de una manera convencional.

Teorema 5.3.3. Sea $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{I} \times \mathcal{I}$ una relación y sea $*_w$ un operador elementary world revision, que satisface (**W*1**) y (**W*2**). Construimos el siguiente operador world filtered revision $\Box_w : \mathcal{P}(\mathcal{I}) \times \mathcal{P}(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I})$ como:

$$A \Box_w B = \begin{cases} A *_w B & \text{Si } ARB \\ (A *_w B) \cup A & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Entonces, existe un operador world filtered revision $\odot_w$ equivalente tal que:

$$A \odot_w B = \begin{cases} A *_w' B & \text{Si } A \not\succ B \\ (A *_w' B) \cup A & \text{caso contrario} \end{cases}$$

donde $\succ$ y $\succ$, las relaciones asociadas a $\Box_w$, resultan equivalentes y $*'_w$ el operador elementary world revision queda definido como:

$$A *_w' B = \begin{cases} A *_w B & \text{Si } ARB \\ (A *_w B) \cup A & \text{Si } A \not\succ B \text{ y } A \subseteq B \\ A \cap B & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Demostración en la página 80, al final del capítulo.

El teorema anterior también aplica a los operadores world credibility-limited revision, ya que son un caso particular de operadores world filtered revision.

Proposición 5.3.4. Sea $\odot_w$ un operador world filtered revision según la Definición 5.1.2. Entonces, $\odot_w$ es un operador world credibility-limited revision según la Definición 2.5.2 si y sólo si satisface:

(Rel3) $A \odot B \subseteq B$ o bien $A \odot B \subseteq A$ (weak relative success).

En tal caso, $A \odot_w B = A$ si $A \succ B$, siendo $\succ$ la relación questionable asociada a $\odot_w$.

Demostración en la página 80, al final del capítulo.

El Teorema 5.3.3 y la Proposición 5.3.4 nos hacen preguntarnos si hay una conexión entre las relaciones credible y questionable de los operadores world filtered revision, considerando que la idea original está basada en una relación $\prec$ y no $\not\succ$ caracterizando estos operadores. Pero la realidad es que puede ocurrir casos en donde haya pares tales que $A \not\succ B$ y $A \not\succ B$, como también que $A \prec B$ y $A \succ B$. Estas situaciones pueden evitarse si $\odot$ satisface postulados extra.

Proposición 5.3.5. Sean $\odot_w$ un operador world filtered revision según la Definición 5.1.2, con $\succ$ y $\prec$ sus relaciones y $*_w$ su operador elementary world revision asociados.

1. Se satisface que si $A \not\prec B$ entonces $A \succ B$ si y sólo si $\odot_w$ satisface:

(Rel4) Si $A \neq \emptyset$ entonces $A \odot B \neq \emptyset$ (strong consistency).

2. Se satisface que si $A \prec B$ entonces $A \not\prec B$ si y sólo si $\odot_w$ satisface (Rel2) y (Rel3).

3. $\odot_w$ satisface (Rel2), (Rel3) y (Rel4) si y sólo si $A \not\prec B$ equivale a $A \prec B$.

Demostración en la página 80, al final del capítulo.

Por otro lado, en los operadores world filtered revision no hay una noción de cuestionabilidad parcial, ya que la relación questionable asociada coincide con la full questionable, algo que no necesariamente sucede para operadores world promotion.

Teorema 5.3.6. Sea $\odot_w$ un operador world promotion según la Definición 5.1.3, construido por una función trigger s y dos operadores TR world revision $*_w$ y $*'_w$, que satisfacen $(W*1) \sim (W*5)$. Si $\prec$ y $\succ$ son sus relaciones credible y questionable asociadas, entonces:

1. $A \prec B$ si y sólo si $B \neq \emptyset$;

2. $\succ$ es normal questionable y $A \succ B$ si y sólo si $(B *'_w (A \cap s(B))) \cap B^c \neq \emptyset$;

Demostración en la página 81, al final del capítulo.

En el teorema anterior podemos ver que las relaciones credible y questionable no están necesariamente relacionadas. De hecho, en el contexto de los operadores world promotion, se ven totalmente independientes. Conectar ambas relaciones sería equivalente a vincular los operadores revision con los que se construye el operador.

El Teorema 5.3.6 también nos da la idea de que es posible caracterizar las relaciones questionable en términos de una función world selection. Esto se asemeja a cómo una función world-selection define relaciones credible. En la siguiente y última sección, nos inspiraremos en lo hecho en el Capítulo 4 para identificar propiedades de las relaciones questionable en términos de funciones world-selection.

5.4 Relaciones Questionable Basadas en Funciones World-Selection

En la Definición 5.3.1 vinculamos las relaciones questionable con operadores de cambio. Una manera de interpretar la condición que define a la relación questionable $\succ$ asociada a un operador $\bullet_w$ es que $A \succ B$ si y sólo si $A \bullet_w B$ contiene un subconjunto no vacío de $A \cap B^c$. Esto se corresponde también con la idea que propusimos al final de la Sección 5.1. En esta sección identificaremos a ese subconjunto como seleccionado por una función world-selection. Tal función apareció explícitamente en el operador world promotion: es la asociada al segundo operador $*_w$ que se usa para construir el operador. Y también está en los operadores world filtered revision, aunque no sea tan evidente. Si tomamos un operador world filtered revision $\odot_w$ construido a partir de una relación questionable $\succ$ y un operador elementary world revision $*_w$, y consideramos la función world-selection:

$$\rho(A, B) = \begin{cases} \emptyset & \text{Si } B^c \not\prec A \\ A^c \cap B^c & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Tenemos que $\odot_w$ puede definirse como:

$$A \odot_w B = (A *_w B) \cup \rho(B, A^c) = \begin{cases} A *_w B & \text{Si } A \not\prec B \\ (A *_w B) \cup (A \cap B^c) & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Como $A \cap B \subseteq A *_w B$, entonces $(A *_w B) \cup (A \cap B^c) = (A *_w B) \cup A$. Más aún, podemos considerar el operador $*'_w$ elementary world revision asociado a ρ :

$$A *_w' B = (A \cap B) \cup \rho(A, B^c) = \begin{cases} A \cap B & \text{Si } B \not\succ A \\ B & \text{caso contrario} \end{cases}$$

De esa manera, el operador world filtered revision $\odot_w$ queda reconstruido como:

$$A \odot_w B = (A *_w B) \cup (B *_w' A)$$

El parecido con los operadores world promotion resulta ahora más evidente, excepto que los operadores revision asociados satisfacen menos postulados. Además, de la Proposición 5.3.5 destacamos que es posible relacionar los comportamientos de los operadores $*_w$ y $*'_w$. En el Capítulo 6 nos concentraremos en analizar y caracterizar estos operadores. Pero antes formalizaremos el vínculo entre relaciones questionable y funciones world selection.

Definición 5.4.1. Sea ρ una función world-selection. Una relación questionable asociada a ρ , notada como $\succ$, es la relación que se construye a partir los pares significativos de ρ en el siguiente sentido:

$$A \succ B \quad \text{si y sólo si} \quad \rho(B, A^c) \neq \emptyset$$

En tal caso, se considera además el siguiente refinamiento de la actitud epistémica:

- B es no cuestionable en A si $\rho(B, A^c) = \emptyset$.
- B es cuestionable en A si $\emptyset \neq \rho(B, A^c) \neq A \cap B^c$.
- B es totalmente cuestionable en A si $\rho(B, A^c) = A \cap B^c \neq \emptyset$.

El refinamiento presentado está basado en la Definición 5.3.1.

De la definición de las funciones world-selection se deduce que la relación definida es efectivamente questionable, pues si $A \subseteq B$ entonces $\rho(B, A^c) \subseteq B^c \cap A = \emptyset$. Más aún, si ρ es normal, tenemos que si $B \not\subseteq A^c$ entonces $\rho(B, A^c) = \emptyset$. Luego $\succ$ es normal questionable.

Proposición 5.4.2. Sea ρ una función world-selection y sea $\succ$ su relación según la Definición 5.4.1. Entonces $\succ$ es una relación questionable. Además:

1. $\succ$ es normal questionable si y sólo si ρ es normal;
2. $\succ$ es pro-consistent observation si y sólo si $\rho(\emptyset, B) = \emptyset$;
3. $\succ$ es skeptic si y sólo si para todo $B \neq \mathcal{I}$ existe A tal que $A \subseteq B$ y $\rho(A, B) \neq \emptyset$;

Demostración en la página 81, al final del capítulo.

De esta manera, toda función world-selection tiene asociadas una relación credible y una relación questionable. Las propiedades asociadas a estas relaciones afectan a la función world-selection de forma diferente, debido al intercambio de roles entre A y B al hablar de la relación questionable. En particular, las propiedades de la Definición 4.2.3 de las relaciones credible y de las Definiciones 5.2.2, 5.2.4 y 5.2.6 de las questionable son combinables e independientes entre sí, ya que las primeras hacen foco en lo que sucede en el segundo parámetro de ρ , mientras que las últimas lo hacen sobre el primer parámetro.

Definición 5.4.3. Sea ρ una función world-selection y $\succ$ su relación questionable asociada. Diremos que ρ es:

imprudent si satisface que si $\rho(A, B) = \emptyset$, $B \cup A \neq \mathcal{I}$ y $\emptyset \neq A' \subseteq A$ entonces $\rho(A', B) = \emptyset$;

normal imprudent si ρ es normal y satisface que si $\rho(A, B) = \emptyset$, $\emptyset \neq A' \subseteq A$ y $A \subseteq B$ entonces $\rho(A', B) = \emptyset$;

wise si satisface que si $\rho(A, B) = \emptyset$ y $A \subseteq A'$, entonces $\rho(A', B) = \emptyset$;

union imprudent: si $B \cup A \neq \mathcal{I}$ y $A \neq \emptyset$ entonces $\rho(A, B) = \emptyset$ si y sólo si para todo $w \in A$ tal que $\rho(\{w\}, B) = \emptyset$;

union wise: si $B \cup A \neq \mathcal{I}$ y $A \neq \emptyset$ entonces $\rho(A, B) = \emptyset$ si y sólo si existe $w \in A$ tal que $\rho(\{w\}, B) = \emptyset$;

union normal wise: si $\emptyset \neq A \subseteq B$ entonces $\rho(A, B) = \emptyset$ si y sólo si existe $w \in A$ tal que $\rho(\{w\}, B) = \emptyset$;

Los nombres hacen referencia al análisis que hicimos de tipos de agentes tendientes a cuestionar o dudar de las nuevas observaciones (wise) y el tipo de agentes más proclives a aceptar una nueva observación sin cuestionarla (imprudent). Sin embargo, también se pueden notar las similitudes con las propiedades null-monotonic de la Definición 4.1.4, donde la variación principal es que los cambios en el caso questionable están enfocados en el primer parámetro de la función.

El siguiente resultado traduce estas posibles propiedades de las relaciones questionable asociadas a una función ρ a propiedades de funciones world-selection.

Teorema 5.4.4. *Sea ρ una función world-selection y sea $\succ$ su relación questionable asociada. Entonces:*

1. $\succ$ es imprudent si y sólo si ρ es imprudent;
2. $\succ$ es normal imprudent si y sólo si ρ es normal imprudent;
3. $\succ$ es wise si y sólo si ρ es wise;
4. $\succ$ es union imprudent si y sólo si ρ es union imprudent;
5. $\succ$ es union wise si y sólo si ρ es union wise;
6. $\succ$ es union normal wise si y sólo si ρ es union normal wise;

Demostración en la página 81, al final del capítulo.

Vía la combinación de estas propiedades podemos obtener cualquiera de las familias estudiadas para la relación questionable asociada a una función world-selection. Al final de este capítulo ordenaremos esta información en un árbol de familias, tal y como lo venimos haciendo en los otros capítulos.

Para finalizar esta sección, introduciremos la propiedad de ρ que representa el comportamiento de la actitud epistémica “totalmente cuestionable”. Como estuvimos viendo, los casos cuestionables son aquellos en que se elige un subconjunto no vacío de $A \cap B^c$. En particular, es posible elegir todo $A \cap B^c$. En términos de cuestionabilidad, significa que será cuestionado todo lo que pueda ser cuestionado de la observación a partir del conjunto de creencias original. Es decir, es el grado más alto de cuestionabilidad.

Definición 5.4.5. Sea ρ una función world-selection. Diremos que es **polar** si satisface que si $\rho(A, B) \neq \emptyset$ entonces $\rho(A, B) = A^c \cap B^c$;

Cuando ρ es polar, significa que todo par de su relación questionable es totalmente cuestionable. Esta propiedad es combinable con otras que hemos visto. Por ejemplo, si su relación questionable asociada $\succ$ es questionable doubtful, tenemos que $\rho(A, B) = A^c \cap B^c$. Una situación similar sucede si ρ es normal questionable doubtful, donde $\rho(A, B) = A^c \cap B^c$ excepto cuando $A \not\subseteq B$, que sabemos que $\rho(A, B) = \emptyset$ por ser normal. En el otro extremo tenemos que si $\succ$ es naïve, entonces $\rho(A, B) = \emptyset$. En la construcción que dimos de operadores filtered revision, vemos que la función ρ asociada es polar. A partir de esta idea, podemos interpretar que un operador elementary world contraction, interpretado como $A -_w B^c$, se lo puede asociar con una función world-selection polar con una relación questionable doubtful. Mientras que un operador elementary world revision se lo vincularía con una función world-selection polar cuya relación questionable asociada es naïve.

5.5 Resumen del Capítulo 5

Iniciamos el capítulo viendo que los operadores *revision* no priorizados vistos en la Sección 2.5 parecen pertenecer a una familia de operadores que no encaja ni con operadores de tipo *revision* ni de tipo *contraction*, sino que, en algún sentido, están en el medio. Es decir, los operadores de tipo *revision* y *contraction* del Capítulo 3 son situaciones extremas, a las que podemos acceder si les aplicamos las construcciones de las identidades de Levi y Harper.

La manera de detectar la posición intermedia de estos operadores era viendo si, al devolver el nuevo conjunto de creencias, se preservan mundos del antiguo conjunto de creencias que no forman parte de la observación. Es decir, si tomamos un operador de cambio $\bullet_w$, lo que se analizaba era la consistencia de $(A \bullet_w B) \cap A \cap B^c$. Viendo qué significa este conjunto en el ejemplo, notamos que cuando $(A \bullet_w B) \cap A \cap B^c \neq \emptyset$, el agente presenta una posición de cuestionamiento o duda respecto de la observación. Se destaca además el caso en que $A \cap B^c \subseteq A \bullet_w B$, entendiéndose como que el cuestionamiento de la observación es el máximo posible. A partir de esta intuición y de lo que sabíamos de relaciones *credibile*, definimos las relaciones *questionable*. En la Figura 5.1 aparecen ordenadas de mayor a menor generalidad las diferentes propiedades y subfamilias.

Árbol de Familias de Relaciones (Normal) Questionable

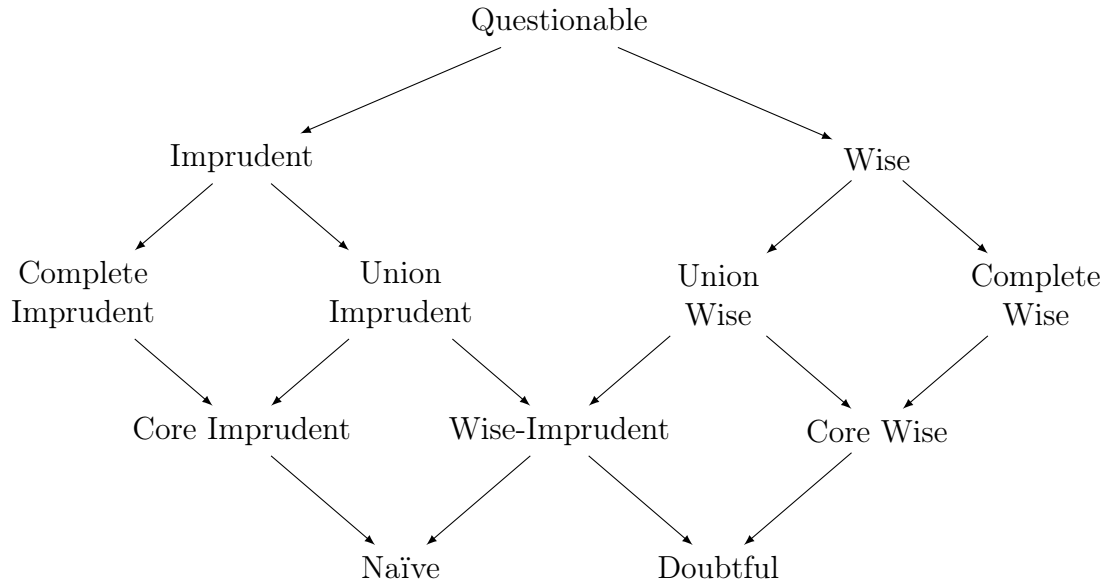


Figura 5.1: Árbol de familias de relaciones *questionable* y *normal questionable*. También puede interpretarse como de propiedades de funciones *world-selection*.

Al querer implementar estas estructuras en operadores de cambio, descubrimos que los operadores *revision* no priorizados pueden caracterizarse vía relaciones *questionable* más que *credibile*. Más aún, estos operadores pueden interpretarse como la unión de dos operadores *elementary world revision*, donde uno de ellos se enfoca en la credibilidad, mientras que el otro, enrocando los parámetros, determina la cuestionabilidad. Este tipo de operadores serán el objeto de estudio del Capítulo 6. En este tipo de operadores, el conjunto $(A \bullet_w B) \cap A \cap B^c$ apareció como la imagen de una función *world-selection*. Así que, nuevamente inspirados en lo hecho en el Capítulo 4 con las relaciones *credibile*, caracterizamos las propiedades de las relaciones *questionable* en términos de una función *world-selection* ρ . Esto significa además que la Figura 5.1 también puede interpretarse respecto a propiedades de funciones *world-selection*.

Demostraciones de los Resultados del Capítulo 5

Demostración de Teorema 5.2.3.

1. Supongamos que existen $A, B \subseteq \mathcal{I}$ tal que $A \succ B$. Por closed over inclusion se deduce que $A \succ \mathcal{I}$, contradiciendo que $\succ$ es questionable. Luego $A \not\succ B$ para todo $A, B \subseteq \mathcal{I}$.
2. Supongamos que $\succ$ es union imprudent y tomemos un par (A, B) tal que $A \not\subseteq B$ y $B \neq \emptyset$. Si $A \succ B$ entonces existe $w \in B$ tal que $A \succ \{w\}$ por ser union imprudent. Si existe $w \in B$ tal que $A \succ \{w\}$ entonces $A \succ B$ por ser imprudent. Supongamos ahora que vale que si $A \not\subseteq B$ y $B \neq \emptyset$ entonces $A \succ B$ si y sólo si existe $w \in B$ tal que $A \succ \{w\}$. Si $A \succ B$, $\emptyset \neq B \subseteq B'$ y $A \not\subseteq B'$ entonces vale que existe $w \in B$ tal que $A \succ \{w\}$. Como $w \in B'$ y $A \not\subseteq B'$, resulta que $A \succ B'$. Si $A \succ \bigcup S$ para $S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{I})$ y $\emptyset \neq \bigcup S$, entonces existe $w \in \bigcup S$ tal que $A \succ \{w\}$. Luego, por hipótesis, $A \succ \bigcup S$.
3. Por el ítem anterior, solamente falta ver que el caso en que $B = \emptyset$ coincide con pro-consistent observation. Es decir, tenemos la afirmación si $A \not\subseteq \emptyset$ entonces $A \succ \emptyset$ si y sólo si existe $w \in \emptyset$ tal que $A \succ \{w\}$. Como “existe $w \in \emptyset$ tal que $A \succ \{w\}$ ” es falso, la afirmación de la oración anterior se puede reescribir como “si $A \neq \emptyset$ entonces $A \not\succ \emptyset$ ”, que coincide con el contrarrecíproco de pro-consistent observation para $\succ$.
4. Supongamos que $\succ$ es union normal imprudent y tomemos un par (A, B) tal que $A \cap B = \emptyset \neq B$. Si $A \succ B$ entonces existe $w \in B$ tal que $A \succ \{w\}$ por ser union imprudent. Si existe $w \in B$ tal que $A \succ \{w\}$ entonces $A \succ B$ por ser normal imprudent, usando que $A \cap B = \emptyset$. Supongamos ahora que vale que si $A \cap B = \emptyset \neq B$ entonces $A \succ B$ si y sólo si existe $w \in B$ tal que $A \succ \{w\}$. Si $A \succ B$, $\emptyset \neq B \subseteq B'$ y $A \cap B' = \emptyset$ entonces vale que existe $w \in B$ tal que $A \succ \{w\}$. Como $w \in B'$ y $A \cap B' = \emptyset$, resulta que $A \succ B'$. Si $A \succ \bigcup S$ para $S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{I})$ y $\emptyset \neq \bigcup S$, entonces existe $w \in \bigcup S$ tal que $A \succ \{w\}$. En particular, existe $B \in S$ tal que $w \in B$. Como $A \succ \bigcup S$, sabemos que $A \cap (\bigcup S) = \emptyset$, por lo que $A \cap B = \emptyset$ para todo $B \in S$. Por hipótesis, tenemos entonces que $A \succ B$.

□

Demostración de Teorema 5.2.5.

1. Supongamos que $A \cap B = \emptyset \neq A$ y $A \succ B$. Si tomamos $\emptyset = B' \subseteq B$, por ser wise resulta que $A \succ \emptyset$. Luego $\succ$ es closed over empty set.
2. Supongamos que $\succ$ es union wise. Si $A \succ B$ entonces $A \succ \{w\}$ para todo $w \in B$ por ser wise. Si $A \not\subseteq B \neq \emptyset$ y $A \succ \{w\}$ para todo $w \in B$ entonces $A \succ B$ por ser union wise. Supongamos ahora que vale que si $A \not\subseteq B$ entonces $A \succ B$ si y sólo si $A \succ \{w\}$ para todo $w \in B$. Si $A \succ B$ y $B' \subseteq B$ entonces vale que $A \not\subseteq B'$ pues $\succ$ es questionable. Luego $A \not\subseteq B'$ y $A \succ \{w\}$ para todo $w \in B'$. Por lo tanto, $A \succ B'$. Si $A \succ B$ para todo $B \in S$ y $A \not\subseteq \bigcup S \neq \emptyset$, de la hipótesis se deduce que $A \succ \{w\}$ para todo $w \in B$ de todo $\emptyset \neq B \in S$. De lo que se deduce que $A \succ \{w\}$ para todo $w \in \bigcup S$. Luego, por hipótesis, $A \succ \bigcup S$.
3. Por el ítem anterior, solamente falta ver el caso en que $B = \emptyset$ coincide con skeptic. Es decir, tenemos la afirmación “si $A \not\subseteq \emptyset$ entonces $A \succ \emptyset$ si y sólo si $A \succ \{w\}$ para todo $w \in \emptyset$ ”. Como “ $A \succ \{w\}$ para todo $w \in \emptyset$ ” es verdadero, la afirmación de la oración anterior se puede reescribir como “si $A \neq \emptyset$ entonces $A \succ \emptyset$ ”. Esta afirmación, implica skeptic trivialmente. Por otro lado, si $\succ$ es skeptic y wise, se tiene que si $A \neq \emptyset$ entonces $A \succ \emptyset$.
4. Se deduce de que las premisas de union wise implican las premisas de union normal wise.

5. Supongamos que $\succ$ es union normal wise y que $A \cap B = \emptyset$ y $B \neq \emptyset$. Como es union wise y de $A \cap B = \emptyset$ se deduce que $A \not\subseteq B$, tenemos que $A \succ B$ si y sólo si $A \succ \{w\}$ para todo $w \in B$. Veamos ahora que si vale que si $A \cap B = \emptyset$ y $B \neq \emptyset$ entonces $A \succ B$ si y sólo si $A \succ \{w\}$ para todo $w \in B$, entonces $\succ$ es union normal wise. Si $A \succ B$ y $B' \subseteq B$, entonces por hipótesis todo $w \in B$ cumple que $A \succ \{w\}$, en particular los de B' . Por lo tanto, $A \succ B'$. Si $A \succ B$ para todo $B \in S$ y $\bigcup S \neq \emptyset$, entonces $A \succ \{w\}$ se cumple para todo $w \in B$. En particular, $A \succ \{w\}$ para todo $w \in \bigcup S$. Luego $A \succ \bigcup S$.
6. Por el ítem anterior, solamente falta ver el caso en que $B = \emptyset$ coincide con skeptic. Es decir, tenemos la afirmación “si $A \not\subseteq \emptyset$ entonces $A \succ \emptyset$ si y sólo si $A \succ \{w\}$ para todo $w \in \emptyset$ ”. Como “ $A \succ \{w\}$ para todo $w \in \emptyset$ ” es verdadero, la afirmación de la oración anterior se puede reescribir como “si $A \neq \emptyset$ entonces $A \succ \emptyset$ ”. Esta afirmación, implica skeptic trivialmente. Por otro lado, si $\succ$ es skeptic y wise, se tiene que si $A \neq \emptyset$ entonces $A \succ \emptyset$.

□

Demostración de Teorema 5.2.7.

1. Si $A \succ (\bigcup S)$ tal que $\bigcup S \neq \emptyset$, como cualquier $B \in S$ cumple que $B \subseteq \bigcup S$ y $\succ$ es wise, tenemos que $A \succ B$ para todo $B \in S$.
2. Supongamos que $A \succ B$ para todo $B \in S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{I})$ y $A \not\subseteq \bigcup S \neq \emptyset$. Entonces existe $\emptyset \neq B \in S$ y estamos en las hipótesis de imprudent, por lo que $A \succ \bigcup S$.
3. Se deduce de forma directa a partir de los ítems anteriores.
4. Al ser normal questionable, se tiene que si $A \succ B$ entonces $A \cap B = \emptyset$ para todo $B \in S$. Por lo que $A \cap (\bigcup S) = \emptyset$. Como $\bigcup S \neq \emptyset$, entonces existe $B \in S$ tal que $B \neq \emptyset$, y estamos en las hipótesis de normal imprudent, por lo que $A \succ (\bigcup S)$.
5. Se deduce de forma directa a partir del ítem anterior y del primer ítem.
6. Supongamos que existen $A, B \subseteq \mathcal{I}$ tal que $A \succ B$. En particular, $A \neq \emptyset$. Como es pro-consistent observation, tenemos que $A \not\prec \emptyset$. Pero por ser wise, como $\emptyset \subseteq B$, se tiene que $A \succ \emptyset$, llegando a una contradicción. Luego $A \not\prec B$ para todo $A, B \subseteq \mathcal{I}$. Que la relación vacía satisface pro-consistent observation, wise e imprudent se deduce vacuamente.
7. Sea $A \not\subseteq B$. En particular, $A \neq \emptyset$. Como es skeptic, existe B' tal que $A \cap B' = \emptyset$ y $A \succ B'$. Consideremos entonces $\tilde{B} = B \cup B'$ y notemos que $A \cap \tilde{B} = A \cap B$ y que $A \cap \tilde{B}^c = A \cap B^c$. Luego $A \not\subseteq \tilde{B}$. Por ser imprudent, tenemos que $A \succ \tilde{B}$, y por ser wise resulta que $A \succ B$. Combinando esto con el hecho de que es questionable, se tiene que $A \succ B$ si y sólo si $A \not\subseteq B$. Por otro lado, si $A \succ B$ si y sólo si $A \not\subseteq B$, entonces $\succ$ satisface skeptic y tanto wise como imprudent por construcción.
8. Sea $A \cap B = \emptyset \neq A$. Como es skeptic, existe B' tal que $A \cap B' = \emptyset$ y $A \succ B'$. Consideremos entonces $\tilde{B} = B \cup B'$ y notemos que $A \cap \tilde{B} = \emptyset$, es decir $A \cap B = \emptyset \neq A$. Por ser normal imprudent, tenemos que $A \succ \tilde{B}$, y por ser wise resulta que $A \succ B$. Combinando esto con el hecho de que es normal questionable, se tiene que $A \succ B$ si y sólo si $A \cap B = \emptyset \neq A$. Por otro lado, si $A \succ B$ si y sólo si $A \cap B = \emptyset \neq A$, entonces $\succ$ satisface skeptic y tanto wise como normal imprudent por construcción.

□

Demostración de Proposición 5.3.2.

1. Que $\prec$ sea pro-consistent observation equivale a que si $A \neq \emptyset$ entonces $A \not\prec \emptyset$, y esto vale por construcción de $\prec$, pues $(A \bullet_w \emptyset) \cap \emptyset = \emptyset$. Que $\succ$ sea questionable equivale a que si $A \subseteq B$ entonces $A \not\prec B$. Es decir, si $A \cap B^c = \emptyset$ entonces $(A \bullet_w B) \cap A \cap B^c = \emptyset$, que vale por construcción de $\succ$.

2. El postulado propuesto es la transcripción de la condición de compatible en términos de la construcción de $\prec$.
3. $\succ$ es normal cuestionable si y sólo si vale que si $A \succ B$ entonces $A \cap B = \emptyset \neq A$. Por lo que si $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $A \not\succ B$. Por construcción, esto significa que $(A \bullet_w B) \cap A \cap B^c = \emptyset$, o equivalentemente $(A \bullet_w B) \cap A \subseteq B$. Supongamos ahora que se cumple **(Rel2)** y tenemos que $A \succ B$. Por construcción, $(A \bullet_w B) \cap A \cap B^c \neq \emptyset$, o bien, $(A \bullet_w B) \cap A \not\subseteq B$. Por el contrarrecíproco de **(Rel2)**, resulta que $A \cap B = \emptyset$ y por hipótesis sabemos que $A \neq \emptyset$.

□

Demostración de Toerema 5.3.3. De la Definición 5.3.1, consideramos $\succ$ dada por:

$$A \succ B \quad \text{si y sólo si} \quad \emptyset \neq A \cap B^c \subseteq A \sqcup_w B$$

Por construcción de $\sqcup_w$, tenemos que $\succ$ y $\succ$ son equivalentes, pues si $(A \sqcup_w B) \cap A \cap B^c \neq \emptyset$ entonces $A \sqcup_w B = (A *_w B) \cup A$. Luego, $A \cap B^c \subseteq A \sqcup_w B$. Es decir, si $A \succ B$ entonces $A \succ B$, y siempre vale que si $A \succ B$ entonces $A \succ B$.

Por otro lado, tenemos que $(A \sqcup_w B) \cap A \cap B^c = \emptyset$ si y sólo si $A \mathcal{R} B$ ó $A \subseteq B$. Es decir, $A \not\succ B$ si y sólo si $A \mathcal{R} B$ ó $A \subseteq B$. Separaremos $A \not\succ B$ en dos casos disjuntos: $A \mathcal{R} B$ o bien $A \mathcal{R} B$ y $A \subseteq B$.

El operador $*'_w$ del enunciado satisface **(W*1)** y **(W*2)** por construcción, por lo que es válido para construir un nuevo operador $\odot_w$:

$$A \odot_w B = \begin{cases} A *_w B & \text{Si } A \not\succ B \\ (A *_w B) \cup A & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Por construcción se deduce que $A \odot_w B = A \sqcup_w B$ para todo $A, B \subseteq \mathcal{I}$. □

Demostración de Proposición 5.3.4. Un operador world credibility-limited revision satisface **(Rel3)** por construcción y puede interpretarse como un operador world filtered revision donde si $A \mathcal{R} B$ entonces $A *_w B = A \cap B$.

Para ver que el postulado propuesto caracteriza al operador world credibility-limited revision como subfamilia de world filtered revision, por el Teorema 5.3.3, tenemos que:

$$A \odot_w B = \begin{cases} A *_w B & \text{Si } A \not\succ B \\ (A *_w B) \cup A & \text{caso contrario} \end{cases}$$

siendo $\succ$ la relación cuestionable asociada a $\odot_w$ y $*_w$ un operador elementary world revision, que satisface **(W*1)** y **(W*2)**. Como $\succ$ es la relación cuestionable de $\odot_w$, sabemos que $A \not\succ B$ si y sólo si $(A \odot_w B) \cap A \subseteq B$. Es decir, $A \succ B$ si y sólo si $(A *_w B) \cup A \not\subseteq B$. Por lo tanto, si $A \succ B$ por construcción tenemos que $A \subseteq A \odot_w B$, mientras que por **(Rel3)** vale $A \odot_w B \subseteq A$. Luego $A \odot_w B = A$. Si $A \not\succ B$ entonces $A \odot_w B \subseteq B$ por **(W*1)** de $*_w$. □

Demostración de Proposición 5.3.5.

1. Supongamos que si $A \not\succ B$ entonces $A \prec B$. Aplicado a $A \odot_w B$, significa que si $A \not\succ B$ entonces $A *_w B \neq \emptyset$ o bien $A = \emptyset$. Por lo tanto, $A \odot_w B \neq \emptyset$ ó $A = \emptyset$. Si $A \succ B$, sabemos que $A \neq \emptyset$ pues $\succ$ es cuestionable, y que $A \odot_w B = (A *_w B) \cup A$. Luego, $A \odot_w B \neq \emptyset$. En cualquier caso, $A \odot_w B \neq \emptyset$ ó $A = \emptyset$.

Si $\odot_w$ satisface **(Rel4)** y vale que si $A \not\succ B$ entonces $A \succ B$, de un lado tenemos que $A \odot_w B \neq \emptyset$ ó $A = \emptyset$, mientras que del otro, por la Definición 5.3.1, sabemos que existe (A, B) tal que $A \neq \emptyset$, $A \odot_w B \subseteq B^c$ y $A \odot_w B \subseteq A^c$. Dado que por construcción $A \odot_w B \subseteq A \cup B$, esto únicamente pasa cuando $A \odot_w B = \emptyset$, llegando a una contradicción.

2. Supongamos que vale que si $A \succ B$, entonces $A \not\prec B$. Luego $A \odot_w B = (A *_w B) \cup A$. Pero por $A \not\prec B$ sabemos que $(A \cap B) \cup A *_w B = \emptyset$. Por lo tanto, si $A \succ B$ entonces $A \odot_w B = A$ y $A \cap B = \emptyset$. Luego, $\odot_w$ satisface **(Rel3)**, y por contrarrecíproco, $\succ$ es normal questionable.

Si, en cambio, $\odot_w$ satisface **(Rel3)** y **(Rel2)**, sabemos que si $A \succ B$ entonces $A \odot_w B = A$ y $A \cap B = \emptyset$. Por lo tanto, $(A \odot_w B) \cap B = \emptyset$, es decir $A \not\prec B$.

3. Esto se deduce directamente de los ítems anteriores. □

Demostración de Teorema 5.3.6. De la construcción de $\ominus_w$ sabemos que:

$$A \ominus_w B = (A *_w B) \cup (B *_w' (A \cap s(B)))$$

Podemos utilizar la caracterización de los operadores TR world revision con funciones world selection:

$$A \ominus_w B = (A \cap B) \cup \sigma(A, B^c) \cup \sigma'(B, A^c \cup s(B)^c)$$

Como $\sigma'(B, A^c \cup s(B)^c) \subseteq B^c$ y $\sigma(A, B^c) \subseteq B$ por la definición de world-selection, tenemos que:

$$(A \ominus_w B) \cap B = (A \cap B) \cup \sigma(A, B^c) = A *_w B$$

Luego $A \prec B$ si y sólo si $A *_w B \neq \emptyset$. Por los postulados **(W*1)** y **(W*3)**, resulta que $A *_w B \neq \emptyset$ si y sólo si $B \neq \emptyset$. Por lo tanto, $A \prec B$ si y sólo si $B \neq \emptyset$.

Bajo el mismo principio de antes, tenemos que:

$$(A \ominus_w B) \cap A \cap B^c = \sigma'(B, A^c \cup s(B)^c)$$

De lo que se deduce que $A \succ B$ si y sólo si $(B *_w' (A \cap s(B))) \cap B^c \neq \emptyset$. Además, si $A \cap B \neq \emptyset$, tenemos que $A \ominus_w B = A \cap B$ pues los operadores $*_w$ y $*'_w$ satisfacen vacuity **(W*4)**. Por lo tanto, en este caso, $(A \ominus_w B) \cap A \cap B^c = \emptyset$, o equivalentemente $(A \ominus_w B) \cap A \subseteq B$. Luego $\ominus_w$ satisface **(Rel2)**. □

Demostración de Proposición 5.4.2. El hecho de que $\succ$ sea non-belief compatible se deduce directamente de su definición y de que ρ es una world-selection: si $A \subseteq B$ entonces $\rho(B, A^c) \subseteq B^c \cap A = \emptyset$. El resto del listado lo continuamos uno a uno.

1. Si sabemos que si $A \succ B$ entonces $A \cap B = \emptyset \neq A$ esto equivale a que si $\rho(B, A^c) \neq \emptyset$ entonces $A \cap B = \emptyset \neq A$. Reescribiendo $A^c = D$ nos queda que si $\rho(B, D) \neq \emptyset$ entonces $B \subseteq D \neq \mathcal{I}$. Esto es el contrarrecíproco de que ρ sea normal: si $B \not\subseteq D$ entonces $\rho(B, D) = \emptyset$. El caso $D = \mathcal{I}$ se deduce por ser ρ world-selection.
2. Que valga skeptic, o sea que para todo $A \neq \emptyset$ existe B tal que $A \cap B = \emptyset$ y $A \succ B$, es equivalente a que para todo $D \neq \mathcal{I}$ existe B tal que $B \subseteq D$ y $\rho(B, D) \neq \emptyset$.
3. pro-consistent observation significa, en términos de ρ que si $\rho(\emptyset, A^c) \neq \emptyset$ entonces $A = \emptyset$. El contrarrecíproco reescribiendo $D = A^c$ es que si $D \neq \mathcal{I}$ entonces $\rho(\emptyset, D) = \emptyset$. Como $\rho(\emptyset, \mathcal{I}) = \emptyset$ por ser ρ world-selection, tenemos que $\succ$ es pro consistent observation si y sólo si $\rho(\emptyset, D) = \emptyset$. □

Demostración de Teorema 5.4.4. Para esta demostración vamos a realizar la misma metodología que en el Teorema 4.3.2. Utilizaremos entonces los contrarrecíprocos de la definiciones de imprudent, normal imprudent y wise, y las caracterizaciones de union imprudent, union wise y union normal wise.

imprudent: si $A \not\prec B'$, $A \not\subseteq B'$ y $\emptyset \neq B \subseteq B'$ entonces $A \not\prec B'$;

normal imprudent: si $A \not\asymp B'$, $\emptyset \neq B \subseteq B'$ y $A \cap B' = \emptyset$ entonces $A \not\asymp B$;

wise: si $A \not\asymp B'$ y $B' \subseteq B$ entonces $A \not\asymp B$;

union imprudent: si $A \not\subseteq B \neq \emptyset$ entonces $A \succ B$ si y sólo si existe $w \in B$ tal que $A \succ \{w\}$;

union wise: si $A \not\subseteq B \neq \emptyset$ entonces $A \succ B$ si y sólo si $A \succ \{w\}$ para todo $w \in B$;

union normal wise: si $A \cap B = \emptyset$ entonces $A \succ B$ si y sólo si $A \succ \{w\}$ para todo $w \in B$;

Al reemplazar la relación $\succ$ por su definición en términos de ρ nos queda que:

imprudent: si $\rho(B', A^c) = \emptyset$, $A \not\subseteq B'$ y $\emptyset \neq B \subseteq B'$ entonces $\rho(B, A^c) = \emptyset$;

normal imprudent: si $\rho(B', A^c) = \emptyset$, $\emptyset \neq B \subseteq B'$ y $A \cap B' = \emptyset$ entonces $\rho(B, A^c) = \emptyset$;

wise: si $\rho(B', A^c) = \emptyset$ y $B' \subseteq B$ entonces $\rho(B, A^c) = \emptyset$;

union imprudent: si $A \not\subseteq B \neq \emptyset$ entonces $\rho(B, A^c) = \emptyset$ si y sólo si para todo $w \in B$ tal que $\rho(\{w\}, A^c) = \emptyset$;

union wise: si $A \not\subseteq B \neq \emptyset$ entonces $\rho(B, A^c) = \emptyset$ si y sólo si existe $w \in B$ tal que $\rho(\{w\}, A^c) = \emptyset$;

union normal wise: si $A \cap B = \emptyset \neq B$ entonces $\rho(B, A^c) = \emptyset$ si y sólo si existe $w \in B$ tal que $\rho(\{w\}, A^c) = \emptyset$;

Ahora cambiaremos sintácticamente B por A y A^c por B :

imprudent: si $\rho(A', B) = \emptyset$, $B^c \not\subseteq A'$ y $\emptyset \neq A \subseteq A'$ entonces $\rho(A, B) = \emptyset$;

normal imprudent: si $\rho(A', B) = \emptyset$, $\emptyset \neq A \subseteq A'$ y $B^c \cap A' = \emptyset$ entonces $\rho(A, B) = \emptyset$;

wise: si $\rho(A', B) = \emptyset$ y $A' \subseteq A$ entonces $\rho(A, B) = \emptyset$;

union imprudent: si $B^c \not\subseteq A \neq \emptyset$ entonces $\rho(A, B) = \emptyset$ si y sólo si para todo $w \in A$ tal que $\rho(\{w\}, B) = \emptyset$;

union wise: si $B^c \not\subseteq A \neq \emptyset$ entonces $\rho(A, B) = \emptyset$ si y sólo si existe $w \in A$ tal que $\rho(\{w\}, B) = \emptyset$;

union normal wise: si $B^c \cap A = \emptyset \neq A$ entonces $\rho(A, B) = \emptyset$ si y sólo si existe $w \in A$ tal que $\rho(\{w\}, B) = \emptyset$;

Reescribiendo un poco las propiedades que nos quedaron obtenemos las equivalencias:

imprudent: si $\rho(A', B) = \emptyset$, $B \cup A' \neq \mathcal{I}$ y $\emptyset \neq A \subseteq A'$ entonces $\rho(A, B) = \emptyset$;

normal imprudent: si $\rho(A', B) = \emptyset$, $\emptyset \neq A \subseteq A'$ y $A' \subseteq B$ entonces $\rho(A, B) = \emptyset$;

wise: si $\rho(A', B) = \emptyset$ y $A' \subseteq A$ entonces $\rho(A, B) = \emptyset$;

union imprudent: si $B \cup A \neq \mathcal{I}$ y $A \neq \emptyset$ entonces $\rho(A, B) = \emptyset$ si y sólo si para todo $w \in A$ tal que $\rho(\{w\}, B) = \emptyset$;

union wise: si $B \cup A \neq \mathcal{I}$ y $A \neq \emptyset$ entonces $\rho(A, B) = \emptyset$ si y sólo si existe $w \in A$ tal que $\rho(\{w\}, B) = \emptyset$;

union normal wise: si $\emptyset \neq A \subseteq B$ entonces $\rho(A, B) = \emptyset$ si y sólo si existe $w \in A$ tal que $\rho(\{w\}, B) = \emptyset$;

□

Capítulo 6

Una Familia de Operadores No Priorizados sobre Mundos

Lo mejor que el mundo tiene está en los muchos mundos que el mundo contiene.

Patatas Arriba, Eduardo Galeano (1998).

En este capítulo concluiremos gran parte de nuestro objetivo: tener una familia que englobe todas las propuestas anteriores, desde los elementary world del Capítulo 3, el refinamiento de éstos visto en el Capítulo 4 (usando relaciones credible), hasta los operadores revision no priorizados del Capítulo 5 (y las relaciones questionable). Ya tuvimos un adelanto: los operadores world filtered revision y world promotion se pueden caracterizar como la unión de dos operadores elementary world revision. Llamaremos *versatile* a esta familia de operadores, debido a que bajo ésta podremos representar todos los operadores vistos e incluir, en términos de operadores de cambio, las nociones de credibilidad y cuestionabilidad.

Para este capítulo es necesario ordenar el análisis que se hará de los operadores versatile, ya que hay una gran cantidad de propiedades que a su vez se pueden combinar. Tal análisis se centrará en la axiomatización de las propiedades de las funciones world-selection que caracterizan a estos operadores. Esta lista de postulados la separaremos en 4 tipos:

Clásicas son aquellas propiedades vistas del Capítulo 3 vinculadas a vacuidad y localidad.

Suplementarias se refiere a las propiedades del Capítulo 3 asociadas a las caracterizaciones de la teoría de asignaciones faithful.

Credible son las propiedades referidas a las relaciones credible, que aparecieron en la Sección 4.3 y fueron presentadas en la Definición 4.3.1.

Questionable hace referencia a las propiedades asociadas a las relaciones de cuestionabilidad, dadas en la Definición 5.4.3 de la Sección 5.4. Aquí se incluirán además las propiedades de la Definición 5.4.5, asociadas a la actitud epistémica totalmente cuestionable y las propiedades basadas en las ideas de la Proposición 5.3.5, que vinculan a las funciones world-selection de un operador world versatile entre sí.

Algo que se destacará de este análisis es la generación sistemática de postulados de operadores world versatile a partir de las propiedades de las funciones world-selection y las relaciones credible y questionable asociadas. De hecho, identificar la conexión entre relaciones, funciones world-selection y postulados resultará útil para luego poder definir axiomáticamente y constructivamente nuevos operadores con propiedades combinadas. Este resultará ser el verdadero potencial de los operadores world versatile: una estructura a la cual se le pueden volcar todas las propiedades conocidas de la teoría y combinarlas entre sí.

6.1 Operadores World Versatile

La familia de operadores versatile formaliza la diversidad de comportamientos cuando se pretende revisar o contraer y en un contexto tanto de credibilidad como de cuestionabilidad. Estos operadores pueden entenderse como versiones más débiles de los operadores elementary world contraction y revision en el siguiente sentido. A partir de los postulados **(W-1)** y **(W-2)** vemos que todo operador elementary world contraction $-_w$ satisface:

$$A \subseteq A -_w B^c \subseteq A \cup B$$

Más aún, todo operador que satisface esta doble inclusión es un elementary world contraction. De la misma manera, los postulados **(W*1)** y **(W*2)** afirman que ser operador elementary world revision $*_w$ equivale a cumplir que:

$$A \cap B \subseteq A *_w B \subseteq B$$

Los operadores elementary world versatile son entonces los que se mueven en ambos rangos.

Definición 6.1.1. Dados $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{I})$, se considera el siguiente postulado para el operador $\odot_w : \mathcal{P}(\mathcal{I}) \times \mathcal{P}(\mathcal{I}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I})$:

(W $\odot$ 1) $A \odot_w B \subseteq A \cup B$ (shared success).

Llamaremos *elementary world versatile* a los operadores $\odot_w$ que cumplan **(W $\odot$ 1)** y **(W*2)**.

Vemos entonces que todo operador elementary world versatile satisface que:

$$A \cap B \subseteq A \odot_w B \subseteq A \cup B$$

Es decir, es un operador que llega a los extremos compatibles de los operadores elementary world revision y elementary world contraction. Pero este es tan sólo el primer vínculo entre estos tres operadores. Los siguientes lemas muestran como cada postulado que define a los operadores elementary world versatile, cuando se los combina con las construcciones de Levi y Harper, dan operadores elementary world.

Lema 6.1.2. Sea $\odot_w : \mathcal{P}(\mathcal{I}) \times \mathcal{P}(\mathcal{I}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I})$ un operador de cambio sobre mundos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. El operador $\odot_w$ satisface **(W $\odot$ 1)**;
2. El operador $-_w$ definido como $A -_w B = A \cup (A \odot_w B^c)$ es un elementary world contraction, que satisface **(W-1)** y **(W-2)**;
3. El operador $-'_w$ definido como $A -'_w B = A \cup (B^c \odot_w A)$ es un elementary world contraction, que satisface **(W-1)** y **(W-2)**.

A los operadores elementary world contraction $-_w$ y $-'_w$ los llamaremos asociados a $\odot_w$.

Demostración en la página 100, al final del capítulo.

El lema anterior nos afirma que los operadores que al aplicar Harper nos da un operador elementary world contraction se caracterizan por un único postulado, **(W $\odot$ 1)**. Lo mismo sucede con los operadores elementary world revision, aplicando Levi y el postulado **(W*2)**. Estos resultados determinan la máxima generalidad de lo analizado en la Sección 5.1.

Lema 6.1.3. Sea $\odot_w : \mathcal{P}(\mathcal{I}) \times \mathcal{P}(\mathcal{I}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I})$ un operador de cambio sobre mundos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. El operador $\odot_w$ satisface **(W*2)**;

2. El operador $*_w$ definido como $A *_w B = (A \odot_w B) \cap B$ es un elementary world revision, que satisface **(W*1)** y **(W*2)**;
3. El operador $'_w$ definido como $A '_w B = (B \odot_w A) \cap B$ es un elementary world revision, que satisfacen **(W*1)** y **(W*2)**.

A los operadores elementary world revision $*_w$ y $'_w$ los llamaremos asociados a $\odot_w$.

Demostración en la página 100, al final del capítulo.

Los lemas anteriores completan una idea que habíamos hablamos en el Capítulo 3 y nos permiten ver las Identidades de Levi y Harper desde otra perspectiva, como se muestra en la Figura 6.1. A partir de las construcciones de Levi y Harper, los operadores que surgen satisfacen los postulados **(W*1)** (si aplicamos Levi) y **(W-1)** (si aplicamos Harper). Por otro lado, aplicar estas construcciones a operadores world versatile nos aseguran que se satisfacen los postulados **(W*2)** y **(W-2)** (vía **(W⊙1)**). Ya vimos que estos postulados caracterizan a los operadores elementary world contraction y elementary world revision.

Cuadrado de Postulados Elementary World

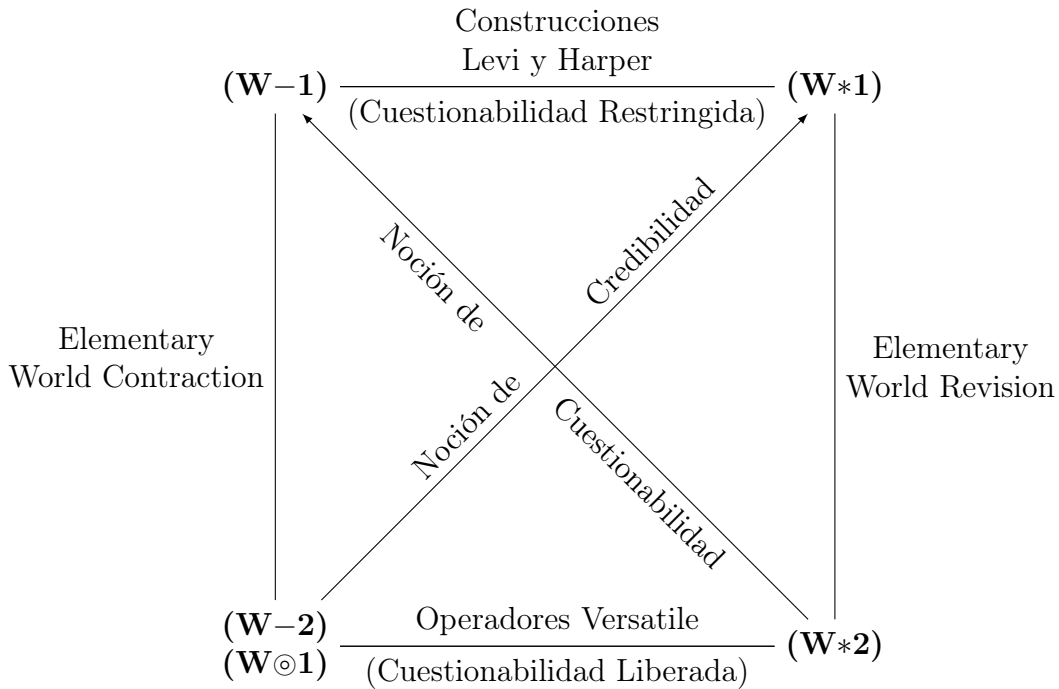


Figura 6.1: El cuadrado de postulados de operadores elementary world permite una noción espacial de las diferentes perspectivas donde estos postulados aparecen.

Además vimos que los postulados **(W*1)** y **(W-2)** determinan qué nuevos mundos aparecerán en el nuevo conjunto de creencias dado por el operador, dando cuenta de una noción de credibilidad. La manera en que están planteados estos postulados hace que sea posible trabajar con una diversidad de nociones de credibilidad, es decir, hay libertad al momento de elegir un subconjunto de B . Este concepto es lo que los distingue respecto de situaciones más rígidas, como el operador expansion, que sólo permite elegir el conjunto $A \cap B$, o el operador que deja constante el conjunto de creencias, que elige el conjunto A . Análogamente, los postulados **(W-1)** y **(W*2)** hacen referencia a los mundos que se preservan del conjunto de creencias original, dando cuenta de una noción de cuestionabilidad. Pero esta noción no tiene la misma libertad que la de credibilidad en los operadores elementary world. Los postulados asociados a las construcciones de Levi y

Harper, $(\mathbf{W}-1)$ y $(\mathbf{W}*1)$, fuerzan a que o bien estén todos los mundos de A , haciendo que toda observación sea totalmente cuestionable, o bien solamente haya mundos de B , logrando que toda observación sea no cuestionable.

Aprovechándose de que $(\mathbf{W}\odot 1)$ y $(\mathbf{W}*2)$ son versiones más débiles de $(\mathbf{W}*1)$ y $(\mathbf{W}-1)$ respectivamente, los operadores versatile dan a la noción de cuestionabilidad una libertad análoga a la de credibilidad. Así, $(\mathbf{W}\odot 1)$ y $(\mathbf{W}*2)$ dan la misma noción de credibilidad que $(\mathbf{W}*1)$ y $(\mathbf{W}-1)$ para los operadores que definen. Pero no limitan la noción de cuestionabilidad como lo hacen $(\mathbf{W}*1)$ y $(\mathbf{W}-1)$, que la llevan a posiciones extremas e incompatibles, haciéndolas que se comporten conceptualmente como una el dual de la otra.

A partir de los lemas anteriores, podemos formalizar la idea de que hay una diversidad de operadores entre las posiciones elementary world contraction y revision que proponen las Identidades de Levi y Harper. Esta es otra manera de caracterizar a los operadores elementary world versatile.

Teorema 6.1.4. *Sea $\odot_w : \mathcal{P}(\mathcal{I}) \times \mathcal{P}(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I})$ un operador de cambio sobre mundos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El operador $\odot_w$ satisface $(\mathbf{W}\odot 1)$ y $(\mathbf{W}*2)$.*
2. *Los operadores elementary world contraction y elementary world revision asociados a $\odot_w$ cumplen que para todo $A, B \subseteq \mathcal{I}$:*

$$A \odot_w B = (A -_w B^c) \cap (B -'_w A^c) = (A *_w B) \cup (B *_w' A)$$

3. *Existen dos funciones world-selection σ y ρ tal que para todo $A, B \subseteq \mathcal{I}$:*

$$A \odot_w B = (A \cap B) \cup \sigma(A, B^c) \cup \rho(B, A^c)$$

En tal caso, diremos que el operador $\odot_w$ está representado por el par (σ, ρ) de funciones world-selection.

Demostración en la página 100, al final del capítulo.

El teorema anterior nos muestra que dado un operador elementary world versatile sus operadores elementary world asociados son las posiciones extremas de tal operador:

$$\begin{array}{lcl} A *_w B & \subseteq & A \odot_w B \subseteq A -_w B^c \\ A *_w' B & \subseteq & B \odot_w A \subseteq A -'_w B^c \end{array}$$

También vemos que las construcciones de las identidades de Levi y Harper se redujeron a ser las que llevan al operador versatile a sus operadores elementary world asociados. Lo único que mantiene su relevancia es que al aplicar Levi hay que evaluar por B^c , por lo que tener definido al operador compuesto por un operador versatile cuya segunda coordenada tiene aplicado un complemento será útil para comparar con operadores de tipo contraction.

Definición 6.1.5. Sea $\odot_w$ un operador de cambio sobre mundos. Definimos el operador world dual $\odot$ como $A \odot_w B = A \odot_w B^c$.

Esta definición no es sólo una cuestión notacional. Hay contextos de aplicación donde no es posible trabajar con B^c , pero sí con B . Por otro lado, tener definido este operador simplifica la comparación de los operadores versatile respecto a las familias de operadores de tipo contraction, ya que $\odot_w$ satisface $(\mathbf{W}\odot 1)$ si y sólo si $\odot_w$ satisface $(\mathbf{W}-2)$.

Por último, la construcción de los operadores elementary world versatile en términos de funciones world-selection nos ayuda a interpretar conceptualmente cómo son las acciones de los operadores elementary world versatile, donde parecen particionar en cuatro partes disjuntas a todo el espacio:

Toma todo el conjunto $A \cap B$ porque son los mundos en donde tanto el conjunto de creencias como la observación “están de acuerdo”.

Toma un subconjunto de $A^c \cap B$ que son los mundos aceptados para darle “credibilidad” a la nueva observación. La selección está dada por $\sigma(A, B^c)$.

Toma un subconjunto de $B^c \cap A$ que son los mundos del conjunto de creencias usados para “cuestionar” partes de la nueva observación. La selección está dada por $\rho(B, A^c)$.

Rechaza todo el conjunto $B^c \cap A^c$ ya que son los mundos que no fueron puestos en juego ni por el conjunto de creencias ni por la observación.

Podemos ver entonces que las funciones world-selection de un operador elementary world versatile $\odot_w$ cumplen de forma independiente roles vinculados a las relaciones credible y questionable asociadas a $\odot_w$.

Proposición 6.1.6. Sean $\odot_w$ un operador de elementary world versatile, que satisfice $(W\odot 1)$ y $(W*2)$ y está representado por el par (σ, ρ) de funciones world-selection asociadas, y $\prec, \succ$ y $\succ\succ$ sus relaciones asociadas de la Definición 5.3.1. Entonces:

1. $\prec$ es la relación credible de σ según la Definición 4.1.4;
2. $\succ$ y $\succ\succ$ es la relación questionable de ρ según la Definición 5.4.1;
3. $\succ$ es una relación normal questionable si y sólo si $\odot_w$ satisfice **(Rel2)**;
4. $\succ$ es una relación normal questionable si y sólo si ρ es normal;

A los operadores elementary world versatile que satisfice **(Rel2)** los llamaremos normal questionable world versatile.

Demostración en la página 101, al final del capítulo.

Así, los operadores elementary world versatile sintetizan lo visto en capítulos anteriores:

- Neutralizan la dualidad dada por las Identidades de Levi y Harper, donde los operadores elementary world quedaban separados, pero con las mismas propiedades, vinculados por una función world-selection;
- Su construcción se identifica con las relaciones credible y questionable asociadas a los operadores de cambio tal y como las estudiamos en los Capítulos 4 y 5;
- Se construyen mediante funciones world-selection, a las que les podemos aplicar todas las propiedades vistas.

Esta interpretación vislumbra roles específicos para las funciones world-selection que utilizaremos para identificarlas.

Definición 6.1.7. Dado un operador elementary world versatile $\odot_w$ llamaremos *credible* a la función world-selection del operador notada como σ y *questionable* a la función world-selection del operador notada como ρ , donde se tiene que para todo $A, B \subseteq \mathcal{I}$:

$$A \odot_w B = (A \cap B) \cup \sigma(A, B^c) \cup \rho(B, A^c)$$

Esta nomenclatura está vinculada a que estas funciones caracterizan a las relaciones credible y questionable de $\odot_w$ en términos de la Definición 5.3.1.

En las siguientes secciones nos concentraremos en reescribir las propiedades de las funciones world-selection que definen operadores world versatile como postulados, teniendo así diferentes teoremas de representación. Paralelamente y cuando sea el caso, identificaremos a las familias de operadores world que presentamos en los capítulos anteriores, probando que siempre estuvimos trabajando con casos particulares de esta familia de operadores.

6.2 Postulados Questionable

Dijimos al inicio de este capítulo que este análisis presentará además una axiomatización sistemática de las propiedades de las funciones world-selection. El Teorema 6.1.4 es lo que formaliza esta afirmación:

- la construcción mediante operadores elementary world revision y que $(A \odot_w B) \cap B$ y $(A \odot_w B) \cap A$ sean las expresiones de estos operadores nos permite tomar postulados para operadores revision y adaptarlos en términos de $\odot_w$;
- la construcción mediante funciones world-selection y su conexión con las relaciones credible y questionable nos sirve para asociar la consistencia de $(A \odot_w B) \cap B$ con las propiedades de credibilidad y la validez de $A \odot_w B \not\subseteq B$ con las propiedades de cuestionabilidad.

Por lo tanto, no hay que hacer importantes interpretaciones para reescribir a postulados de operadores versatile. Se trata sobre todo de reemplazar expresiones y tener precaución en el caso de las propiedades de ρ con el intercambio de roles entre A y B .

Dado que la mayoría de los postulados asociados a σ ya están presentados, comenzaremos por los relacionados con ρ , concretamente postulados sobre cuestionabilidad. Como dijimos, la mayoría estarán condicionados por:

$$A \succ B \quad \text{si y sólo si} \quad (A \odot_w B) \not\subseteq B$$

Más aún, en los casos en que se tiene como hipótesis que $A \cap B = \emptyset$ podemos usar:

$$A \succ B \quad \text{si y sólo si} \quad (A \odot_w B) \cap A \neq \emptyset$$

Por lo que basta con tomar las definiciones y caracterizaciones de la Sección 5.2 y reemplazar sistemáticamente.

Definición 6.2.1. Dados $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{I})$, se consideran los siguientes postulados para el operador $\odot_w : \mathcal{P}(\mathcal{I}) \times \mathcal{P}(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I})$:

- (WQ $\odot$ 1) Si $A \odot_w B \not\subseteq B$, $\emptyset \neq B \subseteq B'$ y $A \not\subseteq B'$ entonces $A \odot_w B' \not\subseteq B'$ (weak imprudent monotony).
- (WQ $\odot$ 2) Si $(A \odot_w B) \cap A \neq \emptyset$, $\emptyset \neq B \subseteq B'$ entonces $(A \odot_w B') \cap A \neq \emptyset$ (imprudent monotony).
- (WQ $\odot$ 3) Si $A \not\subseteq B \neq \emptyset$ entonces $A \odot_w B \not\subseteq B$ si y sólo si existe $w \in B$ tal que $A \odot_w \{w\} \not\subseteq \{w\}$ (weak imprudent distribution).
- (WQ $\odot$ 4) $A \odot_w \emptyset = \emptyset$ (imprudent consistency);
- (WQ $\odot$ 5) Si $A \odot_w B \not\subseteq B$ y $B' \subseteq B$, entonces $A \odot_w B' \not\subseteq B'$ (weak wise monotony).
- (WQ $\odot$ 6) Si $A \not\subseteq B \neq \emptyset$ entonces $A \odot_w B \not\subseteq B$ si y sólo si $A \odot_w \{w\} \not\subseteq \{w\}$ para todo $w \in B$ (weak wise distribution).
- (WQ $\odot$ 7) Si $A \cap B = \emptyset \neq B$ entonces $(A \odot_w B) \cap A \neq \emptyset$ si y sólo si $(A \odot_w \{w\}) \cap A \neq \emptyset$ para todo $w \in B$ (wise distribution).
- (WQ $\odot$ 8) Si $A \neq \emptyset$ entonces existe B tal que $A \cap B = \emptyset$ y $(A \odot_w B) \cap A \neq \emptyset$ (wise consistency).

Los postulados (WQ $\odot$ 1)~(WQ $\odot$ 4) se corresponden con las primeras cuatro propiedades de la Definición 5.2.2, mientras que (WQ $\odot$ 5)~(WQ $\odot$ 8) son los postulados que se vinculan a las primeras cuatro propiedades de la Definición 5.2.4. La forma sistemática en que fueron concebidos estos postulados simplifica la obtención de teoremas de representación de forma casi automática.

Corolario 6.2.2. Sea $\odot_w$ un operador versatile que satisfice $(W\odot 1)$ y $(W*2)$, y sean σ y ρ sus funciones world-selection asociadas. Entonces:

1. $\odot_w$ satisfice $(WQ\odot 1)$ si y sólo si ρ es imprudent.
2. $\odot_w$ satisfice $(Rel2)$ y $(WQ\odot 2)$ si y sólo si ρ es normal imprudent.
3. $\odot_w$ satisfice $(WQ\odot 3)$ si y sólo si ρ es union imprudent.
4. $\odot_w$ satisfice $(WQ\odot 4)$ si y sólo si $\rho(\emptyset, B) = \emptyset$.
5. $\odot_w$ satisfice $(WQ\odot 5)$ si y sólo si ρ es wise.
6. $\odot_w$ satisfice $(WQ\odot 6)$ si y sólo si ρ es union wise.
7. $\odot_w$ satisfice $(Rel2)$ y $(WQ\odot 7)$ si y sólo si ρ es union normal wise.
8. $\odot_w$ satisfice $(WQ\odot 8)$ si y sólo si para todo $B \neq \mathcal{I}$ existe A tal que $A \subseteq B$ y $\rho(A, B) \neq \emptyset$.

Demostración en la página 101, al final del capítulo.

La combinación de estos postulados nos permiten además reconstruir la Figura 5.1, el árbol de relaciones questionable y normal questionable. La diferencia es que ahora la podemos hacer en términos de postulados.

Definición 6.2.3. Los operadores elementary world versatile se pueden clasificar respecto de si satisfacen los postulados de la Definición 6.2.1. Para identificar a las diferentes familias, utilizaremos los nombres asociados a su relación questionable, quedando vinculados como aparece en la Figura 6.2. El árbol también representa la clasificación de las subfamilias de los operadores normal questionable world versatile, los operadores $\odot_w$ elementary world versatile que satisfacen $(Rel2)$.

Árbol de Familias de Operadores Questionable World Versatile

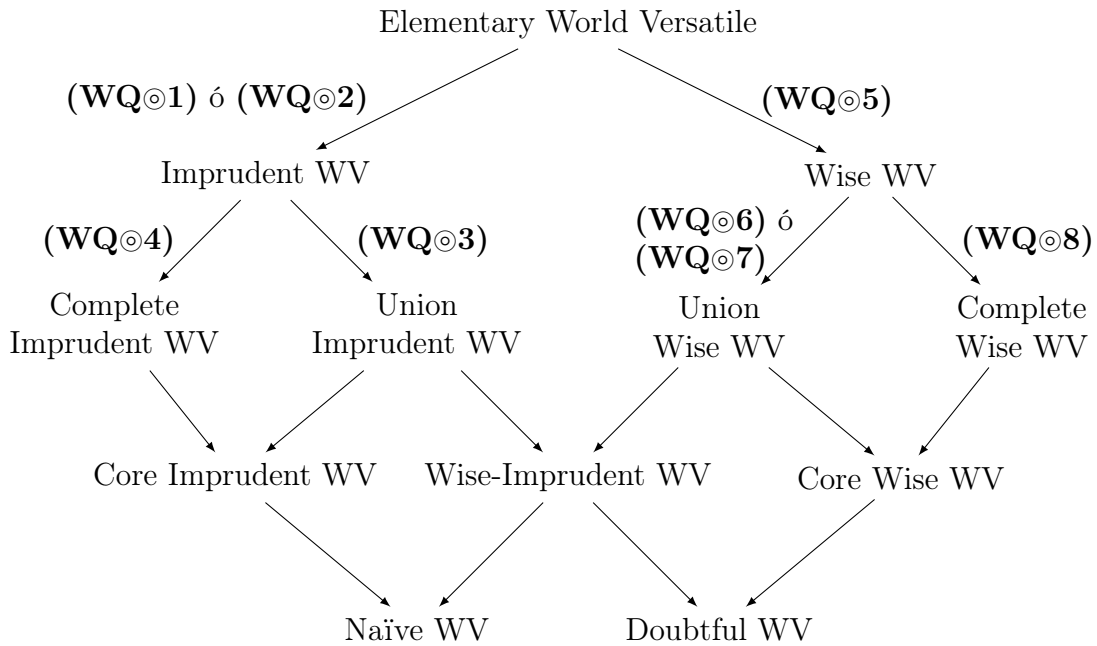


Figura 6.2: Árbol de relaciones de familias de operadores elementary world versatile según los postulados questionable. Los postulados $(WQ\odot 2)$ y $(WQ\odot 7)$ se consideran cuando el operador $\odot_w$ además satisfice $(Rel2)$.

Continuando con más propiedades sobre relaciones questionable, tenemos los casos en donde éstas se vinculan con las relaciones creíble. Nos referimos a las situaciones expuestas en la Proposición 5.3.5. En términos generales, es posible conectar las relaciones $\prec$ y $\succ$ bajo intuiciones que se tienen de ambos conceptos. Por ejemplo, un comportamiento típico es que toda observación consistente no creíble es cuestionable, o equivalentemente, que toda observación consistente no cuestionable es creíble. La condición de que la observación sea consistente se puede evitar, llegando al caso en que si $A \not\prec B$ entonces $A \succ B$. Incluso podemos hacer que todo lo creíble sea no cuestionable, satisfaciéndose que si $A \prec B$ entonces $A \not\succ B$.

Definición 6.2.4. Sean $\prec$ una relación creíble y $\succ$ una relación questionable. Decimos que el par $(\prec, \succ)$ está:

weakly entangled si sucede que si $B \neq \emptyset$ y $A \not\prec B$ entonces $A \succ B$;

entangled si sucede que si $A \not\prec B$ entonces $A \succ B$;

strongly entangled si sucede que $A \not\succ B$ si y sólo si $A \prec B$.

En el caso de que el par sea strongly entangled, usaremos únicamente $\prec$ para referirnos a la noción tanto de credibilidad como de cuestionabilidad.

Estas situaciones ya las tenemos descritas para los operadores world filtered revision, excepto weakly entangled, que se relaciona con el postulado weak consistency **(W $\diamond$ 3)**. En general, cuando vemos estas propiedades en términos de operadores elementary world versatile, resultan vinculadas a la consistencia del operador.

Proposición 6.2.5. Sean $\odot_w$ un operador de elementary world versatile, que satisfice **(W $\odot$ 1)** y **(W*2)** y está representado por el par (σ, ρ) de funciones world-selection asociadas, y $\prec, \succ$ y $\succ\succ$ sus relaciones asociadas de la Definición 5.3.1. Entonces:

1. $(\prec, \succ)$ está weakly entangled si y sólo si $\odot_w$ satisfice weak consistency **(W $\diamond$ 3)**;
2. $(\prec, \succ)$ está entangled si y sólo si $\odot_w$ satisfice strong consistency **(Rel4)**;
3. $(\prec, \succ)$ está strongly entangled si y sólo si $\odot_w$ satisfice **(Rel2)**, **(Rel3)** y **(Rel4)**;

Demostración en la página 102, al final del capítulo.

Por último, tenemos propiedades en donde la cuestionabilidad es total. Esta característica la identificamos en la Definición 5.4.5 para funciones world-selection, y puede transcribirse como postulado de operadores elementary world versatile de manera similar a como lo hicimos con las anteriores propiedades.

Definición 6.2.6. Dados $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{I})$, se considera el siguiente postulado para el operador $\odot_w : \mathcal{P}(\mathcal{I}) \times \mathcal{P}(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I})$:

(Rel5) Si $(A \odot_w B) \cap A \not\subseteq B$ entonces $A \subseteq A \odot_w B$ (full knowledge preservation).

Llamaremos *fully questionable world versatile* a los operadores $\odot_w$ que cumplan **(W $\odot$ 1)**, **(W*2)** y **(Rel5)**. El árbol de familias de la Definición 6.2.3 es combinable con este postulado. En tal caso, a las subfamilias se les antepone la palabra *fully*.

Este postulado es el que nos faltaba para ver a los operadores world filtered revision, world credibility-limited revision y elementary world contraction como world versatile.

Teorema 6.2.7. Sea $\odot_w$ un operador de cambio sobre mundos.

1. $\odot_w$ es elementary world revision si y sólo si es naïve world versatile, es decir, satisfice **(W $\odot$ 1)**, **(W*2)**, **(WQ $\odot$ 1)**, **(WQ $\odot$ 4)** y **(WQ $\odot$ 5)**.

2. $\odot_w$ es world filtered revision si y sólo si es fully questionable world versatile, es decir, satisface $(W\odot 1)$, $(W*2)$ y $(Rel5)$.
3. $\odot_w$ es world credibility-limited revision si y sólo si es fully questionable world versatile y además satisface $(Rel3)$.
4. $\odot_w$ es elementary world contraction si y sólo si $\odot_w$ es fully doubtful world versatile, es decir, satisface $(W\odot 1)$, $(W*2)$, $(WQ\odot 1)$, $(WQ\odot 5)$, $(WQ\odot 8)$ y $(Rel5)$.

Demostración en la página 103, al final del capítulo.

El último resultado confirma formalmente cuán fuerte son los postulados $(W*1)$ y $(W-1)$, dando sustento al análisis hecho en la sección anterior. Esta situación nos hace preguntarnos si los postulados asociados a estos operadores, presentados en los Capítulos 3 y 4 requieren de $(W*1)$ y $(W-1)$ para preservar el comportamiento que representan. En la siguiente sección nos enfocaremos en analizar las propiedades asociadas a la credibilidad y clásicas, mostrando su independencia respecto de la cuestionabilidad excepto cuando se agreguen postulados similares a los considerados en la Proposición 6.2.5.

6.3 Postulados Credible y Clásicos

Continuando el análisis de propiedades para los operadores elementary world versatile, tenemos una diversidad de opciones a partir de lo trabajado en los Capítulos 3 y 4. Revisando los postulados de credibilidad de los operadores elementary world revision, presentados en la Definición 4.4.1 y que traducen propiedades de σ , podemos ver que están todos escritos en términos de la consistencia de $(A *_w B) \cap B$, siendo $*_w$ un operador elementary world revision. Paralelamente, del Lema 6.1.3, sabemos que $(A \odot_w B) \cap B$ es uno de los operadores elementary world revision asociados a $\odot_w$, el que tiene asociado la función world-selection σ . Es decir, $(A \odot_w B) \cap B = (A *_w B) \cap B$. Por lo tanto, los postulados de la Definición 4.4.1 pueden utilizarse para clasificar operadores elementary world versatile sin necesidad de adaptación alguna.

Corolario 6.3.1. *Sea $\odot_w$ un operador versatile que satisface $(W\odot 1)$ y $(W*2)$ y sea $\prec$ su relación credible asociada. Entonces:*

1. $\odot_w$ satisface $(W\odot 1)$ si y sólo si $\prec$ es closed over inclusion.
2. $\odot_w$ satisface $(W\odot 2)$ si y sólo si $\prec$ es closed over inverted inclusion.
3. $\odot_w$ satisface $(W\odot 3)$ si y sólo si $\prec$ es core definable.
4. $\odot_w$ satisface $(W\odot 4)$ si y sólo si $\prec$ es frame definable.

Demostración en la página 103, al final del capítulo.

Así, los operadores elementary world versatile pueden clasificarse respecto de su relación credible, de manera idéntica a como lo hicimos para los operadores elementary world.

Definición 6.3.2. Los operadores elementary world versatile se pueden clasificar respecto de si satisfacen los postulados de la Definición 4.4.1. Para identificar a las diferentes familias, utilizaremos los nombres asociados a su relación credible de la Figura 4.1 (excepto trivial y weak prioritized), quedando vinculados como aparece en la Figura 6.3.

Los operadores dichotomic world versatile tales que $\alpha(A) = A$ representan el comportamiento de un agente que solamente reafirma su conjunto de creencias, más allá de qué

Árbol de Operadores Credible World Versatile

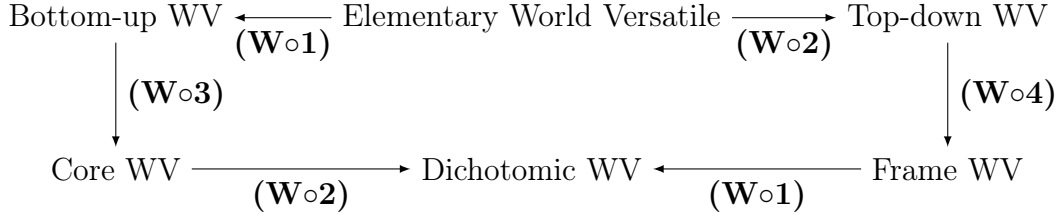


Figura 6.3: Árbol de relaciones de familias de operadores elementary world versatile según postulados credible.

actitud epistémica tenga sobre la observación. Desde lo técnico, se comportan como un elementary world revision pero con los parámetros intercambiados, pues su estructura es:

$$A \odot_w B = (A \cap B) \cup \emptyset \cup \rho(B, A^c) = B *_w' A$$

Si a este comportamiento lo combinamos con full knowledge preservation (**Rel5**), obtenemos el operador que mantiene constante el conjunto de creencias ante cualquier observación recibida. Cuando esta situación ocurre simultáneamente con ser naïve world versatile, obtenemos al operador world expansion.

Por otro lado, un operador dichotomic world versatile tal que $\alpha(A) = \mathcal{I}$ siempre acepta las nuevas observaciones, sólo que en algunos casos puede decidir cuestionarlos y preservar algunos mundos de su conjunto de creencias original. Llamaremos moderated a este comportamiento. Esto significa que el operador elementary world revision asociado a σ , satisface weak consistency (**W∘3**) o consistency (**W*3**). En particular, esto implica que $\odot_w$ también satisface (**W∘3**) o bien (**W*3**).

Teorema 6.3.3. *Sea $\odot_w$ un operador versatile, i.e. que satisface (**W∘1**) y (**W*2**), y sean σ y ρ sus funciones world-selection asociadas. Entonces:*

1. σ es semantically successful under consistency si y sólo si $\odot_w$ satisface:

(**W∘3**) Si $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$ entonces $(A \odot_w B) \cap B \neq \emptyset$ (credible weak consistency).

2. σ es semantically successful si y sólo si $\odot_w$ satisface:

(**W∘4**) Si $B \neq \emptyset$ entonces $(A \odot_w B) \cap B \neq \emptyset$ (credible consistency).

Llamaremos weak moderated world versatile a los operadores $\odot_w$ elementary world versatile que a su vez satisfacen (**W∘3**). En el mismo sentido, los operadores moderated world versatile son aquellos elementary world versatile que además satisfacen (**W∘4**).

Demostración en la página 104, al final del capítulo.

Continuando con postulados clásicos y las propiedades world-selection asociadas, vimos que si σ es standard o normal no afecta a la relación $\prec$ (pero sí al resultado de $A \odot_w B$). En cambio, en la sección anterior, identificamos que $\succ$ tiene un comportamiento distinto en caso de que ρ sea normal o no. El caso en que ρ sea standard equivale a que si $\emptyset \neq B \subseteq A$ entonces $\rho(B, A^c) = \emptyset$. Es decir, si una observación consistente es más fuerte que el conjunto de creencias original ($\emptyset \neq B \cap A = B$), entonces no es cuestionable. Por último tenemos el comportamiento local, que puede presentarse de forma independiente para cada función world selection.

Definición 6.3.4. Dados $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{I})$, se consideran los siguientes postulados para el operador $\odot_w : \mathcal{P}(\mathcal{I}) \times \mathcal{P}(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I})$:

(W⊙5) Si $A \cap B \neq \emptyset$ entonces $A \odot_w B \subseteq A$ (normal credible vacuity).

(W⊙6) Si $\emptyset \neq A \subseteq B$ entonces $A \odot_w B = B \odot_w A = A$ (weak versatile vacuity).

(W⊙7) $(A \odot_w B) \cap B = \bigcup_{w \in A} (\{w\} \odot_w B) \cap B$ (credible local).

(W⊙8) $(A \odot_w B) \cap A = \bigcup_{w \in B} (A \odot_w \{w\}) \cap A$ (questionable local).

Estos postulados surgen nuevamente de la reescritura sistemática que hablamos al inicio de la Sección 6.2. Aplicando la construcción vía funciones world-selection del Teorema 6.1.4 podemos identificar estos postulados con las propiedades de estas funciones.

Teorema 6.3.5. Sea $\odot_w$ un operador versatile que satisfice (W⊙1) y (W*2), y sean σ y ρ sus funciones world-selection asociadas. Entonces:

1. $\odot_w$ satisfice (W⊙5) si y sólo si σ es normal.
2. $\odot_w$ satisfice (W*4), o bien (Rel2) y (W⊙5), si y sólo si σ y ρ son normal.
3. $\odot_w$ satisfice (W⊙4) si y sólo si σ es standard.
4. $\odot_w$ satisfice (W⊙6) si y sólo si σ y ρ son standard.
5. Si $\odot_w$ satisfice (W⊙6), entonces $\odot_w$ satisfice (W⊙7) si y sólo si σ es local.
6. Si $\odot_w$ satisfice (W⊙6), entonces $\odot_w$ satisfice (W⊙8) si y sólo si ρ es local.

Demostración en la página 104, al final del capítulo.

El comportamiento que estas propiedades reflejan están basadas en la idea de que el operador $\odot_w$ se construye a partir de dos operadores elementary world revision. Por lo que identificaremos a las familias de operadores world versatile tales que sus dos operadores revision asociados satisfagan estas propiedades.

Definición 6.3.6. Los operadores elementary world versatile se pueden clasificar respecto de si satisfacen los postulados de la Definición 6.3.4, como aparecen en la Figura 6.4. Llamaremos *standard world versatile* a los operadores $\odot_w$ elementary world versatile que a su vez satisfacen (W⊙6). Si además satisfacen (W⊙7) y (W⊙8) los nombramos como *local world versatile*. En el mismo sentido, los operadores *normal credible world versatile* son aquellos elementary world versatile que además satisfacen (W⊙5). Si también satisfacen (Rel2), serán *basic world versatile*.

Estos postulados pueden a su vez combinarse con los del Teorema 6.3.3, dando sub-familias de operadores *world moderated revision*. Los operadores *weak world moderated revision* son elementary world versatile que además satisfacen (W⊙3) y (W⊙6). Si también satisfacen (W⊙7) y (W⊙8) los llamamos *local world moderated revision*. Por otro lado, los elementary world versatile que además satisfacen (W⊙4), (Rel2) y (W⊙5) *basic world moderated revision*.

Esta clasificación confirma la independencia de los postulados de vacuidad y localidad de (W−1) y (W*1). Más aún, combinando esto con el Teorema 6.2.7 es posible recapturar todos los operadores presentados en los Capítulos 3 y 4, excepto aquellos vinculados con la teoría de asignaciones faithful. Eso lo haremos en la siguiente sección.

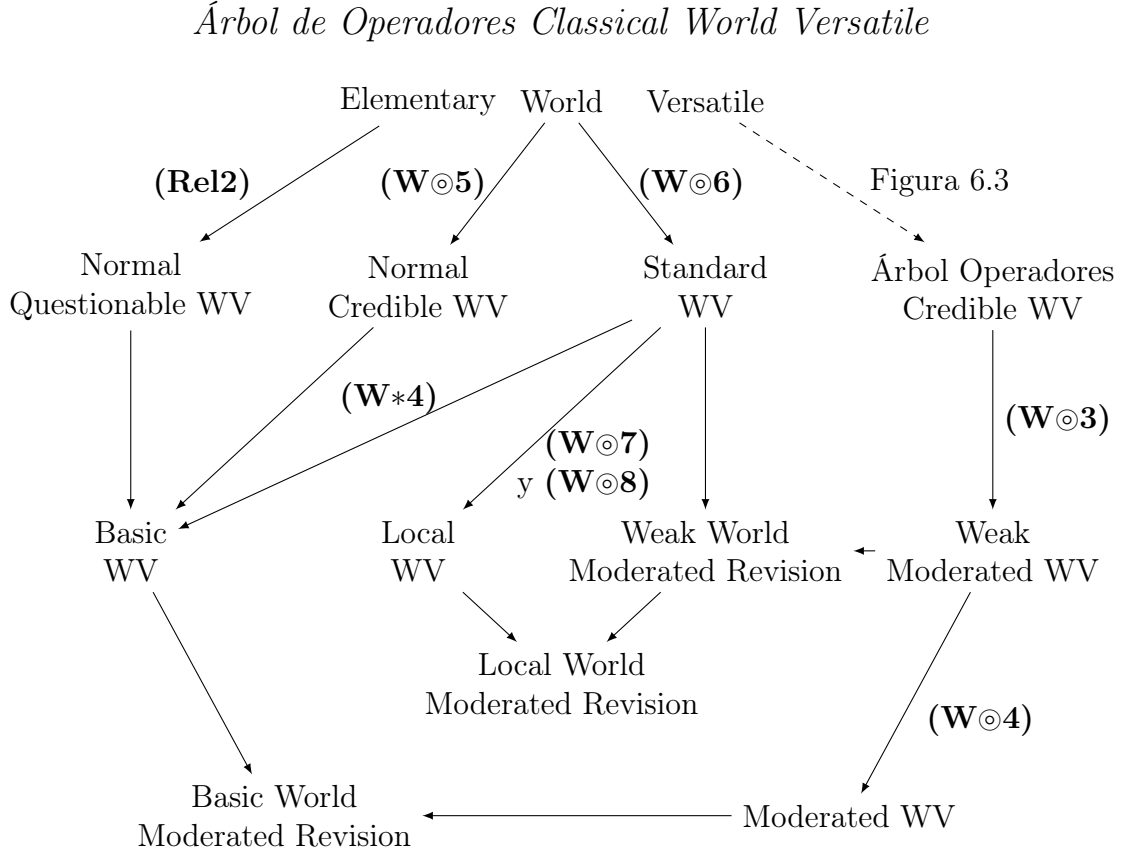


Figura 6.4: Árbol de relaciones de familias elementary world versatile respecto a los postulados clásicos.

6.4 Postulados Suplementarios

En la observación 3.1.6 comentamos que los postulados suplementarios de los operadores world contraction y world revision respondían a la dualidad Levi-Harper directamente al nivel de operadores elementary. Si bien esto indica una independencia en la dualidad respecto a los postulados de vacuidad y consistencia, esta propiedad no alcanza para obtener una teoría de asignaciones faithful. Por otro lado, en algunas extensiones de operadores credibility-limited revision trabajadas en [7], [21] y en el trabajo de promotion [36], vemos que el postulado revision success ($\mathbf{W*1}$) o el de consistency ($\mathbf{W*3}$) no son necesarios para tener una teoría de asignaciones faithful. Esto está en sintonía con lo que queremos hacer.

Comenzaremos analizando el vínculo entre los postulados suplementarios con los de la Definición 4.4.1 de operadores world non-consistent revision. Utilizaremos este análisis para luego aplicarlo bajo el principio de que $\odot_w$ se construye a partir de la unión de dos operadores elementary world revision.

Proposición 6.4.1. Sean $*_w$ un operador elementary world revision, i.e. que satisfice ($\mathbf{W*1}$) y ($\mathbf{W*2}$), $\prec$ su relación credible asociada y $\alpha(A) = \{w \in \mathcal{I} \mid A \prec \{w\}\}$.

1. Si $*_w$ satisfice ($\mathbf{W\Diamond5}$) entonces $\prec$ es union complete y $A *_w B \subseteq \alpha(A)$.
2. Si $*_w$ satisfice ($\mathbf{W\Diamond6}$) entonces $\prec$ es closed over inclusion, i.e. $*_w$ satisfice ($\mathbf{W\Diamond1}$).
3. Si $*_w$ satisfice ($\mathbf{WL1}$), ($\mathbf{W\Diamond8}$) y ($\mathbf{W\Diamond1}$), entonces satisfice ($\mathbf{W\Diamond5}$)~($\mathbf{W\Diamond7}$).

Demostración en la página 104, al final del capítulo.

Este resultado nos muestra que trabajar con los postulados suplementarios se trata de trabajar con un tipo de operadores core world revision. Por otro lado, el postulado ($\mathbf{W\Diamond5}$)

nos da la seguridad de que los nuevos conjuntos de creencias siempre estarán incluidos en $\alpha(A)$. En el caso de querer reproducir el Teorema 3.1.9, tendremos que la partición a la que se hace referencia ya no sería sobre $\mathcal{I}$ sino sobre este conjunto.

Teorema 6.4.2. *Sean $*_w$ un operador elementary world revision, i.e. que satisfice $(W*1)$ y $(W*2)$ y $\alpha(A) = \{w \in \mathcal{I} \mid A *_w \{w\} = \{w\}\}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $*_w$ satisfice $(W\circ 1)$ y $(W*5)$;
2. $*_w$ es un operador core world revision y para todo $A \subseteq \mathcal{I}$ existe $\{X_j^A\}_{j \in J}$ partición bien ordenada de $\alpha(A)$ tal que si $\alpha(A) \cap B \neq \emptyset$ entonces $A *_w B = B \cap X_n$ con $n = \min\{j \in J \mid B \cap X_j \neq \emptyset\}$.
3. $*_w$ es un operador core world revision y existe una asignación que dado un $A \subseteq \mathcal{I}$ lo asocia a un preorden total y bien fundado $\leq_A$ tal que $w \leq_A w'$ si $w \in A$ y $w \in \mathcal{I}$ y vale que $A *_w B = \min(B \cap \alpha(A), \leq_A)$.

En tal caso, A está incluido en el primer elemento de $\{X_j^A\}_{j \in J}$ y la asignación es faithful si y sólo si $*_w$ satisfice $(W\Diamond 4)$.

Demostración en la página 105, al final del capítulo.

El Teorema 6.4.2 generaliza el Teorema 3.1.9 y el Corolario 3.1.10, además de unificar bajo el mismo principio el Corolario 3.2.6, ya que no hay distinción de lo que sucede con el caso $A = \emptyset$. Por otro lado, la representación del operador respecto al preorden nos da una referencia a la construcción de los operadores world promotion, donde la función α toma el rol de la función s de la Definición 5.1.3.

Corolario 6.4.3. *Sean $*_w$ un operador elementary world revision, i.e. que satisfice $(W*1)$ y $(W*2)$, entonces $*_w$ satisfice $(W*4)$, $(W\circ 1)$ y $(W*5)$ si y sólo si existe un operador $*'_w$ que satisfice $(W*1) \sim (W*5)$ y una función $\alpha : \mathcal{P}(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I})$ que cumple que $A \subseteq \alpha(A)$ tales que para todo $A, B \subseteq \mathcal{I}$:*

$$A *_w B = A *_w' (B \cap \alpha(A))$$

Demostración en la página 106, al final del capítulo.

La adaptación a los operadores local world revision tiene sus similitudes con lo anterior. El tener $(W\Diamond 6)$ nos evita invocar a $(W\circ 1)$ explícitamente. Mientras que la localidad del operador, sin la influencia del postulado weak consistency $(W\Diamond 3)$, hará que se trabaje con α , pero ya no sobre conjuntos de mundos sino directamente sobre mundos.

Teorema 6.4.4. *Sean $\Diamond_w$ un operador local world revision, i.e. que satisfacen $(W*1)$, $(W*2)$, $(W\Diamond 4)$ y $(WL1)$, y $\alpha(w) = \{w' \in \mathcal{I} \mid \{w\} \Diamond_w \{w'\} = \{w'\}\}$.*

1. $\Diamond_w$ satisfice $(W\Diamond 5)$, $(W\Diamond 6)$ y $(W\Diamond 7)$ si y sólo si existe una asignación tal que a un $w \in \mathcal{I}$ le asocia un orden parcial y bien fundado $\leq_w$ sobre $\alpha(w)$ donde w es el elemento mínimo y $A \Diamond_w B = \bigcup_{w \in A} \min(B \cap \alpha(w), \leq_w)$.
2. $\Diamond_w$ satisfice $(W\circ 1)$ y $(W\Diamond 8)$ si y sólo si existe una asignación tal que a un $w \in \mathcal{I}$ le asocia un preorden total y bien fundado $\leq_w$ sobre $\alpha(w)$ donde w es el elemento mínimo y $A \Diamond_w B = \bigcup_{w \in A} \min(B \cap \alpha(w), \leq_w)$.

Demostración en la página 107, al final del capítulo.

Este operador es la versión en mundos de credibility-limited update, definido en [7]. En este trabajo también notan que estos operadores son no consistentes, emparentándose

con los world non-consistent revision. La alternativa que proponen los autores a esto es un comportamiento como el de credibility-limited revision, donde se preservan los mundos originales. En nuestro contexto, esto se trata de operadores world versatile.

Para llevar estos resultados a los operadores world versatile basta con aplicar la transcripción a la que nos referimos en la Sección 6.2 a los postulados elementary world revision suplementarios del Capítulo 3, desde la perspectiva de cada uno de los operadores elementary world revision. Esto hará que por cada postulado revision tengamos dos para los operadores elementary world versatile. Vamos a diferenciarlos anteponiendo la palabra “credible” si nos referimos al operador revision construido con σ y “questionable” al construido con ρ .

También debemos hacer una adaptación del postulado **(W○1)**, aunque la situación es diferente. Tal adaptación haría que ρ sea null-monotonic, propiedad que es independiente de aquellas que se vinculan con la relación $\succ$ de $\odot_w$. El pedir propiedades credible a la función ρ hace que la dinámica se enfoque en el conjunto de creencias, en vez de la observación. Esto se debe a que su operador revision asociado, en el contexto de $\odot_w$, enroca los roles de ambos conjuntos. Para estas situaciones, antepondremos la palabra “knowledge”.

Definición 6.4.5. Dados $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{I})$, se consideran los siguientes postulados para el operador $\odot_w : \mathcal{P}(\mathcal{I}) \times \mathcal{P}(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I})$:

- (WS○1)** Si $(A \odot_w B) \cap A \neq \emptyset$ y $A \subseteq A'$ entonces $(A' *_w B) \cap A' \neq \emptyset$ (knowledge consistent propagation).
- (WS○2)** Si $B \neq \emptyset$ entonces existe C tal que $(A \odot_w B) \cap A \neq \emptyset$ si y sólo si $C \cap A \neq \emptyset$ (knowledge core consistency).
- (WS○3)** Si $(A \odot_w B) \cap B \cap C \neq \emptyset$ entonces $(A \odot_w B) \cap B \cap C = (A \odot_w (B \cap C)) \cap B$ (credible super-subexpansion).
- (WS○4)** Si $(A \odot_w B) \cap A \cap C \not\subseteq B$ entonces $(A \odot_w B) \cap A \cap C = ((A \cap C) \odot_w B) \cap A$ (questionable super-subexpansion).
- (WS○5)** $(A \odot_w B) \cap B \cap C \subseteq (A \odot_w (B \cap C)) \cap B \cap C$ (credible superexpansion).
- (WS○6)** $(A \odot_w B) \cap A \cap C \subseteq ((A \cap C) \odot_w B) \cap A \cap C$ (questionable superexpansion).
- (WS○7)** Si $(A \odot_w B) \cap B \subseteq C$ y $(A \odot_w C) \cap C \subseteq B$ entonces, $(A \odot_w B) \cap B = (A \odot_w C) \cap C$ (credible inclusion equivalence).
- (WS○8)** Si $(A \odot_w B) \cap A \subseteq C$ y $(C \odot_w B) \cap C \subseteq A$ entonces, $(A \odot_w B) \cap A = (C \odot_w B) \cap C$ (questionable inclusion equivalence).
- (WS○9)** Si $w \in \mathcal{I}$ y $S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{I})$, entonces $\bigcap_{B \in S} (\{w\} \odot_w B) \cap B \subseteq (\{w\} \odot_w (\bigcup S)) \cap (\bigcup S)$ (credible pointwise inclusion).
- (WS○10)** Si $w \in \mathcal{I}$ y $S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{I})$, entonces $\bigcap_{A \in S} (A \odot_w \{w\}) \cap A \subseteq ((\bigcup S) \odot_w \{w\}) \cap (\bigcup S)$ (questionable pointwise inclusion).
- (WS○11)** Si $w \in \mathcal{I}$ y $(\{w\} \odot_w B) \cap B \cap C \neq \emptyset$ entonces $(\{w\} \odot_w B) \cap B \cap C = (\{w\} \odot_w (B \cap C)) \cap B$ (credible pointwise super-subexpansion).
- (WS○12)** Si $w \in \mathcal{I}$ y $(A \odot_w \{w\}) \cap A \cap C \not\subseteq \{w\}$ entonces $(A \odot_w \{w\}) \cap A \cap C = ((A \cap C) \odot_w \{w\}) \cap A$ (questionable pointwise super-subexpansion).

Estos postulados hacen que los operadores revision asociados a un operador versatile satisfagan los postulados suplementarios que analizamos anteriormente.

Corolario 6.4.6. Sean $\odot_w$ un operador elementary world versatile, i.e. que satisfice $(W\odot 1)$ y $(W*2)$, y $*_w^\sigma$ y $*_w^\rho$ sus operadores world revision asociados. Entonces:

- $\odot_w$ satisfice $(WS\odot 1)$ si y sólo si $*_w^\rho$ satisfice $(W\odot 1)$.
- $\odot_w$ satisfice $(WS\odot 2)$ si y sólo si $*_w^\rho$ satisfice $(W\odot 3)$.
- $\odot_w$ satisfice $(WS\odot 3)$ si y sólo si $*_w^\sigma$ satisfice $(W*5)$.
- $\odot_w$ satisfice $(WS\odot 4)$ si y sólo si $*_w^\rho$ satisfice $(W*5)$.
- $\odot_w$ satisfice $(WS\odot 5)$ si y sólo si $*_w^\sigma$ satisfice $(W\odot 5)$.
- $\odot_w$ satisfice $(WS\odot 6)$ si y sólo si $*_w^\rho$ satisfice $(W\odot 5)$.
- $\odot_w$ satisfice $(WS\odot 7)$ si y sólo si $*_w^\sigma$ satisfice $(W\odot 6)$.
- $\odot_w$ satisfice $(WS\odot 8)$ si y sólo si $*_w^\rho$ satisfice $(W\odot 6)$.
- $\odot_w$ satisfice $(WS\odot 9)$ si y sólo si $*_w^\sigma$ satisfice $(W\odot 7)$.
- $\odot_w$ satisfice $(WS\odot 10)$ si y sólo si $*_w^\rho$ satisfice $(W\odot 7)$.
- $\odot_w$ satisfice $(WS\odot 11)$ si y sólo si $*_w^\sigma$ satisfice $(W\odot 8)$.
- $\odot_w$ satisfice $(WS\odot 12)$ si y sólo si $*_w^\rho$ satisfice $(W\odot 8)$.

Demostración en la página 108, al final del capítulo.

Así, podemos presentar la clasificación de la familia de operadores world versatile centradas en la idea de que los dos operadores world revision asociados sean core.

Definición 6.4.7. Llamaremos *core-core world versatile* a los operadores elementary world versatile que además satisfacen $(W\odot 3)$ y $(WS\odot 2)$. Estos operadores se caracterizan por que su operadores world revision asociados son core, lo que nos da la posibilidad de trabajar con los postulados suplementarios de la Definición 6.4.5 y clasificar sus familias como aparecen en la Figura 6.5. La figura y los nombres están inspirados en la Figura 3.2.

Llamaremos *transitive relational (TR) world versatile* a los operadores $\odot_w$ core-core world versatile que a su vez satisfacen $(WS\odot 3)$ y $(WS\odot 4)$. Los operadores core-core world versatile que además satisfacen $(W\odot 7)$ y $(W\odot 8)$ los nombramos como *local core-core world versatile*. Si también cumplen $(WS\odot 5)\sim(WS\odot 10)$, serán *pointwise partially relational (PR) world versatile*. Por la Proposición 6.4.1 sabemos que existe una subfamilia de pointwise PR world versatile donde se satisfacen $(WS\odot 11)$ y $(WS\odot 12)$, que llamaremos *pointwise transitive relational (TR) world versatile*. Los operadores que son simultáneamente local core-core world versatile y TR world versatile forman una subfamilia de pointwise TR world versatile llamada *local transitive relational (TR) world versatile*.

Nuevamente, estos postulados son combinables con los presentados en la Definición 6.2.3, los postulados questionable, y en la Definición 6.3.6, los postulados clásicos. En particular, se deduce de forma directa que world promotion surge de hacer este tipo de combinaciones.

Corolario 6.4.8. Sea $\odot_w$ un operador de cambio sobre mundos. Entonces, $\odot_w$ satisfice $(W\odot 1)$, $(W*2)$, $(W*4)$, $(W\odot 4)$, $(WS\odot 3)$, $(WS\odot 4)$ y $(WS\odot 1)$ si y sólo si $\odot_w$ es un operador world promotion según la Definición 5.1.3.

También se pueden considerar postulados como weak relative success **(Rel3)**, weak consistency **(W $\odot$ 3)**, strong consistency **(Rel4)** o bien full knowledge preservation **(Rel5)**. Incluso se pueden hacer adaptaciones como las hechas para **(WS $\odot$ 1)** y **(WS $\odot$ 2)**, donde le dimos propiedades credible a la función world-selection ρ . Análogamente podemos darle propiedades questionable a la función world-selection σ . Otras adaptaciones pueden pasar por debilitar postulados globales a locales, como por ejemplo lo hecho con **(W*5)** y **(W $\odot$ 8)**, para luego combinarlas con postulados de localidad **(WL1)**, **(W $\odot$ 7)** o bien **(W $\odot$ 8)**.

Árbol de Operadores Relational World Versatile

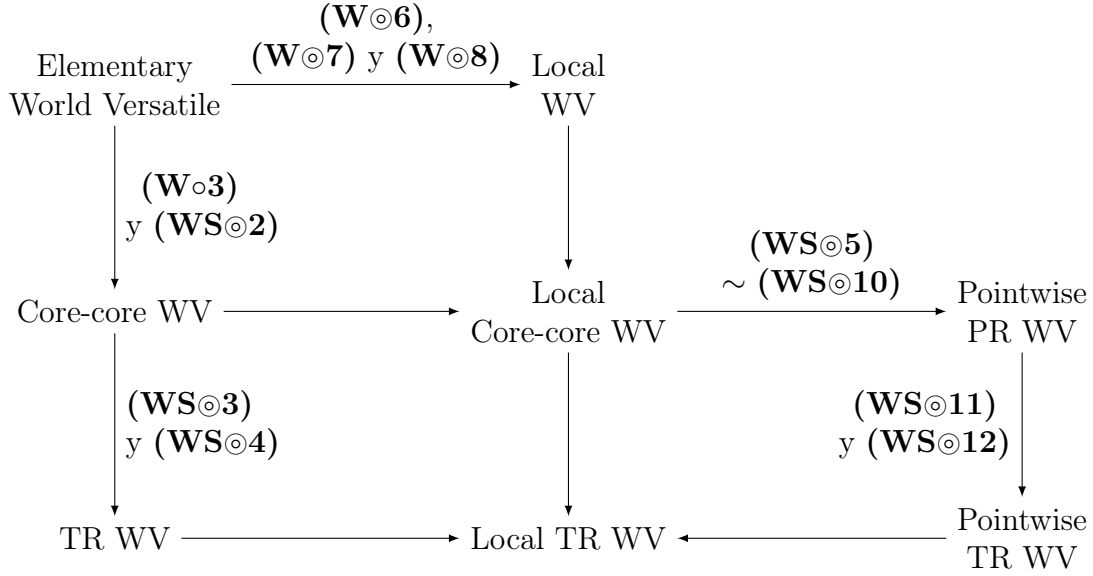


Figura 6.5: Árbol de relaciones de familias elementary world versatile respecto a los postulados suplementarios. Los mismos son en realidad subfamiliares de operadores que satisfacen $(W\odot3)$ y $(WS\odot2)$.

Esto último sería el caso de la versión de mundos del operador consistent credibility-limited update de [7], y lo podemos entender viendo el comportamiento de sus operadores revision asociados y sus relaciones. Su operador creíble asociado es un local world revision (satisface $(W*1)$, $(W*2)$, $(W\odot4)$ y $(WL1)$) que además satisface $(W\odot5)$, $(W\odot6)$, $(W\odot7)$. Al no satisfacer weak consistency $(W\odot3)$, existe la posibilidad de que este operador devuelva el conjunto vacío. Las relaciones $(\prec, \succ)$ están strongly entangled pero sólo localmente, es decir, $\{w\} \not\prec B$ si y sólo si $\{w\} \succ B$. En este contexto, $(W\odot3)$ es la única que no necesita adaptación, pero $(Rel3)$ y $(Rel5)$ deben ser debilitadas para un comportamiento local.

Corolario 6.4.9. Sea $\odot_w$ un operador de cambio sobre mundos. Entonces, $\odot_w$ satisface $(W\odot1)$, $(W*2)$ (i.e. estructura world versatile), $(W\odot3)$ (i.e. sus relaciones están weakly entangled), $(W\odot4)$, $(W\odot7)$, $(WS\odot5)$, $(WS\odot7)$, $(WS\odot9)$ (i.e. su operador creíble es local world revision) y además (para el comportamiento strongly entangled local):

(Rel6) $\{w\} \odot_w B \subseteq B$ o bien $\{w\} \odot_w B = \{w\}$ (local relative success).

si y sólo si existe una función $\alpha : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I})$ tal que $w \in \alpha(w)$ y una asignación faithful donde a cada $w \in \mathcal{I}$ le asigna un orden parcial bien fundado $\leq_w$ sobre $\alpha(w)$ con w su elemento mínimo tal que:

$$A \odot_w B = \bigcup_{w \in A} f(w, B)$$

donde para cada $w \in \mathcal{I}$ y $B \subseteq \mathcal{I}$ se tiene que:

$$f(w, B) = \begin{cases} \min_w(B \cap \alpha(w), \leq_w) & \text{Si } \min(B \cap \alpha(w), \leq_w) \neq \emptyset \\ \text{caso contrario} & \end{cases}$$

En tal caso, a este operador lo llamaremos world consistent credibility-limited update.

Este es un ejemplo más de la generalidad que ofrece trabajar con operadores world versatile: a partir de nociones de credibilidad, cuestionabilidad y comportamientos de funciones world-selection, pudimos caracterizar axiomáticamente un operador que combina propiedades de operadores local y credibility-limited revision.

6.5 Resumen del Capítulo 6

Este capítulo es una síntesis del trabajo hecho hasta ahora en el marco conceptual de mundos. Aquí presentamos a los operadores elementary world versatile, capaces de comportarse como un elementary world contraction (evaluado en B^c en vez de B) o un elementary world revision. Estos operadores, notados como $\odot_w$, tienen múltiples interpretaciones:

- Se definen vía los postulados **(W $\odot$ 1)** y **(W $\ast$ 2)**, generalizando a los operadores elementary world contraction y world revision.
- Se los puede presentar constructivamente vía dos funciones world-selection (σ, ρ) como la unión disjunta de $A \cap B$, un subconjunto de $A^c \cap B$ representado por $\sigma(A, B^c)$ y un subconjunto de $A \cap B^c$ como $\rho(B, A^c)$. Además, la relación credible del operador coincide con la de la función σ y lo mismo sucede con la relación questionable y ρ .
- Se los puede definir como la unión de dos elementary world revision o de la intersección de dos elementary world contraction (los caracterizados por las funciones world-selection σ y ρ). Estos operadores se corresponden a su vez con las construcciones de las Identidades de Levi y Harper que surgen al aplicarlas a $A \odot_w B$ y $B \odot_w A$. Así, estas construcciones pueden verse como proyecciones del operador $\odot_w$ en los operadores elementary world contraction y revision que reconstruyen al operador. Esto hace posible interpretar al operador $\odot_w$ en una posición intermedia entre sus operadores elementary world contraction y world revision asociados, neutralizando la noción de dualidad.

A partir de estas interpretaciones podemos implementar todas las propiedades analizadas en capítulos anteriores de funciones world-selection, relaciones y operadores clásicos. Estas propiedades las presentamos vía postulados, adaptando los que ya tenemos de forma sistemática, representando en términos de $\odot_w$ las propiedades sus operadores world revision asociados como sus relaciones $\prec$ y $\succ$ queremos que satisfagan.

Obtuvimos así los postulados questionable **(WQ $\odot$ 1)**~**(WQ $\odot$ 8)**, que nos permitieron reconstruir la clasificación de relaciones questionable en términos de operadores world versatile (Figura 6.2). Para las propiedades asociadas a la relación $\prec$ no hizo falta adaptar postulados, ya que **(W $\odot$ 1)**~**(W $\odot$ 4)** podían aplicarse a $\odot_w$, por lo que también fue posible reconstruir la clasificación de relaciones credible en términos de world versatile (Figura 6.3). Tenemos también postulados que vinculan las relaciones $\prec$, $\succ$ y $\succ\succ$, **(W $\diamond$ 3)** y **(Rel3)**~**(Rel6)**. Estos postulados son combinables entre sí, ya que hacen referencia a diferentes comportamientos. En particular, la combinación de estos postulados permite construir los operadores elementary world y world filtered revision de los capítulos anteriores.

Las propiedades clásicas se capturaron vía **(Rel2)**, **(W $\ast$ 4)** y **(W $\odot$ 3)**~**(W $\odot$ 8)**. Los primeros impactan en el comportamiento de las relaciones credible y questionable, ya sea porque hacen que σ sea smenatically successfull, es decir **(W $\odot$ 3)** y **(W $\odot$ 4)** o bien hacen que las funciones world-selection sean normal, como ser **(Rel2)**, **(W $\odot$ 5)** y **(W $\ast$ 4)**. Los postulados **(W $\odot$ 6)**, **(W $\odot$ 7)** y **(W $\odot$ 8)** hacen que el operador world versatile se construya a partir de operadores local world revision, dándole a $\odot_w$ un comportamiento local.

Por último tenemos a los postulados suplementarios **(WS $\odot$ 1)**~**(WS $\odot$ 12)**, con los que desarrollamos una teoría de asignaciones faithful general, logrando que los operadores world revision de los elementary world versatile satisfagan los postulados suplementarios del Capítulo 3. Para ello, es necesario que las relaciones credible de cada operador world revision sean core definable. Surgieron así **(WS $\odot$ 1)** y **(WS $\odot$ 2)**, adaptaciones sistemáticas de **(W $\odot$ 1)** y **(W $\odot$ 3)** para el operador world revision asociado a ρ . Esto abre la posibilidad de considerar otras adaptaciones, como ser el resto de postulados credible para este operador, postulados questionable para la función σ o bien adaptaciones a versiones locales de postulados globales.

Concluimos así que con los operadores world versatile podemos combinar diferentes propiedades de funciones world-selection, clásicas, suplementarias, credible y questionable, en un mismo operador de cambio. En el próximo capítulo, aplicaremos esta idea para definir operadores de cambio múltiple de teorías sobre lógicas tarskianas.

Demostraciones de los Resultados del Capítulo 6

Demostración de Lema 6.1.2.

De $\odot_w$ a $-_w$ y $-'_w$: La construcción de los operadores $-_w$ y $-'_w$ hace que satisfagan **(W-1)**. Mientras que por el postulado **(W $\odot$ 1)** de $\odot_w$, tanto $A -_w B$ como $A -'_w B$ están incluidos en $A \cup B^c$. Por lo que al intersecarlos por B , podemos afirmar que $-_w$ y $-'_w$ satisfacen **(W-2)**.

De $-_w$ y $-'_w$ a $\odot_w$: Aplicando la construcción de operadores elementary world contraction, nos queda que existen σ y σ' funciones world-selection tal que:

$$\begin{aligned} A -_w B &= A \cup \sigma(A, B) = A \cup (A \odot_w B^c) \\ A -'_w B &= A \cup \sigma'(A, B) = A \cup (B^c \odot_w A) \end{aligned}$$

Reescribiendo de forma tal que las anteriores igualdades sean respecto a $A \odot_w B$:

$$\begin{aligned} A -_w B^c &= A \cup \sigma(A, B^c) = A \cup (A \odot_w B) \\ B -'_w A^c &= B \cup \sigma'(B, A^c) = B \cup (A \odot_w B) \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que $\sigma(A, B^c) = (A \odot_w B) \cap A^c$ y $\sigma'(B, A^c) = (A \odot_w B) \cap B^c$. Aplicando la propiedad que define a las funciones world-selection, resulta que $(A \odot_w B) \cap A^c \subseteq B$ y $(A \odot_w B) \cap B^c \subseteq A$. En cualquier caso, se confirma que $A \odot_w B \subseteq A \cup B$, es decir $\odot_w$ satisface **(W $\odot$ 1)**. □

Demostración de Lema 6.1.3.

De $\odot_w$ a $*_w$ y $*'_w$: La construcción de los operadores $*_w$ y $*'_w$ hace que satisfagan **(W*1)**. Mientras que por el postulado **(W*2)** de $\odot_w$, tanto $A *_w B$ como $A *_'_w B$ también satisfacen **(W*2)**.

De $*_w$ y $*'_w$ a $\odot_w$: Aplicando la construcción de operadores elementary world revision, nos queda que existen σ y σ' funciones world-selection tal que:

$$\begin{aligned} A *_w B &= (A \cap B) \cup \sigma(A, B^c) = B \cap (A \odot_w B) \\ A *_'_w B &= (A \cap B) \cup \sigma'(A, B^c) = B \cap (B \odot_w A) \end{aligned}$$

Reescribiendo de forma tal que las anteriores igualdades sean respecto a $A \odot_w B$:

$$\begin{aligned} A *_w B &= (A \cap B) \cup \sigma(A, B^c) = B \cap (A \odot_w B) \\ B *_'_w A &= (A \cap B) \cup \sigma'(B, A^c) = A \cap (A \odot_w B) \end{aligned}$$

A partir de ambos tenemos que $A \cap B \subseteq A \odot_w B$, es decir $\odot_w$ satisface **(W*2)**. □

Demostración de Teorema 6.1.4. Del Lema 6.1.2, si $\odot_w$ además satisface **(W*2)** nos queda que:

$$(A -_w B^c) \cap (B -'_w A^c) = (A \cap B) \cup (A \odot_w B) = A \odot_w B$$

Por otro lado, también por la propiedad que define a las funciones world-selection, al calcular la intersección entre los operadores elementary world contraction, queda que:

$$\begin{aligned} &(A -_w B^c) \cap (B -'_w A^c) \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap \rho(B, A^c)) \cup (B \cap \sigma(A, B^c)) \cup (\sigma(A, B^c) \cap \rho(B, A^c)) \\ &= (A \cap B) \cup \rho(B, A^c) \cup \sigma(A, B^c) \cup (\sigma(A, B^c) \cap \rho(B, A^c)) \\ &= (A \cap B) \cup \sigma(A, B^c) \cup \rho(B, A^c) \\ &= (A \cap B) \cup \sigma(A, B^c) \cup (B \cap A) \cup \rho(B, A^c) \\ &= (A *_w B) \cup (B *_'_w A) \end{aligned}$$

donde $*_w$ y $*'_w$ son los asociados $-_w$ y $-_w$, como también se puede ver que son los asociados a $\odot_w$ y que definen las funciones world-selection buscadas.

Por último, resulta inmediato a partir de la propiedad que define a las funciones world-selection y de la construcción $A \odot_w B = (A \cap B) \cup \sigma(A, B^c) \cup \rho(B, A^c)$ que $\odot_w$ satisface **(W*1)** y **(W*2)**. $\square$

Demostración de Proposición 6.1.6. A partir de la Definición 5.3.1, la equivalencia de las relaciones se da por la definición de las funciones world-selection. Por otro lado, como $\odot_w$ satisface **(W*2)** tenemos que $\prec$ es creíble, y cualquier operador de cambio determina a la relación $\succ$ como cuestionable por construcción.

Que $\succ$ sea una relación normal cuestionable si y sólo si $\odot_w$ satisface **(Rel2)** se deduce de forma directa por la Proposición 5.3.2. En este contexto, significa que si $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $(A \odot_w B) \cap A \subseteq B$. Como $A \odot_w B = (A \cap B) \cup \sigma(A, B^c) \cup \rho(B, A^c)$, lo anterior equivale a que si $A \cap B \neq \emptyset$ entonces $(A \cap B) \cup \rho(B, A^c) \subseteq B$. En particular, $\rho(B, A^c) \subseteq B$, y $\rho(B, A^c) \subseteq B^c \cap A$ por definición. Luego, $\rho(B, A^c) = \emptyset$. Reescribiendo $A \cap B \neq \emptyset$ como $B \not\subseteq A^c$, tenemos que ρ es normal. Si ahora suponemos que ρ es normal y $A \cap B \neq \emptyset$, o equivalentemente $B \not\subseteq A^c$, entonces $\rho(B, A^c) = \emptyset$. Por lo tanto, $A \odot_w B = (A \cap B) \cup \sigma(A, B^c)$, de lo que se deduce que $A \odot_w B \subseteq B$. En particular, $\odot_w$ satisface **(Rel2)**. $\square$

Demostración de Corolario 6.2.2. Veamos cada ítem a partir de las equivalencias que tenemos de la función world-selection ρ y su relación cuestionable asociada. Por la Proposición 5.4.2 y el Teorema 5.4.4, tenemos que:

1. ρ es imprudent si y sólo si $\succ$ es imprudent.
2. ρ es normal imprudent si y sólo si $\succ$ es normal imprudent.
3. ρ es union imprudent si y sólo si $\succ$ es union imprudent.
4. $\rho(\emptyset, B) = \emptyset$ si y sólo si $\succ$ es pro-consistent observation.
5. ρ es wise si y sólo si $\succ$ es wise.
6. ρ es union wise si y sólo si $\succ$ es union wise.
7. ρ es union normal wise si y sólo si $\succ$ es union normal wise.
8. ρ cumple que para todo $B \neq \mathcal{I}$ existe A tal que $A \subseteq B$ y $\rho(A, B) \neq \emptyset$ si y sólo si $\succ$ es skeptic.

De la Definición 5.3.1, sabemos que $A \succ B$ si y sólo si $(A \odot_w B) \cap A \not\subseteq B$. Por la construcción de $A \odot_w B$, tenemos que $(A \odot_w B) \cap A = (A \cap B) \cup \rho(B, A^c)$. Como $\rho(B, A^c) \subseteq B^c \cap A$, resulta que $(A \odot_w B) \cap A \not\subseteq B$ equivale a que $\rho(B, A^c) \neq \emptyset$, que a su vez equivale a que $A \odot_w B \not\subseteq B$. Además, en el caso particular de que $A \cap B = \emptyset$, $A \odot_w B \not\subseteq B$ se puede reescribir como $(A \odot_w B) \cap A \neq \emptyset$. Aplicamos estas equivalencias a cada caso, según las definiciones de las propiedades de $\succ$:

1. ρ es imprudent si y sólo si se cumple que si $A \odot_w B \not\subseteq B$, $\emptyset \neq B \subseteq B'$ y $A \not\subseteq B'$ entonces $A \odot_w B' \not\subseteq B'$.
2. ρ es normal imprudent si y sólo si $\odot_w$ satisface **(Rel2)** y se cumple que si $A \odot_w B \not\subseteq B$, $\emptyset \neq B \subseteq B'$ y $A \cap B' = \emptyset$ entonces $A \odot_w B' \not\subseteq B'$. En este contexto, tenemos que $A \cap B = A \cap B' = \emptyset$, por lo que la última parte puede reescribirse como que si $(A \odot_w B) \cap A \neq \emptyset$, $\emptyset \neq B \subseteq B'$ y $A \cap B' = \emptyset$ entonces $(A \odot_w B') \cap A \neq \emptyset$. Paralelamente, si $A \cap B' \neq \emptyset$ también vale que $(A \odot_w B') \cap A \neq \emptyset$ por la construcción de $A \odot_w B'$. Por lo tanto, la afirmación “si $(A \odot_w B) \cap A \neq \emptyset$, $\emptyset \neq B \subseteq B'$ entonces $(A \odot_w B') \cap A \neq \emptyset$ ” es equivalente a “si $(A \odot_w B) \cap A \neq \emptyset$, $\emptyset \neq B \subseteq B'$ y $A \cap B' = \emptyset$ entonces $(A \odot_w B') \cap A \neq \emptyset$ ”.

3. ρ es union imprudent si y sólo si vale que si $A \not\subseteq B \neq \emptyset$ entonces $A \odot_w B \not\subseteq B$ si y sólo si existe $w \in B$ tal que $A \odot_w \{w\} \not\subseteq \{w\}$.
4. $\rho(\emptyset, B) = \emptyset$ si y sólo si se cumple que si $A \neq \emptyset$ entonces $A \odot_w \emptyset \subseteq \emptyset$. Además, como $\succ$ es questionable $\emptyset \not\succ \emptyset$, es decir $\emptyset \odot_w \emptyset = \emptyset$. Por lo tanto, la afirmación “si $A \neq \emptyset$ entonces $A \odot_w \emptyset \subseteq \emptyset$ ” equivale a que $A \odot_w \emptyset = \emptyset$.
5. ρ es wise si y sólo si vale que si $A \odot_w B \not\subseteq B$ y $B' \subseteq B$ entonces $A \odot_w B' \not\subseteq B'$.
6. ρ es union wise si y sólo si se cumple que si $A \not\subseteq B \neq \emptyset$, entonces $A \odot_w B \not\subseteq B$ si y sólo si $A \odot_w \{w\} \not\subseteq \{w\}$ para todo $w \in B$.
7. ρ es union normal wise si y sólo si se cumple que si $A \cap B = \emptyset \neq B$, entonces $A \odot_w B \not\subseteq B$ si y sólo si $A \odot_w \{w\} \not\subseteq \{w\}$ para todo $w \in B$. Como estamos en el contexto de $A \cap B = \emptyset$, y en particular vale que $A \cap \{w\} = \emptyset$ para todo $w \in B$, la afirmación es equivalente a si $A \cap B = \emptyset \neq B$, entonces $(A \odot_w B) \cap A \neq \emptyset$ si y sólo si $(A \odot_w \{w\}) \cap A \neq \emptyset$ para todo $w \in B$.
8. ρ cumple que para todo B existe A tal que $A \subseteq B$ y $\rho(A, B) \neq \emptyset$ si y sólo si vale que si $A \neq \emptyset$ entonces existe B tal que $A \cap B = \emptyset$ y $A \odot_w B \not\subseteq B$. Como está la condición $A \cap B = \emptyset$, podemos reescribir el final como $(A \odot_w B) \cap A \neq \emptyset$.

De esta forma, vimos que las respectivas propiedades de ρ reflejan los postulados de $\odot_w$ considerados en la Definición 6.2.1. $\square$

Demostración de Proposición 6.2.5.

5. Que $(\prec, \succ)$ esté weakly entangled equivale a que suceda una de estas cuatro situaciones:

- $B = \emptyset$;
- $(A \cap B) \cup \sigma(A, B^c) \neq \emptyset$;
- $A = \emptyset$;
- $\rho(B, A^c) \neq \emptyset$.

Es decir, si $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$ entonces $(A \cap B) \cup \sigma(A, B^c) \cup \rho(B, A^c) \neq \emptyset$. Por lo tanto, equivale a que $A \odot_w B$ satisfaga **(W $\diamond$ 3)**.

6. Que $(\prec, \succ)$ esté entangled equivale a que suceda una de estas tres situaciones:

- $(A \cap B) \cup \sigma(A, B^c) \neq \emptyset$;
- $A = \emptyset$;
- $\rho(B, A^c) \neq \emptyset$.

Es decir, si $A \neq \emptyset$ entonces $(A \cap B) \cup \sigma(A, B^c) \cup \rho(B, A^c) \neq \emptyset$. Por lo tanto, equivale a que $A \odot_w B$ satisfaga **(Rel4)**.

7. Que $(\prec, \succ)$ esté strongly entangled equivale a que suceda solamente una de estas dos situaciones:

- $(A \cap B) \cup \sigma(A, B^c) \neq \emptyset$ ó $A = \emptyset$;
- $\rho(B, A^c) \neq \emptyset$.

Es decir,

$$A \odot_w B = \begin{cases} \rho(B, A^c) & \text{Si } \rho(B, A^c) \neq \emptyset \\ (A \cap B) \cup \sigma(A, B^c) & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Por lo tanto, $\odot_w$ satisface **(Rel2)**, **(Rel3)** y **(Rel4)**.

Supongamos ahora que $\odot_w$ satisface **(Rel2)**, **(Rel3)** y **(Rel4)**. Veamos que $\rho(B, A^c) = \emptyset$ ($A \not\prec B$) si y sólo si $A = \emptyset$ ó $(A \cap B) \cup \sigma(A, B^c) \neq \emptyset$ ($A \prec B$).

Si $A = \emptyset$, entonces $\rho(B, A^c) = \emptyset$. Si $(A \cap B) \neq \emptyset$ entonces $\rho(B, A^c) = \emptyset$, por **(Rel2)**. Si $\sigma(A, B^c) \neq \emptyset$ entonces $A \odot_w B \not\subseteq A$, por lo tanto de **(Rel3)** se deduce que $A \odot_w B \subseteq B$. Por lo tanto, $\rho(B, A^c) = \emptyset$. Luego, si $A \prec B$ entonces $\rho(B, A^c) = \emptyset$, es decir $A \not\prec B$.

Por último, si $A \not\prec B$, es decir, $(A \cap B) \cup \sigma(A, B^c) = \emptyset$ y $A \neq \emptyset$, entonces $A \odot_w B = \rho(B, A^c)$. Por **(Rel4)**, sabemos que si $A \neq \emptyset$ entonces $\rho(B, A^c) \neq \emptyset$. Por lo tanto, si $A \not\prec B$, entonces $A \succ B$.

□

Demostración de Teorema 6.2.7.

1. Sabemos que un operador $\odot_w$ naïve world versatile equivale a un operador elementary world versatile tal que $(A \odot_w B) \cap A \subseteq B$ para todo $A, B \subseteq \mathcal{I}$. Por lo tanto, $\rho(B, A^c) = \emptyset$ para todo $A, B \subseteq \mathcal{I}$. Luego $A \odot_w B = (A \cap B) \cup \sigma(A, B^c) = A *_w B$ siendo $*_w$ uno de los operadores elementary world revision asociado a $\odot_w$.

Por otro lado, un operador elementary world revision satisface **(W $\odot$ 1)** y **(W*2)** por definición. Además cumple que $(A \odot_w B) \cap A \subseteq B$ para todo $A, B \subseteq \mathcal{I}$ por construcción. Por lo que es un operador naïve world versatile.

2. $\odot_w$ es fully questionable world versatile tiene el siguiente comportamiento:

$$A \odot_w B = \begin{cases} (A \cap B) \cup \sigma(A, B^c) & \text{Si } \rho(B, A^c) = \emptyset \\ A \cup \sigma(A, B^c) & \text{Si } \rho(B, A^c) \neq \emptyset \end{cases}$$

Si $A *_s B$ es el operador elementary world revision asociado a σ , como $A \cup \sigma(A, B^c) = A \cup A *_s B$, tenemos que $\odot_w$ es un operador world filtered revision.

Supongamos ahora que $\odot_w$ es world filtered revision. Por construcción, sabemos que satisface **(W $\odot$ 1)** y **(W*2)**. Además, si $(A \odot_w B) \cap A \not\subseteq B$, significa que $A \odot_w B \not\subseteq B$. Eso solamente pasa cuando $A \odot_w B = (A *_w B) \cup A$ por la Definición 5.1.2. Por lo tanto, $A \subseteq A \odot_w B$. Luego $\odot_w$ es fully questionable world versatile.

3. Esto se deduce directamente del ítem anterior y la Proposición 5.3.4.
4. Que $\odot_w$ sea fully doubtful world versatile significa que por ser doubtful si $A \not\subseteq B$ entonces $(A \odot_w B) \cap A \not\subseteq B$, que combinado con fully implica que si $A \not\subseteq B$ entonces $A \subseteq A \odot_w B$. Por otro lado, si $A \subseteq B$ entonces $A \cap B = A$. Por lo tanto si $A \subseteq B$ vale que $A \subseteq A \odot_w B$ por satisfacer **(W*2)**. Luego, en cualquier caso vale que $A \subseteq A \odot_w B$, es decir, $\odot_w$ satisface **(W-1)**. Viendo esto a constructivamente, tenemos que $A \odot_w B = A \cup \sigma(A, B^c)$. Concluimos entonces que $\odot_w$, su operador dual definido como $A \odot_w B = A \odot_w B^c = A \cup \sigma(A, B)$ es un operador elementary world contraction por el Teorema 3.1.3.

Supongamos ahora que $\odot_w$ es elementary world contraction. Nuevamente por el Teorema 3.1.3 sabemos que $A \odot_w B^c = A \odot_w B = A \cup \sigma(A, B)$. Por lo tanto, $A \odot_w B = (A \cap B) \cup \sigma(A, B^c) \cup A^c \cap B$. Por el Teorema 6.1.4, vemos que $\odot_w$ satisface **(W $\odot$ 1)** y **(W*2)**. Como $\odot_w$ satisface **(W-1)**, también cumple automáticamente **(WQ $\odot$ 1)**, **(WQ $\odot$ 5)**, **(WQ $\odot$ 8)** y **(Rel5)**.

□

Demostración de Corolario 6.3.1. A partir de que $(A \odot_w B) \cap B = A *_w B = (A *_w B) \cap B$, siendo $*_w$ el operador elementary world revision asociado a σ , los postulados de la Definición 4.4.1 pueden verse respecto a $*_w$ en vez de $\odot_w$. Por lo que los resultados se deducen de forma inmediata a partir del Teorema 4.4.2 y de cómo se vincula $*_w$ con su relación $\prec$, que coincide con la de $\odot_w$.

□

Demostración de Teorema 6.3.3.

1. Que σ sea semantically successful under consistency equivale a que el operador $*_w$ definido como $A *_w B = (A \cap B) \cup \sigma(A, B^c)$ satisfaga **(W $\diamond$ 3)**. Pero $*_w$ es uno de los operadores elementary world revision asociado a $\odot_w$, por lo tanto $A *_w B = (A \odot_w B) \cap B$. Luego, que $*_w$ satisfaga **(W $\diamond$ 3)** equivale sintácticamente a que $\odot_w$ **(W $\odot$ 3)**.
2. La misma demostración anterior se aplica para σ siendo semantically successful, $*_w$ cumpliendo **(W*3)** y $\odot_w$ cumpliendo **(W $\odot$ 4)**.

□

Demostración de Teorema 6.3.5.

1. Notemos que $A \odot_w B \subseteq A$ si y sólo si $\sigma(A, B^c) = \emptyset$. Por lo tanto, suponiendo en particular que $A \cap B \neq \emptyset$, resulta que $\odot_w$ satisface **(W $\odot$ 5)** si y sólo si σ es normal.
2. Es evidente que si **(W*4)** implica **(Rel2)** y **(W $\odot$ 5)**. Por otro lado, si $\odot_w$ satisface **(Rel2)** y **(W $\odot$ 5)**, entonces al suponer que $A \cap B \neq \emptyset$ tenemos que $(A \odot_w B) \cap A \subseteq B$ y $A \odot_w B \subseteq A$. Luego $A \odot_w B \subseteq A \cap B$, y por **(W*2)** vale la igualdad.
3. Si $A \subseteq B$ entonces $A \cap B = A$ y $A \cap B^c = \emptyset$. En particular, $\rho(B, A^c) = \emptyset$. Luego, $A \odot_w B = A$ si y sólo si $\sigma(A, B^c) = \emptyset$.
4. Como el caso anterior (pero con los roles intercambiados), si $B \subseteq A$ entonces $A \cap B = B$ y $A^c \cap B = \emptyset$. En particular, $\sigma(A, B^c) = \emptyset$. Luego, $A \odot_w B = B$ si y sólo si $\rho(B, A^c) = \emptyset$.

Los ítems 5 y 6 se deducen directamente del hecho de que $(A \odot_w B) \cap B$ y $(A \odot_w B) \cap A$ definen operadores elementary world revision, como lo afirma el Teorema 6.1.4. Por lo que basta con combinar lo anterior con el Teorema 3.2.5 del Capítulo 3. □

Demostración de Proposición 6.4.1.

1. Si $*_w$ satisface **(W $\diamond$ 5)** y $w \in A *_w B$, entonces $\emptyset \neq (A *_w B) \cap \{w\} \subseteq A *_w (B \cap \{w\})$. Por **(W*1)** $w \in B$, por lo tanto $A *_w (B \cap \{w\}) = A *_w \{w\}$. Combinando ambos resultados y nuevamente por **(W*1)** tenemos que $A *_w \{w\} = \{w\}$. En particular, $(A *_w \{w\}) \cap \{w\} \neq \emptyset$, es decir $A \prec \{w\}$. Luego $A *_w B \subseteq \alpha(A)$.

Supongamos ahora que $A \prec (\bigcup S)$ para un $S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{I}) \setminus \{\emptyset\}$. En términos de $*_w$, esto significa que $(A *_w (\bigcup S)) \cap (\bigcup S) \neq \emptyset$. En particular, existe $B \in S$ tal que $(A *_w (\bigcup S)) \cap B \neq \emptyset$. Luego, por **(W $\diamond$ 5)**, tenemos que $(A *_w (\bigcup S)) \cap B \subseteq A *_w B$, pues $(\bigcup S) \cap B = B$. Por lo tanto, $A *_w B \neq \emptyset$, es decir $A \prec B$.

2. Si $*_w$ satisface **(W $\diamond$ 6)**, veamos que se cumple **(W $\odot$ 1)** por absurdo. Supongamos que $(A *_w B) \cap B \neq \emptyset$, $B \subseteq B'$ y $(A *_w B') \cap B' = \emptyset$. Por **(W*1)** tenemos que $\emptyset \neq (A *_w B) \cap B = A *_w B \subseteq B$ y $(A *_w B') \cap B' = A *_w B' = \emptyset$. Luego, $A *_w B \subseteq B'$ y $A *_w B' \subseteq B$. Aplicando **(W $\diamond$ 6)**, tenemos que $\emptyset \neq A *_w B = A *_w B' = \emptyset$, llegando a una contradicción.
3. De la demostración del Teorema 3.2.8 podemos ver que **(WL1)** y **(W $\diamond$ 8)** implican **(W $\diamond$ 5)**, **(W $\diamond$ 7)** y el caso no $A *_w B \neq \emptyset \neq A *_w C$ de **(W $\diamond$ 6)**. Supongamos entonces que $A *_w B \subseteq C$ y $A *_w C \subseteq B$ donde $A *_w B = \emptyset$ ó $A *_w C = \emptyset$. Sin perder generalidad por la simetría de las hipótesis, consideremos el caso en que $A *_w B = \emptyset$. Esto significa que $A \not\prec B$. De $\prec$ sabemos que es credible (compatible y pro-consistent observation), closed over inclusion por **(W $\odot$ 1)** y union complete por **(W $\diamond$ 5)**. Luego $\prec$ es core definable. Como $A \not\prec B$, esto equivale a que $B \cap \alpha(A) = \emptyset$. Por otro lado, sabemos que $A *_w C \subseteq B$, por lo tanto $A *_w C \cap \alpha(A) = \emptyset$. Pero por **(W $\diamond$ 5)** también sabemos que $A *_w C \subseteq \alpha(A)$. Concluimos entonces que $A *_w C = \emptyset$. En particular, $A *_w B = A *_w C$.

□

Demostración de Teorema 6.4.2.

De postulados a partición: Que la relación $\prec$ es core se deduce de que **(W*5)** implica **(W◊5)**, por lo tanto $\prec$ es union complete por la Proposición 6.4.1, closed over inclusion por **(W◊1)** y pro-consistent observation por **(W*1)**.

Como en el Teorema 3.1.9, fijado un conjunto A consideremos la siguiente construcción recursiva sobre un conjunto de índices J :

$$\begin{cases} X_0 &= A *_w \mathcal{I} \\ X_j &= A *_w \left(\bigcap_{0 \leq k < j} X_k^c \right) \end{cases}$$

La secuencia la finalizamos en $l = \min\{j \in J \mid X_j = \emptyset\}$. Este elemento existe pues J es bien ordenado y depende de A . Notar además que:

$$A *_w \left(\bigcap_{0 \leq k < l} X_k^c \right) = A *_w \left(\bigcap_{0 \leq k < m} X_k^c \right) = \emptyset \quad \text{para todo } m > l$$

De esta forma, los conjuntos X_j con $j < l$ son no vacíos y disjuntos dos a dos por **(W*1)** y $A \subseteq X_0$ por **(W*2)**. Así, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $[0, l) = J$.

Tomemos ahora $Z = \bigcup_{0 \leq k < l} X_k$. Como **(W*5)** implica **(W◊5)**, tenemos que $Z \subseteq \alpha(A)$ por la Proposición 6.4.1. Por otro lado, vale que $A *_s Z^c = \emptyset$ por definición de l . Como $\prec$ es core, esto significa que $A \not\prec Z^c$, o equivalentemente, $Z^c \cap \alpha(A) = \emptyset$. Tenemos entonces que $\alpha(A) \subseteq Z$. Luego $\alpha(A) = Z$. Podemos concluir entonces que $\{X_j\}_{j \in [0, l)}$ es una partición bien ordenada de $\alpha(A)$.

Probemos ahora que si $B \cap \alpha(A) \neq \emptyset$ se satisface la igualdad. Como $\{X_j\}_{j \in [0, l)}$ es una partición bien ordenada de $\alpha(A)$, sabemos que existe $n = \min\{j \in [0, l) \mid B \cap X_j \neq \emptyset\}$. Luego, si $m < n$ entonces $B \cap X_m = \emptyset$, por lo tanto:

$$B \subseteq \bigcap_{0 \leq j < n} X_j^c$$

Por definición de X_n y n , tenemos que:

$$X_n \cap B = \left(A *_w \bigcap_{0 \leq j < n} X_j^c \right) \cap B \neq \emptyset$$

Así que podemos aplicar **(W*5)**:

$$X_n \cap B = \left(A *_w \bigcap_{0 \leq j < n} X_j^c \right) \cap B = \left(A *_w \left(B \cap \bigcap_{0 \leq j < n} X_j^c \right) \right) = A *_w B$$

Por último, notar que si $*_w$ satisface **(W◊4)** entonces $X_0 = A *_w \mathcal{I} = A$.

De partición a preorden: Dado $A \in \mathcal{I}$ tenemos por hipótesis una partición $\{X_j\}_{j \in [0, l]}$ de $\alpha(A)$. A partir de la misma, decimos que $w \leq_A w'$ si y sólo si sucede una de estas tres situaciones:

- $w \in X_j$ y $w' \in X'_j$ con $j \leq j'$;
- $w \in \alpha(A)$ y $w' \notin \alpha(A)$
- $w \notin \alpha(A)$ y $w' \notin \alpha(A)$

Por lo tanto, $\leq_A$ es un preorden total bien fundado, ya que es reflexivo, transitivo, y como $\{X_j\}_{j \in [0, l]} \cup \{\alpha(A)^c\}$ es una partición de $\mathcal{I}$ están cubiertos todos los elementos de $\mathcal{I}$. Además, $\{X_j\}_{j \in [0, l]} \cup \{\alpha(A)^c\}$ está bien ordenado, extendiendo el buen orden de $\{X_j\}_{j \in [0, l]}$ con $\alpha(A)^c$ el último elemento.

Veamos entonces que $A *_w B = \min(B \cap \alpha(A), \leq_A)$. Si $B \cap \alpha(A) = \emptyset$ entonces $\min(B \cap \alpha(A), \leq_A) = \emptyset$ por ser subconjunto de $\emptyset$ y $A *_w B = \emptyset$ pues $A \not\prec B$, dado que $\prec$ es core. Si $B \cap \alpha(A) \neq \emptyset$ entonces sabemos por hipótesis que $A *_w B = B \cap X_n$ con $n = \min \{j \in [0, l] \mid B \cap X_j \neq \emptyset\}$. Por otro lado, $w \in \min(B \cap \alpha(A), \leq_A)$ si y sólo si $w \in B \cap \alpha(A)$ y $w \leq_A w'$ para todo $w' \in B \cap \alpha(A)$. Por definición de n y $\leq_A$, si $w \in B \cap X_n$ entonces $w \in \min(B \cap \alpha(A), \leq_A)$, y si $w \in X_m \cap \min(B \cap \alpha(A), \leq_A)$ con $m > n$, entonces $w' \prec_A w$ para todo $w' \in X_n$, llegando a una contradicción. Luego, si $m \neq n$ entonces $X_m \cap \min(B \cap \alpha(A), \leq_A) = \emptyset$. Se concluye entonces que $\min(B \cap \alpha(A), \leq_A) \subseteq B \cap X_n$.

Por último, si $*_w$ satisface **(W♦4)** sabemos que $X_0 = A$, por lo tanto vale que si $w \in A$ y $w' \notin A$ entonces $w \not\prec_A w'$.

De preorden a postulados: Como $*_w$ es un operador core sabemos que satisface **(W*1)**, **(W*2)** y **(W♦1)**, por lo que sólo resta ver que satisface **(W*5)**. Consideremos $A, B, C \subseteq \mathcal{I}$ tal que $(A *_w B) \cap C \neq \emptyset$. Por hipótesis sabemos que:

$$A *_w B = \min(B \cap \alpha(A), \leq_A) \quad \text{y} \quad A *_w (B \cap C) = \min(B \cap C \cap \alpha(A), \leq_A)$$

Como $(A *_w B) \cap C \neq \emptyset$, es decir $\min(B \cap \alpha(A), \leq_A) \cap C \neq \emptyset$, en particular tenemos que $B \cap C \cap \alpha(A) \neq \emptyset$. Usando que $*_w$ es un operador core, resulta que $A *_w (B \cap C) \neq \emptyset$, es decir, $\min(B \cap C \cap \alpha(A), \leq_A) \neq \emptyset$.

Tomemos entonces $w \in \min(B \cap \alpha(A), \leq_A) \cap C$. Luego, si $w' \in B \cap \alpha(A)$ entonces $w \leq_A w'$. Esto vale en el caso particular de que $w' \in B \cap C \cap \alpha(A)$. Por lo tanto, como además $w \in C$, resulta que $w \in \min(B \cap C \cap \alpha(A), \leq_A)$. Podemos decir entonces que:

$$\min(B \cap \alpha(A), \leq_A) \cap C \subseteq \min(B \cap C \cap \alpha(A), \leq_A)$$

Para la otra inclusión, consideremos $w \in \min(B \cap C \cap \alpha(A), \leq_A)$. En particular $w \in C$ y $w \in B \cap \alpha(A)$, así que veamos entonces que $w \in \min(B \cap \alpha(A), \leq_A)$. Si $\tilde{w} \in \min(B \cap \alpha(A), \leq_A)$, entonces $\tilde{w} \leq_A w'$ para todo $w' \in B \cap C \cap \alpha(A)$. En particular, sabemos que $\tilde{w} \leq_A w$. Como $\min(B \cap \alpha(A), \leq_A) \cap C \neq \emptyset$, existe $\tilde{w}'$ tal que $\tilde{w}' \in C$, $\tilde{w} \leq_A \tilde{w}'$ y $\tilde{w}' \leq_A \tilde{w}$. Como $\tilde{w}' \in B \cap C \cap \alpha(A)$, tenemos que $w \leq_A \tilde{w}'$. Luego, por la transitividad de $\leq_A$, resulta que $w \leq_A \tilde{w}$, lo que nuevamente por transitividad implica que $w \in \min(B \cap \alpha(A), \leq_A)$. Concluimos entonces que:

$$(A *_w B) \cap C = \min(B \cap \alpha(A), \leq_A) \cap C = \min(B \cap C \cap \alpha(A), \leq_A) = A *_w (B \cap C)$$

Por último, si $\leq_A$ además es faithful y $A \subseteq B$, como $A \subseteq \alpha(A)$ por ser compatible entonces $\min(B \cap \alpha(A), \leq_A) = A$. Es decir, $*_w$ satisface **(W♦4)**. □

Demostración de Corolario 6.4.3. Del Teorema 6.4.2 tomamos $A *_w' B = \min(B, \leq_A)$. Por el Corolario 3.1.10, sabemos que definir un operador de esta manera equivale a que satisfaga los postulados **(W*1)~(W*5)**. Utilizando la función $\alpha(A)$ del Teorema 6.4.2 tenemos que $A *_w B = A *_w' (B \cap \alpha(A))$.

Supongamos ahora que tenemos la construcción de un operador $A *_w B = A *_w' (B \cap \alpha(A))$ donde $A *_w' B$ satisface **(W*1)~(W*5)** y $A \subseteq \alpha(A)$. Luego, por el Corolario 3.1.10, $*'_w$ puede ser representado vía una asignación faithful tal que $A *_w B = \min(B, \leq_A)$ con $\leq_A$ un preorden total bien fundado. Entonces tenemos que $A *_w B = \min(B \cap \alpha(A), \leq_A)$. Veamos que se satisfacen los postulados:

(W*4) Como $A \subseteq \alpha(A)$ y $\leq_A$ es faithful, si vale que $A \cap B \neq \emptyset$ entonces $A *_w B = A \cap B$.

(W◊1) Si $B \subseteq B'$, por la monotonía de $\min$ resulta que:

$$\min(B \cap \alpha(A), \leq_A) \subseteq \min(B' \cap \alpha(A), \leq_A)$$

Luego, si $(A *_w B) \cap B \neq \emptyset$ entonces $(A *_w B') \cap B' \neq \emptyset$ por la construcción de $*_w$.

(W*5) Consideremos $A, B, C \subseteq \mathcal{I}$ tal que $(A *_w B) \cap C \neq \emptyset$. Por hipótesis sabemos que $A *_w B = A *_w' (B \cap \alpha(A))$. Utilizando (W*5) de $*'_w$ tenemos que:

$$(A *_w B) \cap C = (A *_w' (B \cap \alpha(A))) \cap C = A *_w' (B \cap C \cap \alpha(A)) = A *_w (B \cap C)$$

□

Demostración de Teorema 6.4.4. 1. En la demostración del Teorema 3.2.7, dado $w \in \mathcal{I}$ se considera la relación $x \leq_w y$ dada por $x = w$ o bien $\{w\} \diamond_w \{x, y\} = \{x\}$. En este contexto, esta relación es reflexiva en el conjunto $\alpha(w)$ por definición de $\alpha(w)$. La antisimetría se da por la definición de la relación. Para ver la transitividad en $\alpha(w)$ podemos seguir el mismo procedimiento que en la demostración del Teorema 3.2.7, sin la necesidad de justificar con (W◊3) que $\{w\} \diamond_w \{x\} = \{x\}$ puesto que lo suponemos al estar trabajando con elementos de $\alpha(w)$.

Veamos ahora que $\{w\} \diamond_w B = \min(B \cap \alpha(w), \leq_w)$. Por (W*1) sabemos que $\{w\} \diamond_w B \subseteq B$, y por la Proposición 6.4.1 junto con (W◊5) sabemos que $\{w\} \diamond_w B \subseteq \alpha(A)$. Por lo que nuevamente podemos seguir la demostración del Teorema 3.2.7 pero trabajando con $B \cap \alpha(w)$.

Notar además que si $B \cap \alpha(w) \neq \emptyset$ entonces $\{w\} \diamond_w B \neq \emptyset$, pues $\diamond_w$ es core. Esto se deduce de la Proposición 6.4.1 con el hecho de que $\diamond_w$ satisface (W◊5) y (W◊6). Esto implica que $\leq_w$ es bien fundada en $\alpha(w)$.

Veamos ahora que $A \diamond_w B = \bigcup_{w \in A} \min(B \cap \alpha(w), \leq_w)$ satisface (W◊5)~(W◊7).

(W◊5) Sea $w \in \mathcal{I}$. Dado un $x \in \min(B \cap \alpha(w), \leq_w) \cap C$, es claro que $x \in B \cap C \cap \alpha(w)$. Si tomamos $y \in B \cap C \cap \alpha(w)$, $y \neq x$, tenemos que $y \not\leq_w x$ pues $x \in \min(B \cap \alpha(w), \leq_w)$ y $y \in B \cap \alpha(w)$. Por lo tanto, $x \in \min(B \cap C \cap \alpha(w), \leq_w)$. Luego:

$$C \cap \bigcup_{w \in A} \min(B \cap \alpha(w), \leq_w) \subseteq \bigcup_{w \in A} \min(C \cap B \cap \alpha(w), \leq_w)$$

(W◊6) Sean $A, B, C \subseteq \mathcal{I}$ tales que $A \diamond_w B \subseteq C$ y $A \diamond_w C \subseteq B$. Por la construcción, esto significa que para cualquier $w \in A$ vale que:

$$\min(B \cap \alpha(w), \leq_w) \subseteq C \quad \text{y} \quad \min(C \cap \alpha(w), \leq_w) \subseteq B$$

Como $\leq_w$ es bien fundado, tenemos que si $B \cap \alpha(w) \neq \emptyset \neq C \cap \alpha(w)$, entonces $\min(B \cap \alpha(w), \leq_w) \neq \emptyset \neq \min(C \cap \alpha(w), \leq_w)$. Supongamos que existe $x \in \min(B \cap \alpha(w), \leq_w)$ tal que $x \notin \min(C \cap \alpha(w), \leq_w)$. Eso significa que existe $y \in \min(C \cap \alpha(w), \leq_w)$ tal que $y \leq_w x$. Pero como $\min(C \cap \alpha(w), \leq_w) \subseteq B$, entonces $y \in B$. Luego $x \leq_w y$ o bien no se relacionan, llegando a una contradicción. Como la hipótesis es simétrica para B y C , tenemos la doble inclusión entre $\min(B \cap \alpha(w), \leq_w)$ y $\min(C \cap \alpha(w), \leq_w)$. Luego, aplicando el resultado en la construcción, tenemos que $A \diamond_w B = A \diamond_w C$.

Si $B \cap \alpha(w) = \emptyset$, como por (W◊5) y la Proposición 6.4.1 tenemos que $\min(C \cap \alpha(w), \leq_w) \subseteq \alpha(w)$. Si además tenemos por hipótesis $\min(C \cap \alpha(w), \leq_w) \subseteq B$, concluimos que $\min(C \cap \alpha(w), \leq_w) = \emptyset$. En particular, $\min(B \cap \alpha(w), \leq_w) = \min(C \cap \alpha(w), \leq_w)$. La situación con $C \cap \alpha(w) = \emptyset$ es análoga.

(W $\diamond$ 7) Sea $w \in \mathcal{I}$ y $S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{I})$, tomamos $x \in \bigcap_{B \in S} \{w\} \diamond_w B = \bigcap_{B \in S} \min(B \cap \alpha(w), \leq_w)$.

Si $y \in \bigcup S$ y $x \neq y$, entonces existe $B_y \in S$ tal que $y \in B_y$. Como $x \in \min(B_y \cap \alpha(w), \leq_w)$, se tiene que $y \not\leq_w x$. Como la elección del y fue arbitraria para cualquier elemento de $\bigcup S$, se tiene que $x \in \min(\alpha(w) \cap \bigcup S, \leq_w) = \{w\} \diamond_w (\bigcup S)$. En conclusión, $\bigcap_{B \in S} \{w\} \diamond_w B \subseteq \{w\} \diamond_w (\bigcup S)$.

2. En la prueba del Teorema 6.4.2, para definir la partición aplicamos los postulados **(W $\circ$ 1)** y **(W*5)**. Si restringimos lo hecho al caso en que $A = \{w\}$, podemos replicar la demostración utilizando solamente **(W $\diamond$ 8)** y α definida sobre $\mathcal{I}$. Luego, tenemos la equivalencia de que $\diamond_w$ satisface **(W $\circ$ 1)** si y sólo si existe una asignación tal que a cada $w \in \mathcal{I}$ le asigna un preorden total y bien fundado $\leq_w$ sobre $\alpha(w)$ y $\{w\} \diamond_w B = \min(B \cap \alpha(w), \leq_w)$. Además, sabemos que vale **(W $\diamond$ 4)**, por lo que la asignación es faithful. Finalmente, aplicando **(WL1)**, se deduce la igualdad que queríamos probar. $\square$

Demostración de Corolario 6.4.6. Las equivalencias se deducen de forma directa a partir del Teorema 6.1.4. Se trata de reemplazos sintácticos de $(A \odot_w B) \cap B = A *^{\sigma}_w B$ y $(A \odot_w B) \cap A = B *^{\rho}_w A$ según corresponda en cada caso. $\square$

Capítulo 7

Operadores Versatile de Cambio Múltiple sobre Teorías

¿Y qué es la verdad?

Poncio Pilato (Juan 18:38)

El objetivo de este capítulo es implementar el marco conceptual desarrollado en los Capítulos 3 a 6 sobre una lógica tarskiana. Al definir el marco conceptual de mundos, dijimos que $\mathcal{I}$ es un conjunto de índices, interpretándolos como etiquetas vacías, sin ninguna noción semántica definida a priori. Por lo tanto, lo que aquí haremos será “llenar” esas etiquetas con la semántica de una lógica, asociando conjuntos de mundos con teorías, los conjuntos de fórmulas cerrados por consecuencia lógica.

En términos de la reducción de Suszko [3], [38], toda lógica tarskiana puede representarse a partir de un lenguaje $\mathbb{L}$ y un conjunto de funciones $v : \mathbb{L} \rightarrow \{0, 1\}$, a las que se conocen como valuaciones lógicas. Por lo que el primer paso para relacionar ambos marcos conceptuales es tomar $\mathcal{I}$ como el conjunto de índices del conjunto valuaciones $\mathcal{V}$ y utilizar las funciones $\|\cdot\|$ y $\mathcal{T}$ que surgen del trabajo de Grove y fueron presentadas en la Definición 2.3.2. Esta relación ya fue de alguna manera implementada en el trabajo de Grove [17] para CPL y en el de Katsuno y Mendelzon [24] para el caso finito de CPL. En ambos, el principio de extensionalidad permite que los operadores se enfoquen en el valor semántico de las fórmulas o del conjunto de fórmulas. Nosotros mantendremos este principio de extensionalidad y lo extenderemos el caso de operadores de cambio múltiple, trabajando con conjuntos de creencias y observaciones ambos representadas por teorías.

Comenzaremos entonces por analizar las propiedades de las funciones $\|\cdot\|$ y $\mathcal{T}$ asociadas a una lógica tarskiana. Luego identificaremos aquellas lógicas tal que dadas dos teorías $\|\cdot\|$ nos devuelva dos conjuntos de mundos a los que podamos aplicar operadores world, y que al volver vía $\mathcal{T}$ las propiedades se mantengan. Como condición mínima, estas lógicas deben ser capaces de representar a los operadores elementales de conjuntos, intersecciones y uniones, como operadores sobre teorías. Esto se debe a que los postulados que tenemos para los operadores world versatile se definen con uniones e intersecciones. Esta condición hace que no en toda lógica tarskiana sea posible construir operadores de cambio, una situación que ya fue expuesta en Flouris et al. [8]. Más aún, sabemos por [39] que incluso en la lógica clásica las funciones $\|\cdot\|$ y $\mathcal{T}$ no son biyectivas. Caracterizadas estas lógicas, procederemos a definir axiomáticamente todos los operadores basados en world versatile.

Las construcciones de los operadores surgirán luego de identificar el comportamiento de las funciones world-selection en términos de teorías vía los conjuntos de remainders y openings de Fuhrmann y Hansson [9], [11] de la Sección 2.6. Estos conjuntos nos servirán para solucionar el hecho de que las funciones world-selection utilizan la noción de complemento, que no necesariamente puede existir o ser representada en la lógica.

7.1 AGM-Compliance y Valuaciones

Dado un lenguaje $\mathbb{L}$, consideramos el conjunto de funciones que van de $\mathbb{L}$ a $\{0, 1\}$:

$$\{0, 1\}^{\mathbb{L}} = \{v : \mathbb{L} \rightarrow \{0, 1\}\}$$

Definiremos una lógica tarskiana de lenguaje $\mathbb{L}$ a partir de un subconjunto $\mathcal{V}$ de $\{0, 1\}^{\mathbb{L}}$, cuyos elementos llamaremos *valuaciones*. Esto es posible gracias a la reducción de Suszko [3], [38]. En principio no hay una regla que defina cómo se construyen las fórmulas, los elementos de $\mathbb{L}$. Luego nos inspiraremos en el trabajo de Lindström [28] para generalizar parte de lo hecho por Grove en [17], presentado en la Sección 2.3. Así, a partir de un lenguaje arbitrario, construiremos lógicas tarskianas donde se puedan satisfacer los postulados clásicos de los operadores contraction. Este concepto aparece en el trabajo de Flouris et al. [8] y se lo conoce como AGM-compliance.

Al considerar un conjunto $\mathcal{V}$, construiremos las funciones $\|\cdot\|$ y $\mathcal{T}$ que remiten a lo presentado por Grove de la Sección 2.3, como también al operador de consecuencia Cn que define una lógica $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, Cn \rangle$ de la forma tradicional.

Definición 7.1.1. Dado $\mathbb{L}$ un lenguaje y $\mathcal{V} \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{L}}$, definimos las siguientes funciones:

- Sea $\|\cdot\| : \mathcal{P}(\mathbb{L}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V})$ la función tal que $\|M\| = \{v \in \mathcal{V} \mid M \subseteq v^{-1}(\{1\})\}$ dado $M \subseteq \mathbb{L}$. Decimos que los elementos de $\|M\|$ son los mundos posibles de M .
- Sea $\mathcal{T} : \mathcal{P}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{L})$ la función tal que $\mathcal{T}(A) = \bigcap_{v \in A} v^{-1}(\{1\})$ dado $A \subseteq \mathcal{V}$.
- Sea $Cn : \mathcal{P}(\mathbb{L}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{L})$ la composición $\mathcal{T}(\|\cdot\|)$.
- Sea $Cl : \mathcal{P}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V})$ la composición $\|\mathcal{T}(\cdot)\|$.

En tal caso, diremos que $\mathbb{L}$ y $\mathcal{V}$ caracterizan la lógica $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, Cn \rangle$. Si especificamos al conjunto de valuaciones que caracterizan a una lógica, notado como $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$, se considerarán implícitamente definidas las funciones aquí presentadas.

Lindström muestra que $\|\cdot\|$ y $\mathcal{T}$ forman una conexión de Galois, vinculando $\mathcal{P}(\mathbb{L})$ y $\mathcal{P}(\mathcal{V})$, y de lo que se deducen varias propiedades que utilizaremos a lo largo del capítulo.

Teorema 7.1.2. En toda $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ lógica tarskiana, el par de funciones $\|\cdot\|$ y $\mathcal{T}$ es una conexión de Galois antitona¹ con la inclusión, es decir, dados $A \in \mathcal{P}(\mathcal{V})$ y $M \in \mathcal{P}(\mathbb{L})$:

$$A \subseteq \|M\| \quad \text{si y sólo si} \quad M \subseteq \mathcal{T}(A)$$

Además, dados $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{V})$, $S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{V})$, $\mathbf{0} \in \{0, 1\}^{\mathbb{L}}$ la función constantemente 0, $\mathbf{1} \in \{0, 1\}^{\mathbb{L}}$ la función constantemente 1, $M, N \in \mathcal{P}(\mathbb{L})$ y $X \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{L})$ tenemos que:

1. Si $M \subseteq N$ entonces $\|N\| \subseteq \|M\|$;
2. Si $A \subseteq B$ entonces $\mathcal{T}(B) \subseteq \mathcal{T}(A)$;
3. $M \subseteq Cn(M)$ y $\|M\| = \|Cn(M)\| = Cl(\|M\|)$;
4. $A \subseteq Cl(A)$ y $\mathcal{T}(A) = \mathcal{T}(Cl(A)) = Cn(\mathcal{T}(A))$;
5. $\|\bigcup X\| = \bigcap_{M \in X} \|M\|$;
6. $\bigcup_{M \in X} \|M\| \subseteq \|\bigcap X\|$;

¹En Lindström [28] se trabaja con otra definición, pero el concepto es el mismo.

$$7. \mathcal{T}(\bigcup S) = \bigcap_{A \in S} \mathcal{T}(A);$$

$$8. \bigcup_{A \in S} \mathcal{T}(A) \subseteq \mathcal{T}(\bigcap S);$$

$$9. \text{ Si } \mathbf{0} \in A \text{ entonces } Cl(A) = \mathcal{V};$$

$$10. \text{ Si } \mathbf{1} \in \mathcal{V} \text{ entonces } \mathbf{1} \in Cl(A) \text{ para cualquier } A \subseteq \mathcal{V} \text{ y } Cl(\emptyset) = \{\mathbf{1}\}.$$

Demostración en la página 130, al final del capítulo.

Del último resultado se deduce que la valuación $\mathbf{1}$ es irrelevante en la representación de una lógica, por lo que de ahora en más la omitiremos. Por otro lado, de las primeras propiedades vemos que efectivamente Cn es un operador de consecuencia tarskiano, es decir, satisface inclusión, monotonía e idempotencia. Como también es posible identificar propiedades para el operador Cl .

Corolario 7.1.3. *Sea $\mathbb{L}$ un lenguaje y $\mathcal{V} \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{L}} \setminus \{\mathbf{1}\}$, entonces el operador consecuencia Cn es tarskiano, es decir, para todo $M, N \subseteq \mathbb{L}$ satisface:*

(Cn1) $M \subseteq Cn(M)$ (inclusión).

(Cn2) $N \subseteq M$ entonces $Cn(N) \subseteq Cn(M)$ (monotonía).

(Cn3) $Cn(Cn(M)) = Cn(M)$ (idempotencia).

Y la función Cl satisface para todo $A, B \subseteq \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{1}\}$ los siguientes postulados de clausura de Kuratowski[26], [30]:

(Ku1) $A \subseteq Cl(A)$.

(Ku2) $A \subseteq B$ entonces $Cl(A) \subseteq Cl(B)$.

(Ku3) $Cl(A) = Cl(Cl(A))$.

(Ku4) $Cl(\emptyset) = \emptyset$.

Del corolario anterior se ve que Cl es casi un operador de clausura topológico. Para que lo sea, necesitamos que además preserve la unión de conjuntos. Así construidas, Cn y Cl ya distinguen ciertos conjuntos de $\mathcal{P}(\mathbb{L})$ y $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ que refinarán la conexión entre $\|\cdot\|$ y $\mathcal{T}$.

Definición 7.1.4. Dada $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ una lógica tarskiana, definimos los siguientes conjuntos:

Conjunto de cerrados (closed) de $\mathcal{V}$: $C(\mathcal{V}) = \{A \subseteq \mathcal{V} \mid A = Cl(A)\};$

Conjunto de abiertos (open) de $\mathcal{V}$: $O(\mathcal{V}) = \{A \subseteq \mathcal{V} \mid A^c \in C(\mathcal{V})\};$

Conjunto de clopens de $\mathcal{V}$: $CO(\mathcal{V}) = \{A \subseteq \mathcal{V} \mid A, A^c \in C(\mathcal{V})\} = C(\mathcal{V}) \cap O(\mathcal{V});$

Conjunto de teorías: $\mathcal{K} = \{K \subseteq \mathbb{L} \mid K = Cn(K)\};$

Conjunto de maximales consistentes: $\mathcal{M}_{\mathcal{L}} = \{T \in \mathcal{K} \mid T \neq \mathbb{L}, Cn(T \cup \{\alpha\}) = \mathbb{L} \text{ si } \alpha \notin T\};$

Conjunto de teorías complementadas: $\mathcal{K}_f = \{K \in \mathcal{K} \mid Cn(K \cup \mathcal{T}(\|K\|^c)) = \mathbb{L}\}.$

Estos conjuntos serán de importancia al momento de vincular el marco conceptual de mundos y con el de ciertas lógicas tarskianas. Veamos algunas propiedades de los mismos.

Proposición 7.1.5. *En toda $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ lógica tarskiana se satisface que:*

1. Si $M, N \subseteq \mathbb{L}$ entonces $Cn(M \cap N) \subseteq Cn(M) \cap Cn(N)$ y vale la igualdad si $M, N \in \mathcal{K}$.
En particular, $\mathcal{K}$ es cerrado por intersecciones de tamaño arbitrario.

2. Si $A, B \subseteq \mathcal{V}$ entonces $Cl(A \cap B) \subseteq Cl(A) \cap Cl(B)$ y vale la igualdad si $A, B \in C(\mathcal{V})$. En particular, $C(\mathcal{V})$ es cerrado por intersecciones de tamaño arbitrario.
3. Si $M, N \subseteq \mathbb{L}$ entonces $Cn(Cn(M) \cup Cn(N)) = Cn(M \cup N)$.
4. Si $A, B \subseteq \mathcal{V}$ entonces $Cl(Cl(A) \cup Cl(B)) = Cl(A \cup B)$.
5. $\|\cdot\|$ y $\mathcal{T}$ definen una biyección entre $\mathcal{K}$ y $C(\mathcal{V})$.
6. Si $M, N \in \mathcal{K}$ y $M \subsetneq N$ entonces $\|N\| \subsetneq \|M\|$.
7. $\|\cdot\|$ y $\mathcal{T}$ definen una biyección entre $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ y el subconjunto $\{v \in \mathcal{V} \mid Cl(v) = \{v\}\}$. En tal caso, la notación $T_v \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ significa que $\|T_v\| = \{v\}$ y $T_v = \mathcal{T}(\{v\}) = v^{-1}(1)$.
8. $\|\cdot\|$ y $\mathcal{T}$ definen una biyección entre $\mathcal{K}_f$ y $CO(\mathcal{V})$.

Demostración en la página 130, al final del capítulo.

La Proposición 7.1.5 nos confirma que trabajar con teorías equivale a hacerlo con los conjuntos cerrados de $\mathcal{V}$. Esta situación puede generar problemas al querer utilizar elementos arbitrarios de $\mathcal{V}$ o el complemento de conjuntos, ya que no necesariamente son cerrados. Por otro lado, en Flouris et al. [8] nos encontramos con las condiciones que una lógica tarskiana debe cumplir para tener un operador contraction que satisfaga los postulados clásicos en su versión general, presentada en la Definición 2.6.5. Por todo esto, consideraremos algunas propiedades extra para el conjunto $\mathcal{V}$.

Definición 7.1.6. Dada $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ una lógica tarskiana, decimos que $\mathcal{V}$ es:

complete si satisface que si $v, v' \in \mathcal{V}$ tales que $T_v \subseteq T_{v'}$ entonces $v = v'$;

topological si satisface que $Cl(A) \cup Cl(B) = Cl(A \cup B)$ para todo $A, B \subseteq \mathcal{V}$.

decomposable si satisface que dados $B \in C(\mathcal{V})$ y $A \subseteq B$ tal que $B \neq \mathcal{V}$, existe $v \notin B$ tal que $B \cap Cl(A \cup \{v\}) = Cl(A)$.

detachable si satisface que si $B \in C(\mathcal{V})$ y $B \neq \mathcal{V}$, existe $v \notin B$ tal que $B \cap Cl(\{v\}) = \emptyset$.

En Lindström [28] se prueba que si la lógica es compacta entonces $\mathcal{V}$ es complete. Este resultado se conoce generalmente como Lema de Lindenbaum, originalmente probado para CPL, que es compacta. Cuando $\mathcal{V}$ es complete, se deduce de la Proposición 7.1.5 que $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ está en biyección con $\mathcal{V}$.

Por otro lado, decir que $\mathcal{V}$ es topological hace referencia a que la función Cl define una topología para $\mathcal{V}$. En general, esta propiedad surge naturalmente en aquellas lógicas donde en su gramática hay un conector de disyunción clásico. En el caso de las lógicas CPL, la topología definida por Cl hace que $\mathcal{V}$ sea su Espacio de Stone [37] asociado.

Observación 7.1.7. Sea $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ una lógica tarskiana tal que $\mathbb{L}$ contiene un conector $\vee$, de aridad 2, tal que $\|\alpha \vee \beta\| = \|\alpha\| \cup \|\beta\|$, es decir, para todo $v \in \mathcal{V}$ vale que $v(\alpha \vee \beta) = 1$ si y sólo si $v(\alpha) = 1$ ó $v(\beta) = 1$. Entonces $\mathcal{V}$ es topological.

Demostración en la página 132, al final del capítulo.

Este resultado está en sintonía con Lindström [28] y Ribeiro et al. [35] donde la propiedad de tener una disyunción clásica es importante en el desarrollo de estos trabajos.

Por último, que $\mathcal{V}$ sea decomposable hace referencia a una definición en el trabajo de Flouris et al [8] y tiene que ver con la posibilidad de obtener operadores contraction clásicos, según la Definición 2.6.5.

Definición 7.1.8. Sea $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, Cn \rangle$ una lógica tarskiana. Dados $K \in \mathcal{K}$ y $M \subseteq \mathbb{L}$, se define $M^-(K)$ el conjunto de *complement beliefs* de M respecto de K como:

$$M^-(K) = \begin{cases} \{X \subseteq \mathbb{L} \mid Cn(X) \subsetneq K, Cn(M \cup X) = K\} & \text{Si } Cn(\emptyset) \subsetneq Cn(M) \subseteq K \\ \{X \subseteq \mathbb{L} \mid Cn(X) = K\} & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$M^-(K)$ se extiende a cualquier $K \subseteq \mathbb{L}$ como $M^-(K) = M^-(Cn(K))$. Decimos que una lógica es *decomposable* si para todo $K, M \subseteq \mathbb{L}$. vale que $M^-(K) \neq \emptyset$.

El siguiente teorema presenta diferentes caracterizaciones de las lógicas cuyos conjuntos de valuaciones satisfacen alguna de las propiedades mencionadas.

Teorema 7.1.9. Sea $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ una lógica tarskiana, se satisface que:

1. $\mathcal{V}$ es *complete* si y sólo si $\{v\} \in C(\mathcal{V})$ para toda $v \in \mathcal{V}$. En tal caso, $\mathcal{V}$ es *detachable* y si $\mathbf{0} \in \mathcal{V}$, entonces $\mathcal{V} = \{\mathbf{0}\}$.
2. $\mathcal{V}$ es *topological* si y sólo si $\|M \cap N\| = \|M\| \cup \|N\|$ para todo $M, N \in \mathcal{K}$. En tal caso, $C(\mathcal{V})$ es cerrado por uniones finitas.
3. $\mathcal{V}$ es *decomposable* si y sólo si $\mathcal{L}$ es *decomposable*. En tal caso, $\mathcal{V}$ es *detachable*.
4. Si $\mathcal{V}$ es *topological* y *detachable* entonces es *decomposable*.

Demostración en la página 132, al final del capítulo.

Habiendo descrito la conexión entre lógicas tarskianas y sus conjuntos de valuaciones, en la siguiente sección lo utilizaremos para etiquetar a los mundos de nuestro marco conceptual.

7.2 Desde el Marco de Mundos al de Lógicas

En esta sección, comenzaremos a desarrollar el vínculo entre el marco conceptual de mundos y las lógicas tal que su conjunto de valuaciones $\mathcal{V}$ tengan las propiedades que discutimos en la sección anterior, siendo CPL una de estas lógicas. Estas propiedades resultarán claves para poder vincularse con nuestro marco conceptual. Concretamente, nos referimos a que:

- $C(\mathcal{V})$ es cerrado por intersecciones y está en biyección con $\mathcal{K}$;
- $CO(\mathcal{V})$ está en biyección con $\mathcal{K}_f$;
- Si además $\mathcal{V}$ es finito, entonces $C(\mathcal{V}) = O(\mathcal{V}) = \mathcal{P}(\mathcal{V})$;
- Si además $\mathcal{V}$ es *complete*, $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ está en biyección con los elementos de $\mathcal{V}$ y los conjuntos de un elemento están en $C(\mathcal{V})$;
- Si además $\mathcal{V}$ es *topological*, el operador Cl es un operador clausura topológico en $\mathcal{V}$ y $C(\mathcal{V})$ es cerrado por uniones finitas;
- Si además $\mathcal{V}$ es *decomposable*, es posible construir un operador contraction clásico.

Como dijimos al inicio del capítulo, el marco conceptual de mundos interpreta a $\mathcal{I}$ como un conjunto de índices, etiquetas vacías a las que se les puede dar una semántica. A partir de esta sección, identificaremos al conjunto de índices $\mathcal{I}$ con $\mathcal{V}$, por lo que los operadores definidos en el marco conceptual de mundos operarán sobre $\mathcal{P}(\mathcal{V})$.

En el marco de mundos tenemos a los operadores world versatile, a partir de los que se deducen todos los demás operadores. Como siguiente paso a adaptar lo realizado en mundos, debemos dar una conexión entre estos operadores y los de una lógica $\mathcal{L}$. Para ello, definimos a los operadores de cambio en $\mathcal{L}$ basados en mundos.

Definición 7.2.1. Dada $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ un lógica tarskiana, decimos que un operador de cambio $\bullet : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ está *basado en mundos* si existe un operador world $\bullet_w : \mathcal{P}(\mathcal{V}) \times \mathcal{P}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V})$ tal que para todo $K, M \in \mathcal{K}$:

$$\|K \bullet M\| = \|K\| \bullet_w \|M\|$$

Además, un operador de cambio $\bullet$ está *débilmente basado en mundos* si satisface que:

$$\|K \bullet M\| = Cl(\|K\| \bullet_w \|M\|)$$

En este contexto, equivalentemente se puede decir que $\bullet$ está (débilmente) basado en $\bullet_w$.

Paralelamente, diremos que un operador world $\bullet_w : \mathcal{P}(\mathcal{V}) \times \mathcal{P}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V})$ es *cerrado* si cumple que si $A, B \in C(\mathcal{V})$ entonces $A \bullet_w B \in C(\mathcal{V})$.

De esta manera, todo operador presentado en mundos define un operador de cambio múltiple sobre teorías de una lógica tarskiana. Que $\bullet$ esté basado en $\bullet_w$ significa que es posible transcribir un operador en el otro, a partir de las funciones $\|\cdot\|$ y $\mathcal{T}$, cuando se lo restringe a $\mathcal{K}$ y $C(\mathcal{V})$. Esto no es necesariamente válido si $\bullet$ está débilmente basado en $\bullet_w$: sólo se puede transcribir que $K \bullet M = \mathcal{T}(\|K\| \bullet_w \|M\|)$, pues $K \bullet M \in \mathcal{K}$ por definición.

Si $\mathcal{L}$ es tarskiana, se deduce de la Proposición 7.1.5 que el operador expansion en $\mathcal{K}$ está basada en la intersección de $C(\mathcal{V})$, pues dado $K, M \in \mathcal{K}$:

$$\|K + M\| = \|Cn(K \cup M)\| = \|K \cup M\| = \|K\| \cap \|M\|$$

Por lo que es posible transcribir todos los postulados que tenemos para los operadores world a operadores basados en mundos que involucren intersecciones e inclusiones, reemplazando la intersección por el operador expansion. Nos referimos concretamente a todos excepto conjunctive factoring (**W-5**) porque utiliza la unión finita en uno de sus casos, algunos postulados de tipo cuestionable y los de tipo pointwise porque utilizan conjuntos de un elemento y uniones arbitrarias. Es decir:

- la mayoría de los postulados del Capítulo 3: los postulados básicos de world contraction (**W-1**)~(**W-4**), todos los de world revision (**W*1**)~(**W*5**) y los postulados no pointwise asociados a erase ((**W**♦**3**)~(**W**♦**4**)) y update ((**W**♦**3**)~(**W**♦**6**));
- los postulados credible del Capítulo 4, es decir, (**W**⊖**1**)~(**W**⊖**4**) y (**W**⊙**1**)~(**W**⊙**4**);
- todos los postulados del Capítulo 5 y la mayoría del Capítulo 6: los que hablan de las relaciones entre credible y cuestionable (**Rel1**)~(**Rel5**), los postulados cuestionable monotony (**WQ**⊙**1**), (**WQ**⊙**2**) y (**WQ**⊙**5**), y los postulados clásicos y suplementarios de world versatile que no sean pointwise ((**W**⊙**3**)~(**W**⊙**6**) y (**WS**⊙**1**)~(**WS**⊙**8**)).

En particular, podemos definir vía postulados a los operadores elementary multiple versatile en cualquier lógica tarskiana.

Definición 7.2.2. Sea $\mathcal{L}$ lógica tarskiana. Dados $K, M \in \mathcal{K}$ se considera el postulado para el operador $\odot : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$:

(**M**⊙**1**) $K \cap M \subseteq K \odot M$ (multiple shared success).

Un operador $\odot$ que satisface (**M**⊙**1**) y package revision inclusion (**PM*****2**) se conoce como elementary (*multiple*) versatile.

Pero poder transcribir los postulados no implica que los operadores existan. Así sucede en Flouris et al. [8], donde se transcriben los postulados de los operadores contraction para cualquier lógica tarskiana, pero se necesita que la lógica sea AGM-compliant para que existan tales operadores. Una verdadera implementación del marco conceptual de mundos radica en probar que es posible la construcción de los operadores. Una manera de hacer esto

es probando que los operadores de cambio definidos en una lógica son basados en mundos, para luego ver que tal operador existe en mundos.

Probaremos entonces que existen operadores $*$ y $-$ basados en elementary world revision $*_w$ y contraction $-_w$ respectivamente en cualquier lógica tarskiana. Para ello, utilizaremos los postulados que se dieron en la Sección 2.6. Se omitirán los postulados asociados a los principios de clausura y extensionalidad pues están implícitos al trabajar sobre $\mathcal{K}$.

Definición 7.2.3. Sea $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ una lógica tarskiana. Llamaremos *elementary package revision* al operador de cambio $*$: $\mathcal{K} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ que satisface package revision inclusion **(PM*2)** y package success **(PM*4)**. Al operador de cambio $-$: $\mathcal{K} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ que satisface múltiple contraction inclusion **(M-2)** y multiple contraction recovery **(M-4)** se conoce como *elementary multiple contraction*.

La existencia de estos operadores definidos vía postulados está asegurada, pues el operador expansion $+$ es un elementary package revision y el operador que no modifica el conjunto de creencias es un elementary multiple contraction. Por lo que los siguientes teoremas debe entenderse como de existencia de una conexión entre el marco conceptual de mundos y el de lógicas tarskianas.

Teorema 7.2.4. Sean $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ una lógica tarskiana y $-$, $*$ operadores de cambio en $\mathcal{K}$.

1. $*$ es un operador elementary package revision, i.e. que satisface **(PM*2)** y **(PM*4)**, si y sólo si está basado en un operador elementary world revision.
2. $-$ es un operador elementary multiple contraction, i.e. que satisface **(M-2)** y **(M-4)**, si y sólo si está basado en un operador elementary world contraction.

Demostración en la página 133, al final del capítulo.

El caso de los operadores elementary versatile es diferente. Como sabemos, la construcción de un operador elementary world versatile se deduce de la unión de dos operadores elementary world revision o bien de dos operadores world contraction. Para adaptar esto al contexto de lógicas, evitaremos considerar una noción de complemento sobre teorías, eso lo dejaremos para cuando comparemos esta propuesta con los marcos conceptuales clásicos en la Sección 7.4. Es por eso que utilizaremos la construcción vía operadores elementary revision, ya que no es necesario utilizar la noción de complemento, aunque sí tenemos una situación pendiente respecto a la unión de dos conjuntos cerrados de $\mathcal{V}$. Por la Proposición 7.1.5, sabemos que la intersección en $\mathcal{K}$ está débilmente basada en la unión de $C(\mathcal{V})$:

$$\|K \cap M\| = Cl(\|K\| \cup \|M\|)$$

Pero por el Teorema 7.1.9, sabemos que basta que $\mathcal{V}$ sea topological para que la intersección en $\mathcal{K}$ esté basada en la unión de $C(\mathcal{V})$.

A partir de esto se puede deducir que los operadores elementary versatile definidos como la intersección de dos operadores revision serán débilmente basados en mundos en cualquier lógica tarskiana. Sin embargo, para tener la equivalencia entre postulados, construcción por intersección de operadores revision y construcción basados en mundos, es necesario trabajar con lógicas tarskianas tales que $\mathcal{V}$ sea topological.

Teorema 7.2.5. Sean $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ una lógica tarskiana tal que $\mathcal{V}$ es topological y sea $\odot$ un operador de cambio sobre $\mathcal{K}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\odot$ es un operador versatile, i.e. que satisface **(M $\odot$ 1)** y **(PM*2)**;
2. existen $*$ y $*'$ operadores elementary package revision tales que para todo $K, M \in \mathcal{K}$:

$$K \odot M = (K * M) \cap (M *' K)$$

3. $\odot$ está basado en un operador elementary world versatile.

Demostración en la página 134, al final del capítulo.

Sabiendo que es posible transcribir la gran mayoría de los postulados y habiendo realizado las construcciones de los principales operadores, podemos afirmar que es factible llevar lo desarrollado para operadores world versatile a lógicas tarskianas. Pero como sucedió en [8], a medida que se piden nuevas propiedades, la cantidad de lógicas compatibles se van reduciendo, para evitar tener operadores triviales o definiciones vacuas. Por ejemplo, para tener operadores versatile con un comportamiento similar al de mundos, necesitamos que $\mathcal{V}$ sea topological. Si queremos poder representar en términos de teorías a los elementos de $\mathcal{V}$, necesitaremos que $\mathcal{V}$ sea complete. O bien, si queremos tener operadores contraction clásicos, debemos pedir que $\mathcal{V}$ sea decomposable. En la siguiente sección, veremos que es posible adaptar los operadores world a lógicas tarskianas que satisfagan estas propiedades, no sólo a vía postulados sino también dando una construcción basada en funciones world-selection.

7.3 Cambio Múltiple sobre Teorías à la Mundos

Como se aclaró anteriormente, lo hecho en la sección anterior debe entenderse como una conexión entre el marco conceptual de mundos y el de lógicas tarskianas. Esto significa que los operadores que se definen, incluso desde lo constructivo, pueden ser triviales. Un siguiente paso sería entonces identificar qué es lo que se está pidiendo al trabajar con operadores basados en mundos. En este sentido, una condición necesaria que se deduce de la Definición 7.2.1 es que si un operador $\bullet$ está basado en $\bullet_w$, entonces $\bullet_w$ debe ser cerrado. Esto ya lo sabíamos para el operador expansion y la intersección de teorías (si $\mathcal{V}$ es topological). Veamos cómo afecta esto en general a las funciones world-selection al trabajar con operadores elementary world versatile y world dual versatile.

Teorema 7.3.1. *Sea $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ una lógica tarskiana y sean $\odot$ y $\odot_w$ operadores de cambio basados en un operador elementary world versatile $\odot_w$ y dual versatile $\odot_w$ respectivamente. Entonces, $\odot_w$ y $\odot_w$ son cerrados. Además, si $\odot_w$ se define con el par (σ, ρ) de funciones world-selection y $\odot_w$ con (σ', ρ') , entonces dados $A, B \in C(\mathcal{V})$:*

- $(A \cap B) \cup \sigma(A, B^c) \in C(\mathcal{V})$ y $\sigma(A, B^c) = Cl(\sigma(A, B^c)) \cap A^c$;
- $(A \cap B) \cup \rho(B, A^c) \in C(\mathcal{V})$ y $\rho(B, A^c) = Cl(\rho(B, A^c)) \cap B^c$;
- $\sigma'(A, B) = Cl(\sigma'(A, B)) \cap A^c$;
- $(A \cap B^c) \cup \rho'(B^c, A^c)$ y $\rho'(B^c, A^c) \in C(\mathcal{V})$;

Demostración en la página 134, al final del capítulo.

En el resultado anterior se ve que sólo un cierto tipo de funciones world-selection serán relevantes en la adaptación a lógicas. En principio, las cuatro funciones world-selection deben satisfacer que $\sigma(A, B) = Cl(\sigma(A, B)) \cap A^c$ si $B \in C(\mathcal{V})$ para algunos casos o $B \in O(\mathcal{V})$ para otros. Esto limita los conjuntos que la función toma para ser compatible con su clausura.

Analicemos esto con un poco más de detalle. Por definición, sabemos que $\sigma(A, B) \subseteq A^c \cap B^c$. Pero al aplicar Cl puede que en $Cl(\sigma(A, B))$ haya otros elementos además de los seleccionados por $\sigma(A, B)$, que pueden ser de A o bien de A^c . La propiedad $\sigma(A, B) = Cl(\sigma(A, B)) \cap A^c$ fuerza a que todo elemento de A^c que está en $Cl(\sigma(A, B))$, ya haya sido previamente seleccionado por $\sigma(A, B)$. Tomemos como ejemplo los valores extremos de σ : si $\sigma(A, B) = \emptyset$, se satisface la propiedad pues $\emptyset \in C(\mathcal{I})$. Por otro lado, si $B^c \in C(\mathcal{V})$, entonces $Cl(A^c \cap B^c) \subseteq B^c$. Así que, si $B \in O(\mathcal{V})$, entonces $\sigma(A, B) = A^c \cap B^c$ también satisface la propiedad. La condición no afecta los casos extremos, es decir, cuando $\sigma(A, B) = \emptyset$, ya

que $\emptyset \in C(\mathcal{I})$, o bien $\sigma(A, B) = A^c \cap B^c$, pues todos los mundos de A^c a agregar ya fueron agregados. Aún así, esta condición falla al indicar cuán problemático es que $Cl(\sigma(A, B))$ ó $Cl(\sigma(A, B^c))$ tenga mundos de A , por lo que no son suficiente para caracterizar el tipo de funciones world-selection que buscamos en el caso de que trabajemos en una lógica tarskiana arbitraria.

Otra condición para las funciones σ y ρ que aparece en el Teorema 7.3.1 es que sus operadores elementary world revision asociados sean cerrados. En particular, de esta condición se puede deducir la anterior. Si a esto agregamos que $\mathcal{V}$ sea topological podemos recuperar que $\odot_w$ sea cerrado, quedando así que las tres condiciones son equivalentes.

Corolario 7.3.2. *Sea $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ una lógica tarskiana tal que $\mathcal{V}$ es topological, y sea $\odot_w$ operador elementary world versatile definido con el par (σ, ρ) sobre $\mathcal{P}(\mathcal{V})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\odot_w$ es cerrado;
2. $\sigma(A, B^c) = Cl(\sigma(A, B^c)) \cap A^c$ y $\rho(B, A^c) = Cl(\rho(B, A^c)) \cap B^c$ para todo $A, B \in C(\mathcal{V})$.
3. los operadores elementary world revision asociados $\odot_w$ son cerrados;

Demostración en la página 135, al final del capítulo.

Un resultado similar puede darse para los operadores elementary world contraction.

Corolario 7.3.3. *Sea $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ una lógica tarskiana tal que $\mathcal{V}$ es topological, y sea $-_w$ operador elementary world contraction definido con la función world-selection σ sobre $\mathcal{P}(\mathcal{V})$. Entonces $-_w$ es cerrado si y sólo si $\sigma(A, B) = Cl(\sigma(A, B)) \cap A^c$ para todo $A, B \in C(\mathcal{V})$.*

Demostración en la página 135, al final del capítulo.

Es decir que, si $\mathcal{V}$ es topological, es posible caracterizar a las funciones world-selection con las que estaremos trabajando.

Definición 7.3.4. Sea $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ una lógica tarskiana tal que $\mathcal{V}$ es topological y sea σ una función world-selection en $\mathcal{P}(\mathcal{V})$. Decimos que σ es **V-compliant** si cumple que $\sigma(A, B^c) = Cl(\sigma(A, B^c)) \cap A^c$ cuando $A \in C(\mathcal{V})$.

La definición anterior considera una propiedad más fuerte que la que se deduce del Teorema 7.3.1, ya que lo pedimos para cualquier conjunto B . Aunque usualmente trabajaremos con un subconjunto de $\mathcal{P}(\mathcal{V})$, como $C(\mathcal{V})$, $O(\mathcal{V})$ o bien $C(\mathcal{V}) \cup O(\mathcal{V})$.

Como se puede apreciar, cuando $\mathcal{V}$ es topological es posible ordenar gran parte de la teoría de operadores de mundos para poder plantearla sobre una lógica. Si bien es cierto que en cualquier lógica tarskiana puedan definirse operadores elementary revision o contraction, y por lo tanto operadores versatile, tener una propiedad como topological permite:

- preservar que los operadores elementary world versatile sean representados a partir de operadores revision;
- caracterizar a los operadores world cerrados como aquellos que sus funciones world-selection son V-compliant;
- transcribir el postulado conjunctive factoring (**W-5**).

Además, permite identificar a las funciones world-selection en un rol constructivo clásico.

Corolario 7.3.5. *Sea $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ una lógica tarskiana tal que $\mathcal{V}$ es topological y sean $\odot, *$ y $-$ operadores de cambio sobre $\mathcal{K}$.*

1. $-$ es un operador elementary multiple contraction, i.e. que satisface $(M-2)$ y $(M-4)$, si y sólo si existe una función world-selection σ V-compliant tal que para todo $K, M \in \mathcal{K}$:

$$K - M = K \cap \mathcal{T}(\sigma(\|K\|, \|M\|))$$

2. $*$ es un operador elementary package revision, i.e. que satisface $(PM*2)$ y $(PM*4)$, si y sólo si existe una función world-selection V-compliant tal que para todo $K, M \in \mathcal{K}$:

$$K * M = (K + M) \cap \mathcal{T}(\sigma(\|K\|, \|M\|^c))$$

3. $\odot$ es un operador elementary multiple versatile, i.e. que satisface $(M\odot 1)$ y $(PM*2)$, si y sólo si existen un par de funciones world-selection σ y ρ V-compliant tal que para todo $K, M \in \mathcal{K}$:

$$K \odot M = (K + M) \cap \mathcal{T}(\sigma(\|K\|, \|M\|^c)) \cap \mathcal{T}(\rho(\|M\|, \|K\|^c))$$

Demostración en la página 136, al final del capítulo.

Bajo estas presentaciones, resulta más claro la factibilidad de que la transcripción de los postulados world a lógicas preserva el vínculo que estos postulados tienen con las propiedades de las funciones world-selection. Por ejemplo, propiedades como standard y normal siempre son válidas en este contexto, puesto que siempre es válido el conjunto vacío para una función world-selection. En tal caso, tenemos que $\mathcal{T}(\emptyset) = \mathbb{L}$ el elemento neutro de $\cap$, de la misma manera que $\emptyset$ es el neutro de $\cup$. Por lo tanto, representa el mismo comportamiento que en mundos: no hay cambios a considerar. Lo mismo ocurre con las propiedades de tipo monotony.

La otra propiedad de $\mathcal{V}$ relevante para nosotros es complete, ya que permite identificar a todos los elementos de $\mathcal{V}$ como teorías maximales consistentes. Esto nos será útil para trabajar con los postulados que utilicen conjuntos de un elemento, ya que pueden ser representados como teorías. Además, si $\mathcal{V}$ es topological y complete, se deduce del Teorema 7.1.9 que $\mathcal{V}$ es decomposable.

En [8] se utiliza el conjunto de complement beliefs de la Definición 7.1.8 no sólo para identificar qué lógicas son AGM-compliant sino también para caracterizar los posibles valores de un operador contraction. Inspirados en esta idea, nosotros vamos a caracterizar al conjunto de los posibles valores que una función world-selection puede tomar. Este conjunto lo utilizaremos de referencia para confirmar que si $\mathcal{V}$ es topological y complete entonces tenemos funciones world-selection no triviales según las propiedades que queremos que satisfagan.

Teorema 7.3.6. Sea $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ una lógica tarskiana tal que $\mathcal{V}$ es topological. Para todo $A \in C(\mathcal{V})$ y $B \subseteq \mathcal{V}$ vale que $\Sigma_{(A,B)} = \{S \subseteq B^c \cap A^c \mid A \cup S \in C(\mathcal{V})\}$ es el conjunto de todos los posibles valores de $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ que puede tomar una función world-selection V-compliant al ser evaluada en A y B . Más aún, si $\mathcal{V}$ es además complete, $\Sigma_{(A,B)}$ tiene un elemento no vacío, excepto cuando $B^c \cap A^c = \emptyset$.

Demostración en la página 136, al final del capítulo.

Concluimos entonces que, cuando $\mathcal{V}$ es topological y complete, es posible tener operadores versatile, contraction y revision no triviales cuyas funciones world selection satisfagan propiedades asociadas a los postulados credible (null-monotonic), questionable (imprudent, wise, entanglement), clásicos (standard, normal, semantically successful under consistency, semantically successful) y suplementarios (TR). Cabe destacar sin embargo, que las propiedades de las funciones world-selection estarán enmarcadas únicamente en los conjuntos cerrado en la primera coordenada y abierto en la segunda si hablamos de operadores versatile y en cerrados si nos referimos a operadores dual versatile como contraction.

Definición 7.3.7. Sea $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ una lógica tarskiana tal que $\mathcal{V}$ es topological y σ una función world-selection sobre $\mathcal{P}(\mathcal{V})$. Si P es una posible propiedad de σ (como ser normal, standard, local, etc), diremos que σ :

- satisface la propiedad C- P si σ satisface P para todo conjunto $A \in C(\mathcal{V})$ en la primera coordenada y $B \in O(\mathcal{V})$ en la segunda;
- satisface la propiedad D- P si σ satisface P para todo conjunto $A, B \in C(\mathcal{V})$;
- satisface la propiedad C-D- P si σ satisface C- P y D- P .

Análogamente, si P es un posible postulado de $\bullet_w$ un operador world, diremos que $\bullet_w$:

- satisface la propiedad C- P si $\bullet_w$ satisface P para todo conjunto $A \in C(\mathcal{V})$ en la primera coordenada y $B \in O(\mathcal{V})$ en la segunda;
- satisface la propiedad D- P si $\bullet_w$ satisface P para todo conjunto $A, B \in C(\mathcal{V})$;
- satisface la propiedad C-D- P si $\bullet_w$ satisface C- P y D- P .

De esta manera, evitaremos trabajar con el operador complemento, sabiendo además que $C(\mathcal{V})$ es cerrado por intersecciones y uniones finitas pues $\mathcal{V}$ es topological.

A modo de ejemplo, presentaremos varios teoremas de representación que extienden operadores conocidos para el caso múltiple sobre teorías. Comenzamos con los asociados a contraction, pues los de revision fueron generalizados para operadores versatile.

Teorema 7.3.8. Sea $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ una lógica tarskiana tal que $\mathcal{V}$ es topological y complete, un operador $-$ que satisface (M-2) y (M-4) y σ su función world-selection asociada. Entonces:

1. σ es D-standard si y sólo si $-$ satisface:

(CM-9) Si $K + M = \mathbb{L}$ y $K \neq \mathbb{L}$ entonces $K - M = K$ (choice weak vacuity).

2. σ es D-normal si y sólo si $-$ satisface (CM-5).

3. σ es D-semantically successful si y sólo si $-$ satisface (CM-6).

4. σ es D-semantically successful under consistency si y sólo si $-$ satisface:

(CM-10) Si $K \neq \mathbb{L}$ y $M \neq Cn(\emptyset)$ entonces $M \not\subseteq K - M$ (choice weak success).

5. σ es D-trichotomic si y sólo si $-$ satisface:

$$(M-11) \quad K - (M + N) = \begin{cases} K - M \\ K - N \\ (K - M) \cap (K - N) \end{cases} \quad (\text{multiple conjunctive factoring}).$$

Demostración en la página 136, al final del capítulo.

En el teorema anterior, cabe aclarar que únicamente utilizamos que $\mathcal{V}$ es complete en el caso de que σ es D-semantically successful y D-semantically successful under consistency, aunque podríamos haber usado que $\mathcal{V}$ sea decomposable. El uso de que $\mathcal{V}$ es complete se verá justificado cuando trabajemos con las demás propiedades. Para ello, incluiremos también a las relaciones credible y questionable, que estarán definidas sobre teorías. Dado que no podemos utilizar el operador complemento en teorías, debemos definir además la relación retractable para los operadores shielded contraction.

Definición 7.3.9. Sean $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ una lógica tarskiana, $\prec$ una relación credible y $\succ$ una relación questionable, ambas definidas en $\mathcal{P}(\mathcal{V})$. Definimos las relaciones $\prec$, $\prec^c$ y $\succ$ en $\mathcal{K}$ de la siguiente manera:

- $K \prec M$ si y sólo $\|K\| \prec \|M\|$, a tal relación la llamaremos *credible*.
- $K \prec^c M$ si y sólo $\|K\| \prec \|M\|^c$, a tal relación la llamaremos *retractable*.
- $K \succ M$ si y sólo $\|K\| \succ \|M\|$, a tal relación la llamaremos *questionable*.

Ahora sí, veamos que lo analizado en el Capítulo 4 es replicable para lógicas donde $\mathcal{V}$ es topological y complete.

Teorema 7.3.10. *Sea $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ una lógica tarskiana tal que $\mathcal{V}$ es topological y complete, y sea $\ominus$ un operador de cambio sobre $\mathcal{K}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- $\ominus$ *satisface (M-2) y (M-4);*
- *existe una relación retractable de teorías $\prec^c$ y un operador $-$ elementary contraction que además satisface (CM-10) tal que para todo $K, M \in \mathcal{K}$:*

$$K \ominus M = \begin{cases} K - M & K \prec^c M \\ K & \text{caso contrario} \end{cases}$$

En tal caso, se puede caracterizar $\prec^c$ a partir del operador $\ominus$ como:

$$K \prec^c M \quad \text{si y sólo si} \quad K = \mathbb{L} \text{ ó } M \not\subseteq K \ominus M$$

Además, si $\ominus$ está basado en $\ominus_w$ un operador elementary world contraction:

1. $\ominus_w$ *satisface D-(W-1) si y sólo si $\ominus$ satisface:*

(M-1) *Si $M \subseteq K \ominus M$ y $N \subseteq M$, entonces $N \subseteq K \ominus N$ (choice success propagation).*

2. $\ominus_w$ *satisface D-(W-2) si y sólo si $\ominus$ satisface:*

(M-2) *Si $M \subseteq K \ominus M$ y $Cn(\emptyset) \neq M \subseteq N \subseteq K$, entonces $N \subseteq K \ominus N$ (choice success reduction).*

3. $\ominus_w$ *satisface D-(W-3) si y sólo si $\ominus$ satisface:*

(M-3) *Si $K \neq \mathbb{L}$ entonces existe un conjunto $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ tal que $M \not\subseteq K - M$ si y sólo si $M \not\subseteq T$ para algún $T \in \mathcal{C}$ (choice core success).*

4. $\ominus_w$ *satisface D-(W-4) si y sólo si $\ominus$ satisface:*

(M-4) *Si $K \neq \mathbb{L}$ entonces existe un conjunto $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ tal que $M \not\subseteq K - M$ si y sólo si $M \not\subseteq K$ o bien $Cn(\emptyset) \neq M \subseteq T$ para todo $T \in \mathcal{C}$ (choice frame success).*

Demostración en la página 137, al final del capítulo.

La situación de los operadores de tipo local requiere algo más formal debido a que se está trabajando con uniones infinitas.

Teorema 7.3.11. *Sea $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ una lógica tarskiana tal que $\mathcal{V}$ es complete. El operador de cambio sobre $\mathcal{K}$ notado como $\diamond$ está débilmente basado en $\diamond_w$ world update, i.e. que satisface (W*1), (W*2), (W-4) y (WL1) si y sólo si $\diamond$ es un operador elementary package revision que además satisface:*

(4) *Si $M \subseteq K \neq \mathbb{L}$ entonces $K \diamond M = K$ (package weak vacuity).*

(L1) $K \diamond M = \bigcap_{K \subseteq T \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}} T \diamond M$ (multiple local condition).

Demostración en la página 138, al final del capítulo.

Como se puede ver, siempre que $\mathcal{V}$ sea topological y complete, será posible replicar el (gran) árbol de familias de operadores world versatile tal y como sucede en el Capítulo 6. Esto significa que bajo estas condiciones es posible:

- transcribir todos los postulados de mundos a lógicas para definir operadores múltiples sobre teorías basados en mundos;
- construir mediante funciones world-selection a los operadores múltiple elementales definidos vía estos postulados;
- preservar la correlación entre propiedades de funciones world-selection y postulados que conocemos del marco conceptual de mundos.

Este último punto queda ejemplificado en los Teoremas 7.3.10 y 7.3.11. Pero exponer cada uno de estos teoremas de representación excede el alcance de esta tesis. Nos limitaremos a representar aquellos operadores del Capítulo 2 en el marco de los operadores basados en mundos sobre lógicas tales que $\mathcal{V}$ es topological y complete en la siguiente sección.

7.4 Representación de Marcos Conceptuales Clásicos en el Marco de Mundos

En esta última sección identificaremos ideas, postulados y construcciones que nos permitan acercar la propuesta de cambio múltiple sobre teorías a la mundos a las diferentes propuestas clásicas presentadas en el Capítulo 2. Una de las primeras cuestiones tiene que ver con los principios de clausura y extensionalidad. Los operadores de cambio de la sección anterior están definidos como operadores de cambio múltiple pero restringidos a teorías. Por lo que esos principios estén integrados a la definición, sin necesidad de pedirlos vía postulados.

Proposición 7.4.1. *Sea $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ una lógica tarskiana y sea $*$: $\mathcal{P}(\mathbb{L}) \times \mathcal{P}(\mathbb{L}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{L})$ un operador de cambio. Entonces $*$ satisface **(PM*1)**, **(PM*8)** y:*

(M*12) *Si $Cn(K) = Cn(K')$ entonces $K * M = K' * M$ (knowledge extensionality)*

*si y sólo si existe un operador de cambio sobre teorías $\odot : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ tal que $K * M = Cn(K) \odot Cn(M)$ para todo $K, M \subseteq \mathbb{L}$.*

Demostración en la página 138, al final del capítulo.

De esta forma, toda la sección anterior se puede aplicar a aquellos operadores de cambio en $\mathcal{P}(\mathbb{L})$ que satisfagan **(PM*1)**, **(PM*8)** y **(M*12)**. Esto nos acerca a varios operadores de cambio múltiple definidos en el Capítulo 2. Como estos operadores están definidos como $\bullet : \mathcal{K} \times \mathcal{P}(\mathbb{L}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{L})$, no es necesario pedir **(M*12)**.

El más cercano a nuestra propuesta por su generalidad es el tarskian choice contraction de la Definición 2.6.5, surgido de [8]. En este caso, nuestros operadores coinciden en el sentido de la Proposición 7.4.1 con aquellos operadores que satisfacen **(M-1)**, **(M-2)**, **(M-4)** y **(CM-7)**. Si además pedimos que σ sea D-normal, tenemos **(CM-5)**, y **(CM-6)** es válido si además σ es D-semantically successful. Para entender el vínculo desde lo constructivo, conectaremos las funciones world-selection y la construcción que se deduce de la Definición 7.1.8, los conjuntos complement belief.

Teorema 7.4.2. *Sean $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ una lógica tarskiana y $K \in \mathcal{K}$, $M \subseteq \mathbb{L}$ tal que $M \subseteq K$. Si $\Sigma_{(\|K\|, \|M\|)} = \{S \subseteq \|M\|^c \cap \|K\|^c \mid \|K\| \cup S \in C(\mathcal{V})\}$, existe una biyección $\Psi_{(K,M)} : \Sigma_{(K,M)} \rightarrow (\mathcal{K} \cap M^-(K)) \cup \{K\}$ tal que $\Psi_{(K,M)}(S) = \mathcal{T}(\|K\| \cup S)$ y $\Psi_{(K,M)}^{-1}(X) = \|X\| \cap \|K\|^c$.*

Demostración en la página 139, al final del capítulo.

En [8], se ve que cada elemento de $\mathcal{K} \cap M^-(K)$, las teorías complement belief, es un posible resultado de contraer K por M . Por lo que el Teorema 7.4.2 afirma que los elementos de $\Sigma_{(K,M)}$ son los posibles conjuntos no vacíos que una función world-selection $\sigma(\|K\|, \|M\|)$ puede devolver para construir un operador contraction sobre $\mathcal{L}$ cuando $K \subseteq M$. Así, lo propuesto en la Definición 7.1.8 puede reproducirse en términos de funciones world-selection. Si además consideramos que σ es normal, nos queda que si $K \not\subseteq M$ entonces $\sigma(\|K\|, \|M\|) = \emptyset$. Esto equivale a pedir que el operador contraction satisfaga choice contraction vacuity.

Corolario 7.4.3. *Sea $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ una lógica tarskiana. Un operador $- : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ satisface (M-2), (M-4) y (CM-5) si y sólo si $-$ es un operador basado en $-_w$ un operador cerrado que satisface (W-1), (W-2) y (W-4). En tal caso, si $M \subseteq K$ vale que $K - M \in (\mathcal{K} \cap M^-(K)) \cup \{K\}$ y $\sigma(\|K\|, \|M\|) \in \Sigma_{(K,M)}$.*

La biyección también afirma qué sucede en caso de que $M^-(K) = \emptyset$: la única opción para las funciones world-selection es el conjunto vacío. El siguiente ejemplo ilustra la comparación entre las diferentes propuestas.

Ejemplo 7.1 (Basado en un ejemplo de Flouris et al. [8]). Sea $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, Cn \rangle$ una lógica tal que $\mathbb{L} = \{x, y, z\}$ y Cn definida como:

$$\begin{array}{ll} Cn(\emptyset) &= \emptyset & Cn(\{z\}) &= \{x, y, z\} \\ Cn(\{x\}) &= \{x\} & Cn(\{x, z\}) &= \{x, y, z\} \\ Cn(\{y\}) &= \{y\} & Cn(\{y, z\}) &= \{x, y, z\} \\ Cn(\{x, y\}) &= \{x, y\} & Cn(\{x, y, z\}) &= \{x, y, z\} \end{array}$$

Notando $v_N : \mathbb{L} \rightarrow \{0, 1\}$ a la valuación tal que $v(\nu) = 1$ para todo $\nu \in N$, se propone $\mathcal{V} = \{v_{\{x\}}, v_{\{y\}}, v_{\{x, y\}}\}$ para representar a $\mathcal{L}$. Resulta entonces que:

$$\mathcal{K} = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\} \quad C(\mathcal{V}) = \{\mathcal{V}, \{v_{\{x\}}, v_{\{x, y\}}\}, \{v_{\{y\}}, v_{\{x, y\}}\}, v_{\{x, y\}}, \emptyset\}$$

Si buscamos realizar $\{x, y, z\} - \{x\}$, suponiendo que se satisface multiple contraction inclusion y (M-2) y recovery (M-4), tenemos una única opción: $\{x, y, z\}$. Pues cualquier otro $K' \in \mathcal{K}$ cumple que $K' + \{x\} \subseteq \{x, y\}$. Por lo que si además pedimos que $-$ satisfaga choice contraction success (CM-6), llegaremos a que $-$ no es construible.

Veamos esto desde la perspectiva de mundos. Analicemos qué opciones tenemos para $A -_w B$, cuando satisface world inclusion (W-1) y world recovery (W-2). Tenemos que $A = \|\{x, y, z\}\| = \emptyset$ y $B = \|\{x\}\| = \{v_{\{x\}}, v_{\{x, y\}}\}$. Por la construcción de $-_w$, sabemos que $A -_w B$ es un subconjunto de $A^c \cap B^c$: $\emptyset$ o bien $\{v_{\{y\}}\}$. Pero además necesitamos que $A \cup \sigma(A, B) \in C(\mathcal{V})$, por lo que la única opción es $\emptyset$, ya que $A \cup \{v_{\{y\}}\} = \{v_{\{y\}}\} \notin C(\mathcal{V})$.

A partir del Teorema 7.4.2 y el Ejemplo 7.1 podemos hacer una comparación más precisa de lo que se habla en Flouris et al. [8] y nuestra propuesta. Por un lado, podemos ver que la incompatibilidad del postulado recovery se da al considerar este postulado simultáneamente con el de success. Nosotros antepusimos el postulado de recovery por el de success para poder trabajar con funciones world-selection en contextos no-priorizados. Al pasar a lógicas, esto nos dio la posibilidad de analizar casos que en Flouris et al. [8] no se consideran. Por otro lado, la construcción mediante conjuntos complement belief se da únicamente en el contexto de que $M \subseteq K$, por lo que también está en juego el postulado vacuity. Es decir que solamente es posible comparar las propuestas en el contexto de funciones world-selection normal y semantically successful.

Continuando con las comparaciones, desde la definición vía postulados podemos ver que, si $\mathcal{L}$ es una lógica CPL, nuestro operador contraction parece ser una versión más fuerte de choice multiple contraction, ya que en particular satisface finite recovery (M-3). Mientras

que nuestro operador no es del todo comparable con `package contraction` puesto que estos operadores no satisfacen extensionality (**CM-7**) sino en una versión más débil llamada uniformity (**PM*5**). Por lo que en ambos casos la identificación entre operadores aún sigue pendiente. Trabajaremos entonces desde lo constructivo para ver que los operadores de cambio múltiple a la mundos efectivamente cubren a los operadores del Capítulo 2.

En el Capítulo 3 dijimos que las funciones world-selection están inspiradas por la combinación entre la selection function γ de los operadores clásicos y el Teorema de Biyección de Grove (Teorema 2.3.6) de la Sección 2.3, donde vincula remainders con mundos posibles. Veamos que este vínculo, originalmente dado en lógicas CPL, ya es válido cuando $\mathcal{V}$ es topological y complete. Comenzamos con un lema que confirma que algunos comportamientos clásicos de las teorías maximales consistentes ya se satisfacen para cuando $\mathcal{V}$ es topological.

Lema 7.4.4. *Sea $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ una lógica tarskiana tal que $\mathcal{V}$ es topological. Consideramos $K \in \mathcal{K}$ y $T, T' \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ tal que $K \not\subseteq T$ y $K \not\subseteq T'$.*

1. Si $\alpha \in K \setminus T$ entonces $Cn((K \cap T) \cup \{\alpha\}) = K$.
2. Si $K \cap T' \subseteq K \cap T$ entonces $K \cap T' = K \cap T$.
3. Si $T \neq T'$ entonces $K \cap T \neq K \cap T'$.

Demostración en la página 139, al final del capítulo.

Además, necesitamos un resultado de órdenes parciales. Este lema lo usaremos para vincular conjuntos de conjuntos maximales, siendo el orden parcial la inclusión.

Lema 7.4.5. *Sea $(X, \leq)$ un conjunto con un orden parcial y sean $Y, Z \subseteq \mathcal{P}(X)$:*

1. Si $Z \subseteq Y$ y $\emptyset \neq \max(Y) \subseteq Z$ entonces $\emptyset \neq \max(Z)$ y $\max(Y) = \max(Z)$.
2. Si $Z \subseteq Y$ y $\emptyset \neq \min(Y) \subseteq Z$ entonces $\emptyset \neq \min(Z)$ y $\min(Y) = \min(Z)$.

Siendo $\max$ y $\min$ las funciones que devuelven el conjunto de elementos maximales y minimales respectivamente de un conjunto parcialmente ordenado.

Demostración en la página 139, al final del capítulo.

Sólo nos queda caracterizar al conjunto de choice remainders de la Definición 2.6.3 cuando $\mathcal{V}$ es complete.

Teorema 7.4.6. *Sea $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ una lógica tarskiana tal que $\mathcal{V}$ es complete. Entonces, para todo $K \in \mathcal{K}$ y $M \subseteq \mathbb{L}$ se tiene que $K \perp_c M \subseteq \mathcal{K}$ y:*

$$K \perp_c M = \max\{K \cap T \mid T \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, M \not\subseteq T\}$$

Demostración en la página 140, al final del capítulo.

El Teorema 7.4.6 remarca el hecho de que cada remainder se obtiene a partir de un conjunto maximal consistente que no incluye a M cuando $\mathcal{V}$ es complete. En términos de valuaciones, esto significa que los remainders están asociados a los mundos $v \in \|M\|^c$, por lo que la construcción de remainders implícitamente trabaja con el operador complemento. Tal comportamiento se asemeja al que conocemos de las funciones world-selection y simultáneamente nos da una versión general de la biyección de Grove (Teorema 2.3.6).

Corolario 7.4.7. *Sea $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ una lógica tarskiana tal que $\mathcal{V}$ es topological y complete. Si $M \subseteq K$ entonces existe una biyección entre $\|M\|^c$ y $K \perp_c M$ donde todo $v \in \|M\|^c$ se asocia a un único $X \in K \perp_c M$ tal que $X = K \cap T_v$.*

Demostración en la página 140, al final del capítulo.

Estos resultados son además reproducibles si en vez de trabajar con el conjunto de choice remainders lo hacemos con el de package openings de la Definición 2.6.7.

Teorema 7.4.8. *Sea $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ una lógica tarskiana tal que $\mathcal{V}$ es complete. Entonces, para todo $K \in \mathcal{K}$ y $N \subseteq \mathbb{L}$ se tiene que:*

$$K \downarrow_p N = \max\{K \cap T \mid T \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, N \subseteq T\}$$

Más aún, si $\mathcal{V}$ es topological y $K + N = \mathbb{L}$, entonces existe una biyección entre $\|N\|$ y $K \downarrow_p N$, donde todo $v \in \|N\|$ se asocia a un único $X \in K \downarrow_p N$ tal que $X = K \cap T_v$.

Demostración en la página 140, al final del capítulo.

Así, podemos deducir que las funciones world-selection V-compliant, normales y semantically successful se comportan como la selección de choice remainders y package openings de los operadores clásicos cuando $\mathcal{V}$ es topological y complete. Solamente necesitamos una función más que nos permita reconstruir la selección de remainders a partir de funciones world-selection.

Definición 7.4.9. Sea $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ una lógica tarskiana tal que $\mathcal{V}$ es topological y complete. Definimos la función $\mathbb{W} : \mathcal{K} \times \mathcal{P}(\mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I})$ donde $\mathbb{W}(K, X) = Cl(\{v \in \mathcal{V} \mid K \cap T_v \in X\}) \cap \|K\|^c$, y la función $\mathbb{R} : \mathcal{K} \times \mathcal{P}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{K})$, donde:

$$\mathbb{R}(K, S) = \begin{cases} \{K \cap T_v \mid v \in S\} & \text{Si } S \neq \emptyset \\ \{K\} & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Notemos que $\mathbb{R}(K, \sigma(\|K\|, \|M\|)) = \mathbb{R}(K, Cl(\sigma(\|K\|, \|M\|)))$ y que si $M \subseteq K$ nos devuelve un conjunto de choice remainders, debido a la biyección del Corolario 7.4.7. Además, por la construcción de $\mathbb{W}$, resulta que $\mathbb{W}(\mathbb{R}(K, \sigma(\|K\|, \|M\|))) = \sigma(\|K\|, \|M\|)$ si σ es V-compliant. Es decir, utilizando $\mathbb{R}$ y $\mathbb{W}$, podemos ver el vínculo entre funciones world-selection y la selección de choice remainders o package openings.

Proposición 7.4.10. *Sea $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ una lógica tarskiana con $\mathcal{V}$ topological y complete.*

1. *Si γ es una función de selección según la Definición 2.2.2, entonces σ definida como:*

$$\sigma(A, B) = \begin{cases} \mathbb{W}(\mathcal{T}(A), \gamma(\mathcal{T}(A), \mathcal{T}(A) \perp_c \mathcal{T}(B))) & \text{Si } B \in C(\mathcal{V}) \\ \emptyset & \text{Si } B \notin C(\mathcal{V}) \text{ y } A \not\subseteq B \\ \{v\} & \text{Si } B \notin C(\mathcal{V}) \text{ y } A \subseteq B \end{cases}$$

con $v \in B^c$ es una función world-selection V-compliant, normal y semantically successful.

2. *Si γ es una función de selección según la Definición 2.2.2, entonces σ definida como:*

$$\sigma(A, B) = \begin{cases} \mathbb{W}(\mathcal{T}(A), \gamma(\mathcal{T}(A), \mathcal{T}(A) \downarrow_p \mathcal{T}(B^c))) & \text{Si } B \in O(\mathcal{V}) \\ \emptyset & \text{Si } B \notin O(\mathcal{V}) \text{ y } A \not\subseteq B \\ \{v\} & \text{Si } B \notin O(\mathcal{V}) \text{ y } A \subseteq B \end{cases}$$

con $v \in B^c$ es una función world-selection V-compliant, normal y semantically successful.

3. *Si σ es una world-selection normal y semantically successful, entonces γ definida como:*

$$\gamma(K, X) = \begin{cases} \mathbb{R}(K, \sigma(\|K\|, \|M\|)) & \text{Si existe } M \mid X = K \perp_c M \\ \mathbb{R}(K, \sigma(\|K\|, \|N\|^c)) & \text{Si existe } N \mid X = K \downarrow_p N \\ X & \text{caso contrario} \end{cases}$$

es una función de selección según la Definición 2.2.2.

En tal caso, nos queda que:

$$\begin{aligned}\|\bigcap \gamma(K, K \perp_c M)\| &= \|K \cap \mathcal{T}(\sigma(\|K\|, \|M\|))\| = \|K\| \cup \sigma(\|K\|, \|M\|) \\ \|\bigcap \gamma(K, K \downarrow_p M)\| &= \|K \cap \mathcal{T}(\sigma(\|K\|, \|M\|^c))\| = \|K\| \cup \sigma(\|K\|, \|M\|^c)\end{aligned}$$

Demostración en la página 141, al final del capítulo.

Concluimos entonces que las construcciones a partir de choice remainders o package openings son reproducibles mediante funciones world-selection. Por lo que los operadores clásicos choice multiple contraction y package multiple revision coinciden con los definidos a través de funciones world-selection normal y semantically successful. Esto nos da además una nueva perspectiva respecto de todos los operadores que aparecieron en el Capítulo 2, excepto por package contraction. Por ejemplo, es posible afirmar ahora que choice relevance equivale a multiple recovery y choice vacuity si se satisfacen los demás postulados básicos, teniendo dos posibles construcciones: vía funciones world-selection o selección de remainders.

Corolario 7.4.11. Sea $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ una lógica CPL y sea $-_c : \mathcal{K} \times \mathcal{P}(\mathbb{L}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{L})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. El operador $-_c$ satisface (M-1), (M-2), (M-4), (CM-5), (CM-6) y (CM-7).
2. Existe una función world-selection V-compliant, D-normal y D-semantically successful tal que $K -_c M = K \cap \mathcal{T}(\sigma(\|K\|, \|M\|))$ para todo $K \in \mathcal{K}$ y $M \subseteq \mathbb{L}$.
3. El operador $-_c$ satisface (M-1), (M-2) y (CM-6)~(CM-8).
4. Existe una función de selección γ tal que $K -_c M = \bigcap \gamma(K \perp_c M)$ para todo $K \in \mathcal{K}$ y $M \subseteq \mathbb{L}$.

Como es de esperarse, el mismo resultado se puede dar para package revision, identificando así Fuhrmann's package revision [10], Zhang's package revision [41] y nuestro basic package revision en el caso de lógicas CPL.

Corolario 7.4.12. Sea $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ una lógica CPL y sea $*_p : \mathcal{K} \times \mathcal{P}(\mathbb{L}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{L})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. El operador $*_p$ satisface (PM*1)~(PM*4) y (PM*7)~(PM*8).
2. Existe una función world-selection V-compliant, C-normal y C-semantically successful tal que $K *_p M = (K + M) \cap \mathcal{T}(\sigma(\|K\|, \|M\|^c))$ para todo $K \in \mathcal{K}$ y $M \subseteq \mathbb{L}$.
3. El operador $*_p$ satisface (PM*1)~(PM*6).
4. Existe una función de selección γ tal que $K *_p M = \bigcap \gamma(K \downarrow_p M) + M$ para todo $K \in \mathcal{K}$ y $M \subseteq \mathbb{L}$.

De la misma manera, trabajar con el operador Peppas' package revision [32] presentado en la Definición 2.6.8, que satisface la versión múltiple de los postulados suplementarios, coincide con tener una función world-selection V-compliant y C-transitive relational. De la Definición 2.6.10 de sistemas de esferas para el caso múltiple, podemos notar que las propiedades extras consideradas proponen que el sistema sea bien fundado y de que $\|M\| \cap A_M \in C(\mathcal{V})$, siendo A_M el primer elemento del sistema de esferas que tiene intersección no nula con $\|M\|$. Esto último se corresponde con que el operador en mundos sea cerrado, o equivalentemente, que la función world-selection sea V-compliant.

Corolario 7.4.13. Sea $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ una lógica CPL y sea $*_p : \mathcal{K} \times \mathcal{P}(\mathbb{L}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{L})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. El operador $*_p$ satisface (PM*1)~(PM*4) y (PM*7)~(PM*9).

2. Existe una función world-selection V -compliant y C -transitive relational tal que $K *_p M = (K + M) \cap \mathcal{T}(\sigma(\|K\|, \|M\|^c))$ para todo $K \in \mathcal{K}$ y $M \subseteq \mathbb{L}$.
3. Existe una asignación faithful que a cada $K \in \mathcal{K}$ le asocia un preorden total y bien fundado $\leq_K$ sobre elementos de $\mathcal{V}$ tal que $\|K *_p M\| = \min(\|M\|, \leq_K)$ para todo $K \in \mathcal{K}$ y $M \subseteq \mathbb{L}$.
4. Existe un sistema de esferas S centrado en K bien rankeado tal que $K *_p M = \mathcal{T}(f_S(M))$ para todo $K \in \mathcal{K}$ y $M \subseteq \mathbb{L}$.

Por último, tenemos el operador set contraction, que lo identificaremos con un operador versatile. Concretamente, con el operador basado en un fully doubtful basic world moderated revision: “fully doubtful” pues $\rho(B, A^c) = B^c \cap A$ y “basic world moderated revision” porque σ es normal y semantically successful.

Corolario 7.4.14. Sea $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ una lógica CPL y sea $\odot : \mathcal{K} \times \mathcal{P}(\mathbb{L}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{L})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. El operador $\odot$ satisface $(PM*1)$, $(M\odot 1)$, $(M-2)$, $(SM-3)$ y $(SM-4)$.
2. Existe una función world-selection V -compliant, C -normal y C -semantically successful tal que $K \odot M = K \cap \mathcal{T}(\sigma(\|K\|, \|M\|^c))$ para todo $K \in \mathcal{K}$ y $M \subseteq \mathbb{L}$.
3. Existe una función de selección γ tal que $K -_s M = \bigcap \gamma(K \downarrow_p M)$ para todo $K \in \mathcal{K}$ y $M \subseteq \mathbb{L}$.
4. $\odot$ satisface $(M-1)$, $(M-2)$ y $(SM-3) \sim (SM-6)$.

Recordemos que una de las ideas detrás de definir el operador set contraction era poder tener los Teoremas 2.6.13 y 2.6.15 de Identidades de Levi y Harper. Estos resultados ahora se deducen de forma directa al trabajar con las funciones world-selection. Más aún, ahora podemos analizar un poco más en detalle qué es lo que sucede.

En general, vimos que dado $M \in \mathcal{K}$ no es posible identificar un $N \in \mathcal{K}$ tal que $\|M\|^c = \|N\|$. Esto sucede porque $\|M\|^c \in O(\mathcal{V})$, por lo que la única excepción a estos casos es cuando $\|M\| \in CO(\mathcal{V})$. En este caso, sí es posible identificar un “operador negación” para las teorías que se asocia al operador complemento de $\mathcal{P}(\mathcal{V})$, que lo definiremos como $\neg M = \mathcal{T}(\|M\|^c)$ en $\mathcal{K}_f$, el conjunto de teorías complementadas de la Definición 7.1.4 que está en biyección con $CO(\mathcal{V})$. En general, es en este contexto en donde es posible tener Identidades de Levi y Harper.

Corolario 7.4.15. Sea $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ una lógica tarskiana. Consideramos $*$ un operador basado en $*_w$ un elementary world revision y $-$ un operador basado en $-_w$ un operador elementary world contraction, tales que $*_w$ y $-_w$ se construyen con la misma función world-selection σ . Entonces para todo $K \in \mathcal{K}$ y $M \in \mathcal{K}_f$, notando $\neg M = \mathcal{T}(\|M\|^c)$:

Identidad de Levi: $K * M = (K - \neg M) + M$.

Identidad de Harper: $K - M = (K * \neg M) \cap K$;

Demostración en la página 142, al final del capítulo.

Utilizar elementos de $\mathcal{K}_f$ en la segunda coordenada también permite definir operadores elementary dual versatile, puesto que son aquellos que se construyen a partir de un operador elementary versatile donde en su segunda coordenada se aplica una negación. Más aún, si $\mathcal{V}$ es topological, no es necesario pedir que $\mathcal{V}$ sea decomposable para tener operadores contraction clásicos.

Lema 7.4.16. Sea $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ una lógica tarskiana tal que $\mathcal{V}$ es topological. Si $K \in \mathcal{K}$ y $M \in \mathcal{K}_f$ entonces $M^-(K) \neq \emptyset$.

Demostración en la página 142, al final del capítulo.

Por otro lado, cuando trabajamos en una lógica CPL, el Teorema de Representación de Stone de Álgebras de Boole en [37] afirma que todo elemento de $\mathcal{K}_f$ puede representarse con una única fórmula. Es decir $\mathcal{K}_f = \{Cn(\psi)\}_{\psi \in \mathbb{L}}$. En particular, si $M = Cn(\mu)$ entonces $\neg M = Cn(\neg\mu)$. Por lo tanto, trabajar con operadores cuya segunda coordenada son elementos de $\mathcal{K}_f$ coincide con hacerlo con los operadores AGM clásicos.

Proposición 7.4.17. *Sean $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ una lógica CPL y $*$: $\mathcal{K} \times \mathbb{L} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{L})$ un operador de cambio. Entonces $*$ satisface (AGM*1) y (AGM*5) si y sólo si existe un operador de cambio $\odot$: $\mathcal{K} \times \mathcal{K}_f \rightarrow \mathcal{K}$ tal que $K * \mu = K \odot Cn(\mu)$ para todo $K \in \mathcal{K}$ y $\mu \in \mathbb{L}$.*

Demostración en la página 143, al final del capítulo.

Así, lo presentado en la sección anterior también resulta ser una extensión de los operadores AGM clásicos. Pero trabajar con conjuntos distintos para cada parámetro no resulta compatible con los operadores versatile, excepto si ρ es polar. En ese caso, los operadores versatile más generales definibles en el marco conceptual clásico son los basados en world filtered revision.

Si se quisiera forzar a trabajar con operadores versatile y preservar la negación, la única opción que tenemos para poder reproducir la teoría es el caso en que $C(\mathcal{V}) = \mathcal{P}(\mathcal{V})$. Esto automáticamente afirma que $\mathcal{V}$ es topological y complete, ya que los conjuntos de un elemento de $\mathcal{V}$ son cerrados y la unión arbitraria de cerrados es cerrada, pues todos los conjuntos son cerrados. En particular, vale que $C(\mathcal{V}) = O(\mathcal{V}) = CO(\mathcal{V})$, por lo que $Cl(\|K\|^c) = \|K\|^c$. De esta manera, podemos afirmar que cualquier operador definido y construido en este tipo de lógicas puede representarse en $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ y viceversa.

Proposición 7.4.18. *Sea $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$ una lógica tarskiana tal que $C(\mathcal{V}) = \mathcal{P}(\mathcal{V})$, entonces $\mathcal{V}$ es topological y complete, todo operador $\bullet$: $\mathcal{K} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ está basado en mundos y $(\mathcal{P}(\mathcal{V}), \cap, \cup, ^c)$ es isomorfo a $(\mathcal{K}, +, \cap, \neg)$.*

Demostración en la página 143, al final del capítulo.

Este es el caso al considerar una lógica CPL finita, como en los trabajos [23], [24] de Katsuno y Mendelzon de la Sección 2.4 y de Promotion [36] de la Sección 2.5. Cuando el conjunto de valuaciones $\mathcal{V}$ que caracteriza a una lógica es finito, genera que $C(\mathcal{V}) = \mathcal{P}(\mathcal{V})$, por lo que cada conjunto de $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ está asociado a una teoría distinta. Además, podemos usar que toda teoría puede representarse con una fórmula de $\mathbb{L}$. Por lo que, en este caso, estos operadores pueden pensarse sobre $\mathbb{L}$, siempre que se satisfaga el principio de extensionalidad.

Corolario 7.4.19. *Sea $\bullet$: $\mathbb{L} \times \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$ un operador de una lógica CPL finita. Entonces $\bullet$ satisface el postulado de extensionalidad (KM*4) si y sólo si $\bullet$ es un operador de cambio de teorías de CPL basado en mundos.*

En particular, tenemos que los operadores complemento, unión e intersección de conjuntos de $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ se identifican con los conectores $\neg$, $\vee$ y $\wedge$ respectivamente. En conclusión, toda la teoría de operadores world versatile, desde los postulados hasta las construcciones, se puede traducir al marco conceptual considerado por Katsuno y Mendelzon y en toda lógica que satisfaga que $C(\mathcal{V}) = \mathcal{P}(\mathcal{V})$.

De esta manera, vimos que los marcos conceptuales y los operadores del Capítulo 2 pueden interpretarse como casos particulares del marco conceptual de mundos cuando se lo aplica a diferentes lógicas o bien restringiendo alguno de sus parámetros.

7.5 Resumen del Capítulo 7

Así como el Capítulo 6 fue la síntesis de las ideas predecesoras, el Capítulo 7 es la concretización de estas ideas. Pero para materializar el marco conceptual de mundos en los diferentes marcos conceptuales de lógicas, debíamos primero construir conexiones entre ambos. Inspirados inicialmente por Grove [17] y Flouris et al [8], y luego por Lindstrom [28] y la reducción de Suszko [3], [38], realizamos conexiones esenciales en cualquier lógica tarskiana. Dado un par $\mathcal{L} = \langle \mathbb{L}, \mathcal{V} \rangle$, donde $\mathbb{L}$ es un lenguaje y $\mathcal{V} \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{L}}$, definimos:

$$\begin{array}{ll} \|\cdot\| : \mathcal{P}(\mathbb{L}) & \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V}) & \mathcal{T} : \mathcal{P}(\mathcal{V}) & \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{L}) \\ M & \longmapsto \{v \in \mathcal{V} \mid M \subseteq v^{-1}(\{1\})\} & A & \longmapsto \bigcap_{v \in A} v^{-1}(\{1\}) \end{array}$$

Estas dos funciones, además de reconstruir la noción clásica de lógicas tarskianas vía $Cn(\cdot) = \mathcal{T}(\|\cdot\|)$, se encargan de transcribir a conjuntos de $\mathbb{L}$ cerrados por consecuencias, i.e. teorías, lo desarrollado en el marco conceptual de mundos, estando $\mathcal{V}$ en el rol de $\mathcal{I}$. Recordemos que en el Capítulo 3 consideramos a $\mathcal{I}$ como un conjunto de índices, a la espera de ser etiquetados, por lo que concretizar el marco conceptual de mundos implica inevitablemente identificar $\mathcal{I}$ con, en este caso, $\mathcal{V}$.

Identificaciones entre Conjuntos y Operadores (caso tarskiano)

Pertenecientes a $\mathcal{P}(\mathbb{L})$	Pertenecientes a $\mathcal{P}(\mathcal{V})$
Consecuencia de $\mathcal{L}$ $Cn(\cdot) = \mathcal{T}(\ \cdot\)$	Clausura de $\mathcal{V}$ $Cl(\cdot) = \ \mathcal{T}(\cdot)\ $
Teorías de $\mathcal{L}$ $\mathcal{K} = \{K \subseteq \mathbb{L} \mid K = Cn(K)\}$	Cerrados de $\mathcal{V}$ $C(\mathcal{V}) = \{A \subseteq \mathcal{V} \mid A = Cl(A)\}$
Expansion sobre $\mathcal{K}$ $K + M = Cn(K \cup M)$	Intersección sobre $C(\mathcal{V})$ $A \cap B$
Intersección sobre $\mathcal{K}$ $K \cap M$	Unión Cerrada sobre $C(\mathcal{V})$ $Cl(A \cup B)$
Conjuntos Maximales Consistentes de $\mathcal{L}$ $\mathcal{M}_{\mathcal{L}} = \{T \in \mathcal{K} \setminus \mathbb{L} \mid T + \{\alpha\} = \mathbb{L} \text{ si } \alpha \notin T\}$	Conjuntos Cerrados Unitarios de $\mathcal{V}$ $\{v \in \mathcal{V} \mid Cl(v) = \{v\}\}$
Teorías Complementadas de $\mathcal{L}$ $\mathcal{K}_f = \{K \in \mathcal{K} \mid K + \mathcal{T}(\ K\ ^c) = \mathbb{L}\}$	Clopens de $\mathcal{V}$ $CO(\mathcal{V}) = \{A \subseteq \mathcal{V} \mid A, A^c \in C(\mathcal{V})\}$

Cuadro 7.1: Las funciones $\|\cdot\|$ y $\mathcal{T}$ definen biyecciones entre subconjuntos de $\mathcal{P}(\mathbb{L})$ y $\mathcal{P}(\mathcal{V})$, y permiten definir algunos operadores elementales a un lado y al otro.

A pesar de que $\|\cdot\|$ y $\mathcal{T}$ no son biyectivas, sí definen biyecciones entre dos subconjuntos de $\mathcal{P}(\mathbb{L})$ y $\mathcal{P}(\mathcal{V})$: $\mathcal{K}$, el conjunto de teorías de $\mathcal{L}$, y $C(\mathcal{V})$, el conjunto de cerrados de $\mathcal{V}$. Es decir, si nos restringimos únicamente a estos casos, se refuerza la conexión. En la Tabla 7.1 se presentan además otras biyecciones entre subconjuntos de $\mathcal{K}$ y $C(\mathcal{V})$ de interés. También vemos que, restringiendo a $\mathcal{K}$ y $C(\mathcal{V})$, la intersección de un lado se la puede presentar como la unión cerrada del otro lado. En el caso de que se trate de uniones de teorías cerradas por Cn , lo identificamos como el operador Expansion. Pero en el caso de $C(\mathcal{V})$, debemos evitar trabajar con Cl pues no aparece en los postulados que definen a los operadores en mundos.

Inspirados en Flouris et al.[8], identificamos qué lógicas pueden “mejorar” esta conexión entre $\mathcal{K}$ y $C(\mathcal{V})$, a partir de identificar y caracterizar propiedades para $\mathcal{V}$ (o bien de Cl):

- Si $Cl(A) \cup Cl(B) = Cl(A \cup B)$ entonces la intersección de teorías se la puede presentar como unión de conjuntos cerrados;
- Si $Cl(\{v\}) = \{v\}$ para todo $v \in \mathcal{V}$ entonces tenemos una biyección entre $\mathcal{V}$ y $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$.

La capacidad de representar en una lógica $\mathcal{L}$ a los operadores $\cap$ y $\cup$ de $C(\mathcal{V})$ y que cada elemento de $\mathcal{V}$ pueda verse como uno de $C(\mathcal{V})$ hace que la biyección entre $C(\mathcal{V})$ y $\mathcal{K}$ sea mucho más que eso, pues ahora se preserva también parte de la estructura algebraica de $C(\mathcal{V})$. Esto hace que la transcripción de los postulados de mundos a lógicas resulte sistemática. Sin embargo, la definición vía postulados no alcanza si no tenemos una construcción que satisfaga tales postulados. El Corolario 7.3.5 afirma que es posible construir operadores revision, contraction y versatile utilizando funciones world-selection, tales que, al aplicarles $\|\cdot\|$ obtenemos respectivamente los operadores elementary world revision, contraction y versatile desarrollados en el marco conceptual de mundos (restringido a $C(\mathcal{V})$):

$$K - M = K \cap \mathcal{T}(\sigma(\|K\|, \|M\|)) \quad K * M = (K + M) \cap \mathcal{T}(\sigma(\|K\|, \|M\|^c))$$

$$K \odot M = (K + M) \cap \mathcal{T}(\sigma(\|K\|, \|M\|^c)) \cap \mathcal{T}(\rho(\|M\|, \|K\|^c))$$

Al tener estas construcciones, la intuición indica que es posible replicar incluso operadores como world shielded contraction (Teorema 7.3.10) y world update (Teorema 7.3.11).

Pero nuestro objetivo era el de poder comprobar que la diversidad de marcos conceptuales presentados en el Capítulo 2 pueden interpretarse en un único marco conceptual. En este sentido, vimos que los operadores de cambio clásicos que satisfagan los principios de extensionalidad pueden ser presentados como operadores de cambio sobre teorías. Luego vimos que es posible caracterizar a las funciones world-selection mediante sus posibles valores, de la misma manera en que Flouris et al. [8] caracterizaron a sus operadores contraction. Además, cuando $\mathcal{V}$ es topological y complete, la selección de conjuntos de choice remainders y package opening no sólo tiene sentido y se satisface la biyección de Grove [17], sino que son capturados por el comportamiento de las funciones world-selection:

$$\|\cap \gamma(K, K \perp_c M)\| = \|K \cap \mathcal{T}(\sigma(\|K\|, \|M\|))\| = \|K\| \cup \sigma(\|K\|, \|M\|)$$

$$\|\cap \gamma(K, K \downarrow_p M)\| = \|K \cap \mathcal{T}(\sigma(\|K\|, \|M\|^c))\| = \|K\| \cup \sigma(\|K\|, \|M\|^c)$$

Por lo que los operadores de cambio múltiple clásicos, a excepción de package contraction, quedaron comprendidos dentro de nuestro marco conceptual.

Nos queda ahora ver los casos en donde se permite trabajar con negaciones. En general, dada una teoría no existe otra que se comporte como su negación en términos clásicos. Esto se correspondería con el comportamiento del operador complemento en $C(\mathcal{V})$. De ahí surge la necesidad de trabajar con el $CO(\mathcal{V})$, puesto que si $M \in \mathcal{K}$, entonces existe $N \in \mathcal{K}$ tal que $\|M\|^c = \|N\|$. Si nos restringimos a trabajar con lógicas CPL, sabemos por el Teorema de Representación de Stone de Álgebras de Boole [37] que todo elemento de $\mathcal{K}_f$ puede representarse con una única fórmula. Es decir $\mathcal{K}_f = \{Cn(\psi)\}_{\psi \in \mathbb{L}}$. Luego, si $M = Cn(\psi)$ tenemos que $N = Cn(\neg\psi)$. Por lo tanto, restringir a $\mathcal{K}_f$ el segundo parámetro de un operador revision o contraction en el contexto de múltiple presentado arriba, nos da el marco conceptual AGM clásico.

Otra alternativa sería trabajar con lógicas donde $C(\mathcal{V}) = CO(\mathcal{V})$, que redundaría en que valga que $C(\mathcal{V}) = \mathcal{P}(\mathcal{V})$. En este contexto resulta inmediata la transcripción tanto de los postulados como de las construcciones hechas en mundos, pues todo queda reflejado en $C(\mathcal{V})$. Viéndolo en CPL, nuevamente por el Teorema de Representación de Stone de Álgebras de Boole, se trata del marco conceptual de Katsuno y Mendelzon.

De esta manera, cumplimos el otro de los objetivos de esta tesis: ver que los marcos conceptuales clásicos, finitos y múltiples pueden cubrirse con el marco conceptual de mundos al asociarle su lógica determinada.

Demostraciones de los Resultados del Capítulo 7

Demostración de Teorema 7.1.2. Veamos que $\|\cdot\|$ y $\mathcal{T}$ son una conexión de Galois antítona:

$$\begin{aligned} A \subseteq \|M\| & \quad \text{si y sólo si } M \subseteq v^{-1}(\{1\}) \text{ para todo } v \in A \\ & \quad \text{si y sólo si } M \subseteq \bigcap_{v \in A} v^{-1}(\{1\}) = \mathcal{T}(A) \end{aligned}$$

Ahora continuamos con el listado de propiedades:

1. Si $M \subseteq N$ y $v \in \|N\|$ entonces $N \subseteq v^{-1}(\{1\})$. Luego $M \subseteq v^{-1}(\{1\})$, es decir $v \in \|M\|$. Por lo tanto, $\|N\| \subseteq \|M\|$.
2. Si $A \subseteq B$ y $v \in A$, entonces $\mathcal{T}(B) \subseteq v^{-1}(\{1\})$. Como vale para cualquier $v \in A$, entonces vale para su intersección. Luego $\mathcal{T}(B) \subseteq \mathcal{T}(A)$.
3. Como $Cn(M) = \mathcal{T}(\|M\|) = \bigcap_{v \in \|M\|} v^{-1}(\{1\})$, sabemos por definición que $M \subseteq Cn(M)$. Aplicando el primer ítem, resulta que $\|Cn(M)\| \subseteq \|M\|$. Por otro lado, de la definición de $Cn(M)$ se deduce que si $v \in \|M\|$, entonces $Cn(M) \subseteq v^{-1}(\{1\})$. Por lo tanto, $\|M\| \subseteq \|Cn(M)\|$ y se concluye que $\|M\| = \|Cn(M)\|$. Por último, de las definiciones de Cn y Cl es inmediato que $\|Cn(M)\| = Cl(\|M\|)$.
4. Si $v \in A$ entonces $\mathcal{T}(A) \subseteq v^{-1}(\{1\})$. Por el primer ítem, $\|v^{-1}(\{1\})\| \subseteq Cl(A)$. Como $v^{-1}(\{1\}) \subseteq v^{-1}(\{1\})$, se tiene que $v \in \|v^{-1}(\{1\})\|$, por lo que $v \in Cl(A)$. Luego tenemos que $A \subseteq Cl(A)$. Al aplicar el segundo ítem, $\mathcal{T}(Cl(A)) \subseteq \mathcal{T}(A)$. Como vale que $\mathcal{T}(Cl(A)) = Cn(\mathcal{T}(A))$, y vimos que $\mathcal{T}(A) \subseteq Cn(\mathcal{T}(A))$, obtenemos la igualdad.
5. $v \in \|\bigcup X\|$ si y sólo si $\bigcup X \subseteq v^{-1}(\{1\})$ si y sólo si $M \subseteq v^{-1}(\{1\})$ para todo $M \in X$ si y sólo si $v \in \bigcap_{M \in X} \|M\|$.
6. Si $v \in \bigcup_{M \in X} \|M\|$ entonces existe $M_v \in X$ tal que $v \in \|M_v\|$. Luego $\bigcap X \subseteq v^{-1}(\{1\})$, y esta consecuencia equivale a que $v \in \|\bigcap X\|$.
7. $\bigcap_{A \in S} \mathcal{T}(A) = \bigcap_{A \in S} \left(\bigcap_{v \in A} v^{-1}(\{1\}) \right) = \bigcap_{v \in \bigcup S} v^{-1}(\{1\}) = \mathcal{T}(\bigcup S)$.
8. Si $v \in \bigcap S$ entonces $\mathcal{T}(A) \subseteq v^{-1}(\{1\})$ para todo $A \in S$. Luego $\bigcup_{A \in S} \mathcal{T}(A) \subseteq v^{-1}(\{1\})$. Como esto vale para todo $v \in \bigcap S$, resulta que $\bigcup_{A \in S} \mathcal{T}(A) \subseteq \mathcal{T}(\bigcap S)$ por definición de $\mathcal{T}$.
9. Si $\mathbf{0} \in A$, notar que $\mathcal{T}(A) = \emptyset$. Como toda preimagen de una valuación contiene al vacío, resulta que $Cl(A) = \mathcal{V}$.
10. Como $\mathbf{1}^{-1}(\{1\}) = \mathbb{L}$, si $\mathbf{1} \in \mathcal{V}$ entonces cualquier subconjunto de $\mathbb{L}$ lo tendrá como mundo posible. En particular, $\mathbf{1} \in \|\mathcal{T}(A)\|$. Además, si $A = \emptyset$, entonces $\mathcal{T}(\emptyset) = \mathbb{L}$, por lo que la única función que lo contiene es $\mathbf{1}$. Luego, $Cl(\emptyset) = \{\mathbf{1}\}$.

□

Demostración de Proposición 7.1.5.

1. Por monotonía, $Cn(M \cap N) \subseteq Cn(M)$ y $Cn(M \cap N) \subseteq Cn(N)$, de lo que se deduce la inclusión. Por el postulado de inclusión, si $M, N \in \mathcal{K}$ vale la igualdad. Por lo tanto $M \cap N = Cn(M \cap N)$, es decir $M \cap N \in \mathcal{K}$. Consideremos ahora $\bigcap X$ donde $X \subseteq \mathcal{K}$. Notar que las propiedades usadas se mantienen por más que sea una intersección arbitraria, pues $Cn(\bigcap X) \subseteq Cn(M)$ para todo $M \in X$ y $\bigcap X = \bigcap_{M \in X} Cn(M)$.

2. La demostración con Cl es idéntica a la anterior.
3. Aplicando $\|\cdot\|$ tenemos que $\|Cn(M \cup N)\| = \|M \cup N\| = \|M\| \cap \|N\|$. Mientras que $\|Cn(Cn(M) \cup Cn(N))\| = \|Cn(M) \cup Cn(N)\| = \|Cn(M)\| \cap \|Cn(N)\| = \|M\| \cap \|N\|$. Por lo tanto, los conjuntos de mundos son iguales, que al aplicarle $\mathcal{T}$ resulta en que $Cn(Cn(M) \cup Cn(N)) = Cn(M \cup N)$.
4. Aplicando $\mathcal{T}$ tenemos que $\mathcal{T}(Cl(A \cup B)) = \mathcal{T}(A \cup B) = \mathcal{T}(A) \cap \mathcal{T}(B)$. Mientras que $\mathcal{T}(Cl(Cl(A) \cup Cl(B))) = \mathcal{T}(Cl(A) \cup Cl(B)) = \mathcal{T}(Cl(A)) \cap \mathcal{T}(Cl(B)) = \mathcal{T}(A) \cap \mathcal{T}(B)$. Por lo tanto, las teorías son iguales, que al aplicarle $\|\cdot\|$ resulta en que $Cl(Cl(A) \cup Cl(B)) = Cl(A \cup B)$.
5. Recordemos que $\mathcal{T}(A) = \mathcal{T}(Cl(A)) = Cn(\mathcal{T}(A))$ para cualquier $A \subseteq \mathcal{V}$, y $\|M\| = \|Cn(M)\| = Cl(\|M\|)$ para cualquier $M \subseteq \mathbb{L}$. Esto significa que las funciones $Im(\|\cdot\|) = C(\mathcal{V})$ y $Im(\mathcal{T}) = \mathcal{K}$, es decir, son sobreyectivas. Además:
 - Si $A, B \in C(\mathcal{V})$ tal que $\mathcal{T}(A) = \mathcal{T}(B)$, al aplicar $\|\cdot\|$, tenemos que $Cl(A) = Cl(B)$, es decir $A = B$.
 - Si $M, N \in \mathcal{K}$ tal que $\|M\| = \|N\|$, al aplicar $\mathcal{T}$, tenemos que $Cn(M) = Cn(N)$, es decir $M = N$.

Por último, sabemos que Cn y Cl restringidas a $\mathcal{K}$ y $C(\mathcal{V})$ son las funciones identidad de los conjuntos.

6. De la biyección anterior, se deduce que si $\|M\| = \|N\|$ entonces $Cn(M) = Cn(N)$. Por lo que la propiedad se deduce por contrarrecíproco.
7. Para ver la biyección entre $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ y $\{v \in \mathcal{V} \mid Cl(v) = \{v\}\}$, solo hay que restringir la biyección del ítem anterior a estos conjuntos. Es decir, si $T \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ entonces existe $\{v\} = Cl(v)$ tal que $\|T\| = \{v\}$, y si $\{v\} = Cl(v)$ existe $T \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ tal que $\mathcal{T}(\{v\}) = T$.

Sea $T \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$, por definición $\|T\| \neq \emptyset$. Tomemos $v \in \|T\|$, es decir, $T \subseteq v^{-1}\{1\}$. Si la inclusión es estricta, existe $\alpha \notin T$ tal que $\alpha \in v^{-1}\{1\}$. Tenemos entonces que $T \cup \{\alpha\} \subseteq v^{-1}\{1\}$. Aplicando $\|\cdot\|$ resulta que $Cl(\{v\}) \subseteq \|T \cup \{\alpha\}\| = \|\mathbb{L}\|$. Luego $Cl(\{v\}) = \emptyset$, una contradicción, pues $v \in Cl(\{v\})$. Por lo tanto, $T = v^{-1}\{1\}$. Como consideramos un $v \in \|T\|$ arbitrario, significa que todos las valuaciones de $\|T\|$ lo satisfacen, entonces $\|T\| = \{v\}$ y $Cl(v) = \{v\}$.

Dado $v \in \mathcal{V}$, notemos que $\mathcal{T}(\{v\}) = v^{-1}\{1\}$ y, por lo tanto, $v^{-1}\{1\} \in \mathcal{K}$. Luego, si $Cl(v) = \{v\}$, significa que no existe $v' \neq v$ tal que $v^{-1}\{1\} \subseteq v'^{-1}\{1\}$. Supongamos que $\mathcal{T}(\{v\}) \notin \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$, entonces existe $\alpha \notin \mathcal{T}(\{v\})$ tal que $Cn(\mathcal{T}(\{v\}) \cup \alpha) \neq \mathbb{L}$. Tomamos $\|\cdot\|$ y nos queda que:

$$\emptyset \neq \|Cn(\mathcal{T}(\{v\}) \cup \alpha)\| = \|\mathcal{T}(\{v\}) \cup \alpha\| = \{v\} \cap \|\alpha\| = \emptyset$$

. Llegando a una contradicción. Luego $\mathcal{T}(\{v\}) \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$.

8. Si $K \in \mathcal{K}_f$ entonces $\|Cn(K \cup \mathcal{T}(\|K\|^c))\| = \emptyset$ y por las propiedades del Teorema 7.1.2 esto significa que $\|K\| \cap Cl(\|K\|^c) = \emptyset$. Luego, $Cl(\|K\|^c) = \|K\|^c$, es decir $\|K\| \in CO(\mathcal{V})$.

Supongamos ahora que $A \in CO(\mathcal{V})$, entonces:

$$\emptyset = A \cap A^c = Cl(A) \cap Cl(A^c) = \|\mathcal{T}(A) \cup \mathcal{T}(A^c)\|$$

Por las propiedades del Teorema 7.1.2 tenemos que $Cn(\mathcal{T}(A) \cup \mathcal{T}(A^c)) = \mathbb{L}$, es decir, $\mathcal{T}(A) \in \mathcal{K}_f$.

□

Demostración de Observación 7.1.7. Queremos ver que $Cl(A) \cup Cl(B) = Cl(A \cup B)$. De las propiedades de Cl se deduce que $Cl(A) \cup Cl(B) \subseteq Cl(A \cup B)$. Tomemos entonces $v \notin Cl(A) \cup Cl(B)$ y veamos que $v \notin Cl(A \cup B)$ para probar la otra inclusión.

Como $v \notin Cl(A) \cup Cl(B)$, tenemos que $\mathcal{T}(A) \not\subseteq T_v$ y $\mathcal{T}(B) \not\subseteq T_v$. Es decir, existe $\alpha \in \mathcal{T}(A)$ y $\beta \in \mathcal{T}(B)$ tal que $\alpha, \beta \notin T_v$. Por hipótesis, tenemos que $\alpha \vee \beta \notin T_v$, es decir, $v \notin \|\alpha \vee \beta\|$. Por otro lado, vía la definición de la conexión de Galois, tenemos que $A \subseteq \|\alpha\|$ y $B \subseteq \|\beta\|$. Nuevamente por hipótesis, deducimos entonces que $A \cup B \subseteq \|\alpha \vee \beta\|$. Como $\|\alpha \vee \beta\| \in C(\mathcal{V})$, tenemos que $Cl(A \cup B) \subseteq \|\alpha \vee \beta\|$. Dado que $v \notin \|\alpha \vee \beta\|$, se deduce que $v \notin Cl(A \cup B)$. Concluimos entonces que $Cl(A \cup B) \subseteq Cl(A) \cup Cl(B)$, por lo tanto, vale la igualdad. $\square$

Demostración de Teorema 7.1.9.

1. Sabemos que $v' \in Cl(v)$ si y sólo si $v^{-1}(\{-1\}) \subseteq v'^{-1}(\{-1\})$ por la conexión de Galois. Si $\mathcal{V}$ es complete, de lo anterior se deduce que si $v' \in Cl(v)$ entonces $v = v'$, por lo que $\{v\} = Cl(v)$. Si suponemos que $\{v\} = Cl(v)$ para todo $v \in \mathcal{V}$, tenemos que si $v^{-1}(\{-1\}) \subseteq v'^{-1}(\{-1\})$ entonces $v = v'$. Luego $\mathcal{V}$ es complete.

Si $\mathcal{V}$ es complete, entonces $\{v\} = Cl(\{v\})$. Luego, para cada $B \neq \mathcal{V}$ existe $v \notin B$ tal que $B \cap Cl(\{v\}) = B \cap \{v\} = \emptyset$. Es decir, $\mathcal{V}$ es detachable.

Si suponemos además que $\mathbf{0} \in \mathcal{V}$, como $v^{-1}(\{-1\}) \subseteq \mathbf{0}'^{-1}(\{-1\})$ para todo $v \in \{0, 1\}^{\mathbb{L}}$, sólo puede pasar que $\{\mathbf{0}\} = \mathcal{V}$ para que $\mathcal{V}$ sea complete. Por lo que las únicas teorías válidas son las asociadas a los conjuntos $\emptyset$ y $\{\mathbf{0}\}$, es decir $\mathbb{L}$ y $\emptyset$ respectivamente.

2. Si $M, N \in \mathcal{K}$, aplicando las propiedades vistas en el Teorema 7.1.2, tenemos que:

$$Cl(\|M\| \cup \|N\|) = \|\mathcal{T}(\|M\| \cup \|N\|)\| = \|\mathcal{T}(\|M\|) \cap \mathcal{T}(\|N\|)\| = \|M \cap N\|$$

Por lo que si $Cl(A \cup B) = Cl(A) \cup Cl(B)$ para cualquier $A, B \subseteq \mathcal{V}$, entonces resulta que $\|M \cap N\| = Cl(\|M\| \cup \|N\|) = Cl(\|M\|) \cup Cl(\|N\|) = \|M\| \cup \|N\|$. Por otro lado, si $A, B \subseteq \mathcal{V}$, aplicando las propiedades vistas en el Teorema 7.1.2, tenemos que:

$$Cl(A \cup B) = \|\mathcal{T}(A \cup B)\| = \|\mathcal{T}(A) \cap \mathcal{T}(B)\|$$

Si vale que $\|M \cap N\| = \|M\| \cup \|N\|$ para cualquier $M, N \in \mathcal{K}$, usando que $\mathcal{T}(A)$ y $\mathcal{T}(B) \in \mathcal{K}$, entonces:

$$Cl(A \cup B) = \|\mathcal{T}(A) \cap \mathcal{T}(B)\| = \|\mathcal{T}(A)\| \cup \|\mathcal{T}(B)\| = Cl(A) \cup Cl(B)$$

De esto último se tiene que si $A, B \in C(\mathcal{V})$ entonces $A \cup B = Cl(A) \cup Cl(B) = Cl(A \cup B)$, es decir $A \cup B \in C(\mathcal{V})$. Luego $C(\mathcal{V})$ es cerrado por uniones finitas.

3. Sean $K \in \mathcal{K}$ y $X \subseteq K$ tal que $Cn(\emptyset) \neq Cn(X)$. Si $Cn(X) = Cn(K)$ podemos tomar como $Z = \emptyset$ y tenemos que $Cn(X \cup Z) = Cn(K)$. Por lo que supongamos que $Cn(X) \neq Cn(K)$ y notemos como $A = \|K\|$ y $B = \|X\| = \|Cn(X)\|$. Por la inclusión, sabemos que $A = \|K\| \subsetneq \|X\| = B \neq \mathcal{V}$. Si $\mathcal{V}$ es decomposable, se deduce que existe $v \notin B$ tal que $B \cap Cl(A \cup \{v\}) = Cl(A) = A$. Tomamos entonces $Z = \mathcal{T}(A \cup \{v\})$, que sabemos que $Cn(Z) = Z \subsetneq K$ pues equivale a que $A = \|K\| \subsetneq \|Z\| = Cl(A \cup \{v\})$ y $v \notin A$. Además, $\|X \cup Z\| = \|X\| \cap \|Z\| = B \cap Cl(A \cup \{v\}) = A$, por lo que aplicando $\mathcal{T}$ resulta que $Cn(X \cup Z) = K$. Es decir, $\mathcal{L}$ es decomposable.

Sean ahora $B \in C(\mathcal{V})$ y $A \subseteq B$ tal que $B \neq \mathcal{V}$, y consideramos $K = \mathcal{T}(A)$ y $X = \mathcal{T}(B)$. Por la inclusión, tenemos que $X \subseteq K$. Si $\mathcal{L}$ es decomposable, sabemos que existe $Z \subseteq \mathbb{L}$ tal que $Cn(Z) \subsetneq K$ y $Cn(X \cup Z) = Cn(K) = K$. Si tomamos $C = \|Z\| \in C(\mathcal{V})$, tenemos que $Cl(A) \subsetneq C$. Sea $v \in C$, $v \notin Cl(A)$. Como $C \in C(\mathcal{V})$ tenemos que $Cl(A) \subsetneq Cl(A \cup \{v\}) \subseteq C$. Por lo tanto:

$$Cl(A) \subseteq B \cap Cl(A \cup \{v\}) \subseteq B \cap C = \|X\| \cap \|Z\| = \|X \cup Z\| = \|K\| = Cl(A)$$

Luego, $Cl(A) = B \cap Cl(A \cup \{v\})$. Además, $v \notin B$, de lo contrario la igualdad implicaría que $v \in Cl(A)$, una contradicción. Se concluye entonces que $\mathcal{V}$ es decomposable.

En el caso de que $\mathcal{V}$ sea decomposable, se tiene entonces que es detachable. Basta con considerar el caso $A = \emptyset$ para cualquier $B \neq \mathcal{V}$.

4. Sabiendo que $\mathcal{V}$ es topological y detachable, veamos que es decomposable. Sean $A, B \in C(\mathcal{V})$ tal que $A \subseteq B \neq \mathcal{V}$. Como $B \neq \mathcal{V}$, existe $v \notin B$ tal que $Cl(\{v\}) \cap B = \emptyset$ por ser $\mathcal{V}$ detachable. Como $\mathcal{V}$ es topological, esta v sirve para cualquier $A \subseteq B$, pues $Cl(A \cup \{v\}) = A \cup Cl(\{v\}) \in C(\mathcal{V})$. Luego $\mathcal{V}$ es decomposable. □

Demostración de Teorema 7.2.4.

1. Como $\mathcal{T}(A) \in \mathcal{K}$, tomemos un operador elementary world revision $*'_w$ cualquiera y consideremos:

$$A *_w B = \begin{cases} \|\mathcal{T}(A) * \mathcal{T}(B)\| & \text{Si } A, B \in C(\mathcal{I}) \\ A *_w' B & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Entonces, si $A, B \in C(\mathcal{I})$:

- $A *_w B \subseteq \|\mathcal{T}(B)\| = Cl(B) = B$ por **(PM*4)**.
- $A \cap B = \|\mathcal{T}(A)\| \cap \|\mathcal{T}(B)\| = \|\mathcal{T}(A) + \mathcal{T}(B)\| \subseteq A \odot_w B$ por **(PM*2)**.

Por lo tanto, $*_w$ satisface **(W*1)** y **(W*2)**, es decir, es un operador elementary world revision. Además, por definición de $*_w$ tenemos que $\|K * M\| = \|K\| *_w \|M\|$, por lo que $*$ está basada en $*_w$.

Supongamos ahora que $*$ está basado en $*_w$ un operador elementary world revision. Por la conexión de Galois y el postulado **(W*1)** nos queda que $\mathcal{T}(\|M\|) \subseteq \mathcal{T}(\|K\| *_w \|M\|)$. Usando que $\|K\| *_w \|M\| = \|K * M\|$ y que $M, K * M \in \mathcal{K}$ podemos deducir que $*$ satisface **(PM*4)**. De la misma manera, el postulado **(W*2)** vía la conexión de Galois afirma que $\mathcal{T}(\|K\| *_w \|M\|) \subseteq \mathcal{T}(\|K\| \cap \|M\|)$. Usando que $*$ está basado en $*_w$ y que $\exp$ está basado en $\cap$, resulta que $\mathcal{T}(\|K * M\|) \subseteq \mathcal{T}(\|K + M\|)$. Luego $K * M \subseteq K + M$, pues ambos pertenecen a $\mathcal{K}$. Concluimos entonces que $*$ satisface **(PM*2)**.

2. Con la misma idea de la demostración anterior, tomemos un operador elementary world contraction $-'_w$ cualquiera y consideremos:

$$A -_w B = \begin{cases} \|\mathcal{T}(A) - \mathcal{T}(B)\| & \text{Si } A, B \in C(\mathcal{I}) \\ A -'_w B & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Entonces, si $A, B \in C(\mathcal{I})$:

- $A = Cl(A) = \|\mathcal{T}(A)\| \subseteq \|\mathcal{T}(A) - \mathcal{T}(B)\| = A -_w B$ por **(M-2)**.
- $(A -_w B) \cap B = \|(\mathcal{T}(A) - \mathcal{T}(B)) + \mathcal{T}(B)\| \subseteq \|\mathcal{T}(A)\| = Cl(A) = A$ por **(M-4)**.

Por lo tanto, $-_w$ satisface **(W-1)** y **(W-2)**, es decir, es un operador elementary world contraction. Además, por definición de $-_w$ tenemos que $\|K - M\| = \|K\| -_w \|M\|$, por lo que $-$ está basada en $-_w$.

Supongamos ahora que $-$ está basado en $-_w$ un operador elementary world contraction. Por la conexión de Galois y **(W-1)** nos queda que $\mathcal{T}(\|K\| -_w \|M\|) \subseteq \mathcal{T}(\|K\|)$. Usando que $\|K\| -_w \|M\| = \|K - M\|$ y que $K, K - M \in \mathcal{K}$ podemos deducir que $-$ satisface **(M-2)**. De la misma manera, el postulado **(W-2)** vía la conexión de Galois afirma que $\mathcal{T}(\|K\|) \subseteq \mathcal{T}((\|K\| -_w \|M\|) \cap \|M\|)$. Usando que $-$ está basado en $-_w$ y que $+$ está basado en $\cap$, resulta que $\mathcal{T}(\|K\|) \subseteq \mathcal{T}(\|(K - M) + M\|)$. Luego $K \subseteq (K - M) + M$, pues ambos pertenecen a $\mathcal{K}$. Concluimos entonces que $-$ satisface **(M-4)**. □

Demostración de Teorema 7.2.5.

De postulados a construcción por operadores revision: Inspirados en el Teorema 6.1.4, consideramos:

$$K * M = (K \odot M) + M \quad \text{y} \quad K *' M = (M \odot K) + M$$

Por construcción, ambos operadores satisfacen **(PM*4)**, y como $(K + M) + M = K + M$, también que cumplen **(PM*2)**. Luego, son operadores elementary package revision. Veamos que vale la igualdad del enunciado, utilizando que $\mathcal{V}$ es topological:

$$\begin{aligned} (K * M) \cap (M *' K) &= ((K \odot M) + M) \cap ((K \odot M) + K) \\ &= \mathcal{T}(\|(K \odot M) \cup M\|) \cap \mathcal{T}(\|(K \odot M) \cup K\|) \\ &= \mathcal{T}(\|(K \odot M) \cup M\| \cup \|(K \odot M) \cup K\|) \\ &= \mathcal{T}(\|(K \odot M) \cap M\| \cup \|(K \odot M) \cap K\|) \\ &= \mathcal{T}(\|K \odot M\| \cap (\|K\| \cup \|M\|)) \\ &= \mathcal{T}(\|K \odot M\| \cap \|K \cap M\|) \\ &= \mathcal{T}(\|(K \odot M) \cup (K \cap M)\|) \\ &= \mathcal{T}(\|K \odot M\|) \\ &= K \odot M \end{aligned}$$

El paso en que afirmamos que $\|K\| \cup \|M\| = \|K \cap M\|$ es en donde se usó que $\mathcal{V}$ es topological.

De construcción por operadores revision a basado en mundos: Sean ahora σ y ρ las funciones world-selection asociadas a $*$ y $*'$ respectivamente y definimos:

$$A \odot_w B = (A \cap B) \cup \sigma(A, B^c) \cup \rho(B, A^c)$$

Entonces $\|K\| \odot_w \|M\| = (\|K\| *_w \|M\|) \cup (\|M\| *_w' \|K\|)$ por construcción. Usando que $\mathcal{V}$ es topological, tenemos que:

$$\|K\| \odot_w \|M\| = \|K * M\| \cup \|M *' K\| = \|(K * M) \cap (M *' K)\| = \|K \odot M\|$$

Por lo que $\odot$ está basada en $\odot_w$.

De basado en mundos a postulados: Sea $\odot_w$ el operador elementary world versatile en el que se basa $\odot$. Por **(W $\odot$ 1)**, $\mathcal{V}$ topological y la conexión de Galois, tenemos que:

$$K \cap M = \mathcal{T}(\|K\| \cup \|M\|) \subseteq \mathcal{T}(\|K\| \odot_w \|M\|) = K \odot M$$

Análogamente, vía **(W*2)** y la conexión de Galois, resulta que:

$$K \odot M = \mathcal{T}(\|K\| \odot_w \|M\|) \subseteq \mathcal{T}(\|K\| \cap \|M\|) = K + M$$

Luego, $\odot$ satisface **(M $\odot$ 1)** y **(PM*2)**. □

Demostración de Teorema 7.3.1. Como $\|K\| \odot_w \|M\| = \|K \odot M\|$ y $\|K\| \odot_w' \|M\| = \|K \odot' M\|$, se deduce que si $A, B \in C(\mathcal{V})$ entonces $Cl(A \odot_w B) = A \odot_w B$ y $Cl(A \odot_w' B^c) = A \odot_w' B^c$, siendo $A \odot_w B = A \odot_w' B^c$. Además, la intersección de cerrados es cerrada, por lo que si a $A \odot_w B$ y $A \odot_w' B^c$ se los interseca por A ó B , el resultado será también cerrado. Luego:

- $(A \odot_w B) \cap B = (A \cap B) \cup \sigma(A, B^c) \in C(\mathcal{V})$;
- $(A \odot_w B) \cap A = (A \cap B) \cup \rho(B, A^c) \in C(\mathcal{V})$;
- $(A \odot_w' B^c) \cap A = (A \cap B^c) \cup \rho'(B^c, A^c) \in C(\mathcal{V})$;
- $(A \odot_w' B^c) \cap B = \rho'(B^c, A^c) \in C(\mathcal{V})$.

Los operadores $\odot_w$ y $\odot'_w$ se construyen a partir de uniones, por lo que aplicando las propiedades de Cl del Corolario 7.1.3 y la Proposición 7.1.5 tenemos que:

$$\begin{aligned} Cl(\sigma(A, B^c)) \cup Cl(\rho(B, A^c)) &\subseteq A \odot_w B \\ Cl(\sigma'(A, B)) \cup Cl(\rho'(B^c, A^c)) &\subseteq A \odot'_w B^c \end{aligned}$$

Por otro lado, del Teorema 6.1.4, sabemos que:

- $(A \odot_w B) \cap A^c = \sigma(A, B^c);$
- $(A \odot_w B) \cap B^c = \rho(B, A^c);$
- $(A \odot'_w B^c) \cap A^c = \sigma'(A, B);$
- $(A \odot'_w B^c) \cap B = \rho'(B^c, A^c).$

Combinando todo, resulta que:

- $(Cl(\sigma(A, B^c)) \cup Cl(\rho(B, A^c))) \cap A^c \subseteq \sigma(A, B^c);$
- $(Cl(\sigma(A, B^c)) \cup Cl(\rho(B, A^c))) \cap B^c \subseteq \rho(B, A^c);$
- $(Cl(\sigma'(A, B)) \cup Cl(\rho'(B^c, A^c))) \cap A^c \subseteq \sigma'(A, B);$
- $(Cl(\sigma'(A, B)) \cup Cl(\rho'(B^c, A^c))) \cap B \subseteq \rho'(B^c, A^c).$

De estas inclusiones se deduce que:

- $Cl(\sigma(A, B^c)) \cap A^c \subseteq \sigma(A, B^c);$
- $Cl(\rho(B, A^c)) \cap B^c \subseteq \rho(B, A^c);$
- $Cl(\sigma'(A, B)) \cap A^c \subseteq \sigma'(A, B);$
- $Cl(\rho'(B^c, A^c)) \cap B \subseteq \rho'(B^c, A^c).$

La otra inclusión se deduce de forma directa por la definición de world-selection y la monotonía de Cl . $\square$

Demostración de Corolario 7.3.2. Del Teorema 7.3.1 sabemos que si $\odot_w$ es cerrado, entonces $\sigma(A, B^c) = Cl(\sigma(A, B^c)) \cap A^c$ y $\rho(B, A^c) = Cl(\rho(B, A^c)) \cap B^c$ para todo $A, B \in C(\mathcal{V})$.

Supongamos ahora que $\sigma(A, B^c) = Cl(\sigma(A, B^c)) \cap A^c$ y $\rho(B, A^c) = Cl(\rho(B, A^c)) \cap B^c$ para todo $A, B \in C(\mathcal{V})$. Usando que $\mathcal{V}$ topological tenemos que:

$$A \cup \sigma(A, B^c) = A \cup (Cl(\sigma(A, B^c)) \cap A^c) = A \cup Cl(\sigma(A, B^c)) \in C(\mathcal{V})$$

Luego, intersecando por B tenemos que $A *_w^\sigma B = (A \cap B) \cup \sigma(A, B^c) \in C(\mathcal{V})$. Análogamente, $B \cup \rho(B, A^c) \in C(\mathcal{V})$, que al intersecar por A se obtiene $B *_w^\rho A$.

Por último, del Teorema 6.1.4 sabemos que $A \odot_w B = (A *_w^\sigma B) \cup (B *_w^\rho A)$. Por lo que, si ambos conjuntos son cerrados, entonces $A \odot_w B$ también por ser $\mathcal{V}$ topological. $\square$

Demostración de Corolario 7.3.3. Del Teorema 6.2.7 podemos ver a $-_w$ como un operador world dual versatile. Del Teorema 7.3.1 sabemos que si $-_w$ es cerrado, entonces $\sigma(A, B) = Cl(\sigma(A, B)) \cap A^c$ para todo $A, B \in C(\mathcal{V})$.

Supongamos ahora que $\sigma(A, B^c) = Cl(\sigma(A, B^c)) \cap A^c$ para todo $A, B \in C(\mathcal{V})$. Usando que $\mathcal{V}$ topological tenemos que:

$$A \cup \sigma(A, B) = A \cup (Cl(\sigma(A, B)) \cap A^c) = A \cup Cl(\sigma(A, B)) \in C(\mathcal{V})$$

Luego, $A -_w B = A \cup \sigma(A, B) \in C(\mathcal{V})$. $\square$

Demostración de Corolario 7.3.5. Por los Teoremas 7.2.4 y 7.2.5 sabemos que tener los operadores definidos vía postulados equivale a que son basados en mundos. Es decir, equivale a que existen operadores $\odot_w$ elementary world versatile, $*_w$ elementary world revision y $-_w$ elementary world contraction tales que:

$$\|K - M\| = \|K\| -_w \|M\| \quad \|K * M\| = \|K\| *_w \|M\| \quad \|K \odot M\| = \|K\| \odot_w \|M\|$$

De las construcciones de estos operadores world se deduce la existencia de las respectivas funciones world-selection V-compliant. Es en este contexto que usamos que $\mathcal{V}$ es topological.

Por último, la equivalencia viene dada por la conexión de Galois y la propiedad de $\mathcal{T}$ que transforma uniones arbitrarias en intersecciones:

$$\begin{aligned} K - M &= \mathcal{T}(\|K\| -_w \|M\|) \\ &= \mathcal{T}(\|K\| \cup \sigma(\|K\|, \|M\|)) \\ &= K \cap \mathcal{T}(\sigma(\|K\|, \|M\|)) \\ \\ K * M &= \mathcal{T}(\|K\| *_w \|M\|) \\ &= \mathcal{T}((\|K\| \cap \|M\|) \cup \sigma(\|K\|, \|M\|^c)) \\ &= (K + M) \cap \mathcal{T}(\sigma(\|K\|, \|M\|^c)) \\ \\ K \odot M &= \mathcal{T}(\|K\| \odot_w \|M\|) \\ &= \mathcal{T}(Cl(\|K\| *_w^c \|M\|) \cup Cl(\|M\| *_w^c \|K\|)) \\ &= (K + M) \cap \mathcal{T}(\sigma(\|K\|, \|M\|^c)) \cap (K + M) \cap \mathcal{T}(\rho(\|M\|, \|K\|^c)) \\ &= (K + M) \cap \mathcal{T}(\sigma(\|K\|, \|M\|^c)) \cap \mathcal{T}(\rho(\|M\|, \|K\|^c)) \end{aligned}$$

□

Demostración de Teorema 7.3.6. Sea σ una función V-compliant. Por definición, si tenemos que $A \in C(\mathcal{V})$ y $B \subseteq \mathcal{V}$ entonces $\sigma(A, B) = Cl(\sigma(A, B)) \cap A^c$. Por definición de world selection, $\sigma(A, B) \subseteq B^c \cap A^c$, y al ser $\mathcal{V}$ topological se tiene que:

$$\sigma(A, B) \cup A = Cl(\sigma(A, B)) \cup A = Cl(\sigma(A, B) \cup A)$$

Es decir, $\sigma(A, B) \cup A \in C(\mathcal{V})$. Luego, $\sigma(A, B) \in \Sigma_{(A, B)}$.

Sea ahora $S \in \Sigma_{(A, B)}$. Entonces $S \cup A \in C(\mathcal{V})$ y $S \subseteq A^c \cap B^c$. Como $\mathcal{V}$ es topological, $S \cup A = Cl(S \cup A) = Cl(S) \cup A$. Luego, al intersectar por A^c , se tiene que $S = Cl(S) \cap A^c$. Por lo tanto, S puede ser un valor de una función world-selection V-compliant.

Si suponemos además que $\mathcal{V}$ es complete y $A^c \cap B^c \neq \emptyset$, tomo $v \in A^c \cap B^c$. Claramente, $\{v\} \subseteq A^c \cap B^c$, y como $\{v\} \in C(\mathcal{V})$, se tiene que $\{v\} \cup A \in C(\mathcal{V})$ por ser $\mathcal{V}$ topological. □

Demostración de Teorema 7.3.8.

1. Si σ es D-standard, cuando $K + M = \mathbb{L} \neq K$ tenemos que $\|K\| \cap \|M\| = \emptyset \neq \|K\|$. Por lo tanto, $\sigma(\|K\|, \|M\|) = \emptyset$. Luego $K - M = K \cap \mathcal{T}(\emptyset) = K \cap \mathbb{L} = K$. Esto significa que $-$ satisface **(CM-9)**.

Supongamos ahora que $-$ satisface **(CM-9)** y consideremos $A, B \in C(\mathcal{V})$ tal que $A \cap B = \emptyset \neq A$. Luego, $\mathcal{T}(A) + \mathcal{T}(B) = \mathbb{L} \neq \mathcal{T}(A)$, por lo que $\mathcal{T}(A) - \mathcal{T}(B) = \mathcal{T}(A)$. Al pasar a mundos, nos queda que $A -_w B = A$, confirmando que $\sigma(A, B) = \emptyset$.

2. Si σ es D-normal, entonces cuando $M \not\subseteq K$ tenemos que $\|K\| \not\subseteq \|M\|$. Por lo tanto, $\sigma(\|K\|, \|M\|) = \emptyset$. Luego $K - M = K \cap \mathcal{T}(\emptyset) = K \cap \mathbb{L} = K$. Esto significa que $-$ satisface **(CM-5)**.

Supongamos ahora que $-$ satisface **(CM-5)** y consideremos $A, B \in C(\mathcal{V})$ tal que $A \not\subseteq B$. Luego, $\mathcal{T}(A) - \mathcal{T}(B) = \mathcal{T}(A)$. Al pasar a mundos, nos queda que $A -_w B = A$, por lo que confirmamos que $\sigma(A, B) = \emptyset$.

3. Sean $K, M \in \mathcal{K}$ y $A, B \in C(\mathcal{V})$ tales que $\|K\| = A$ y $\|M\| = B$ y $Cn(\emptyset) \neq M \subseteq K$, o equivalentemente $A \subseteq B \neq \mathcal{V}$. En este contexto, tenemos que σ es D-semantically successful si y sólo si $\sigma(A, B) \neq \emptyset$. Recordar que como $\mathcal{V}$ es complete existe un conjunto en $\Sigma_{(A,B)}$ no vacío que $\sigma(A, B)$ puede devolver. Esto equivale a que $A \cup \sigma(A, B) \not\subseteq B$ que, escrito en términos de K y M significa que $M \not\subseteq K \cap \mathcal{T}(\|K\|, \|M\|) = K - M$. Es decir, equivale a que $-$ satisfaga **(CM-6)**.
4. La demostración es idéntica al ítem anterior, sólo que omitiendo el caso en que $K = \mathbb{L}$ o bien $A = \emptyset$.
5. Que σ sea D-trichotomic quiere decir que para todo A, B y $C \in C(\mathcal{V})$ cumple que:

$$\sigma(A, B \cap C) = \begin{cases} \sigma(A, B) \\ \sigma(A, C) \\ \sigma(A, B) \cup \sigma(A, C) \end{cases}$$

Debido a que $A \cap \sigma(A, \cdot) = \emptyset$ en cualquier caso, lo anterior equivale a que:

$$A \cup \sigma(A, B \cap C) = \begin{cases} A \cup \sigma(A, B) \\ A \cup \sigma(A, C) \\ A \cup \sigma(A, B) \cup A \cup \sigma(A, C) \end{cases}$$

En términos del operador $-_w$ asociado a σ , es lo mismo que:

$$A -_w (B \cap C) = \begin{cases} A -_w B \\ A -_w C \\ (A -_w B) \cup (A -_w C) \end{cases}$$

Luego, como $\mathcal{V}$ es topological y $-$ está basada en $-_w$, lo anterior equivale a que:

$$\mathcal{T}(A) - (\mathcal{T}(B) + \mathcal{T}(C)) = \begin{cases} \mathcal{T}(A) - \mathcal{T}(B) \\ \mathcal{T}(A) - \mathcal{T}(C) \\ (\mathcal{T}(A) - \mathcal{T}(B)) \cap (\mathcal{T}(A) - \mathcal{T}(C)) \end{cases}$$

Que vía la biyección entre $\mathcal{K}$ y $C(\mathcal{V})$ coincide con renombrar $\mathcal{T}(A) = K$, $\mathcal{T}(B) = M$ y $\mathcal{T}(C) = N \in \mathcal{K}$. Por lo tanto, equivale a que $-$ satisfaga **(M-11)**. □

Demostración de Teorema 7.3.10. Sabemos por el Teorema 7.2.4 que $\ominus$ satisfaga **(M-2)** y **(M-4)** equivale a que está basada en un operador elementary world contraction $\ominus_w$. Además, por el Teorema 4.1.2 sabemos que estos operadores $\ominus_w$ pueden representarse como world shielded contraction, es decir existe:

- un operador $-_w$ que satisface **(W-1)**, **(W-2)** y **(W ♦ 3)** y
- una relación $\prec$ que por el Teorema 4.1.3 podemos construir a partir de $\ominus_w$ como $A \prec B^c$ si y sólo si $A \ominus B \not\subseteq B$ o bien $A = \emptyset$

tal que:

$$A \ominus_w B = \begin{cases} A -_w B & A \prec B^c \\ A & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Para concluir la equivalencia, notemos $-$ al operador elementary choice contraction que satisface **(CM-10)** basado en $-_w$ y consideramos $\prec^c$ una relación retractable basada en $\prec$. Como $\ominus$ está basada en $\ominus_w$, al aplicar $\mathcal{T}$ a la expresión anterior y considerando $A, B \in C(\mathcal{V})$ donde $K = \mathcal{T}(A)$ y $M = \mathcal{T}(B)$, nos queda que:

$$K \ominus M = \begin{cases} K - M & K \prec^c M \\ K & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Notar además que $K \prec^c M$ si y sólo si $M \not\subseteq K \ominus M$ o bien $K = \mathbb{L}$.

Respecto a las equivalencias que aparecen enumeradas, las dos primeras son transcripciones de los postulados de mundos. Por lo que estas equivalencias se deducen de forma directa a partir de que $\ominus$ está basada en $\ominus_w$. Notar además que únicamente utilizamos que $\mathcal{V}$ sea topological y complete para la construcción del operador *mmultiple shielded contraction*.

Para los últimos postulados sí es necesario utilizar que $\mathcal{V}$ sea complete para poder tener la biyección entre $\mathcal{V}$ y $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$. Luego, el conjunto $\mathcal{C}$ al que se hace referencia en los postulados **(M-3)** y **(M-4)** se interpreta como el conjunto C de los postulados **(W-3)** y **(W-4)**. Considerando esta observación, ahora es posible entender la transcripción entre los postulados *choice contraction* y *world contraction*. $\square$

Demostración de Teorema 7.3.11. Supongamos que $\diamond$ está débilmente basado en $\diamond_w$ un operador *world update*. Si $M \subseteq K \neq \mathbb{L}$, en términos de mundo significa que $\emptyset \neq \|K\| \subseteq \|M\|$ por la conexión de Galois. Como $\diamond_w$ satisface **(W4)**, resulta que $\|K\| \diamond_w \|M\| = \|K\|$. Luego, al aplicar $\mathcal{T}$ se obtiene que $K \diamond M = K$, y por lo tanto, $\diamond$ satisface **(4)**. Por otro lado, como $\diamond_w$ satisface **(WL1)**, sabemos que:

$$\|K \diamond M\| = Cl(\|K\| \diamond_w \|M\|) = Cl\left(\bigcup_{v \in \|K\|} \{v\} \diamond_w \|M\|\right)$$

Al aplicar $\mathcal{T}$ y por la biyección entre $\mathcal{V}$ y $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$, pues $\mathcal{V}$ es complete, nos queda que:

$$K \diamond M = \bigcap_{K \subseteq T \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}} T \diamond M$$

Para la vuelta, tomaremos un operador $\diamond'_w$ *world update* arbitrario y construiremos el siguiente operador $\diamond_w$ *world update*:

$$A \diamond_w B = \begin{cases} \bigcup_{v \in A} \|T_v \diamond \mathcal{T}(B)\| & \text{Si } B \in C(\mathcal{V}) \\ A \diamond'_w B & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Los postulados de *world update* se satisfacen trivialmente cuando $B \notin C(\mathcal{V})$ por construcción. Supongamos entonces que $B \in C(\mathcal{V})$. Como $\mathcal{T}(B) \subseteq T_v \diamond \mathcal{T}(B)$ por **(PM*4)**, tenemos que $\|T_v \diamond \mathcal{T}(B)\| = \|\mathcal{T}(B)\| = B$. Por lo tanto, $\diamond_w$ satisface **(W*1)**. De la misma manera, como $\diamond$ satisface **(PM*2)**, usando que $\|T_v + \mathcal{T}(B)\| = B \cap \{v\}$, se tiene que $A \cap B \subseteq A \diamond_w B$. Luego $\diamond_w$ satisface **(W*2)**. Que $\diamond_w$ satisface **(W4)** se deduce de **(4)**. Por último, $\diamond_w$ satisface **(WL1)** por construcción.

Notemos que $\mathcal{T}(\|K\| \diamond_w \|M\|) = \bigcap_{v \in \|K\|} \mathcal{T}(\|T_v \diamond M\|)$, usando la propiedad de $\mathcal{T}$. Como $\mathcal{T}(\|T_v \diamond M\|) = T_v \diamond M$ y por la biyección entre $\mathcal{V}$ y $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$, tenemos que:

$$\mathcal{T}(\|K\| \diamond_w \|M\|) = \bigcap_{K \subseteq T \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}} T \diamond M$$

Luego, $\mathcal{T}(\|K\| \diamond_w \|M\|) = K \diamond M$ por **(L1)**. Al aplicar $\|\cdot\|$, nos queda que:

$$Cl(\|K\| \diamond_w \|M\|) = \|K \diamond M\|$$

Lo que significa que $\diamond$ está débilmente basado en $\diamond_w$. $\square$

Demostración de Proposición 7.4.1. Por la idempotencia de Cn y los postulados **(PM*8)** y **(M*12)** resulta que:

$$K * M = Cn(K) * M = Cn(K) * Cn(M)$$

Por otro lado, el postulado **(PM*1)** afirma que la imagen del operador está en $\mathcal{K}$. Por lo tanto, el operador $\odot$ buscado es $*$ restringido a $\mathcal{K}$.

Supongamos ahora que $K * M = Cn(K) \odot Cn(M)$ para todo $K, M \subseteq \mathbb{L}$. Como el codominio de $\odot$ es $\mathcal{K}$, entonces $*$ satisface **(PM*1)**. Mientras que, por la caracterización de $*$, si $Cn(K) = Cn(K')$ se tiene que $K * M = K' * M$. Lo mismo sucede con $Cn(M) = Cn(N)$ y el hecho de que $K * M = K * N$. $\square$

Demostración de Teorema 7.4.2. Veamos que si $S \in \Sigma_{(K,M)}$ entonces $X = \mathcal{T}(\|K\| \cup S) \in (\mathcal{K} \cap M^-(K)) \cup \{K\}$, para chequear la buena definición de $\Psi_{(K,M)}$. Si $S = \emptyset$, entonces $X = K \in \mathcal{K}$. Si $S \neq \emptyset$, entonces $X \in \mathcal{K}$ y $X = \mathcal{T}(\|K\| \cup S) \subsetneq \mathcal{T}(\|K\|) = K$ por la biyección entre $\mathcal{K}$ y $C(\mathcal{V})$ y la conexión de Galois. Por lo que sólo falta ver que $Cn(M \cup X) = K$, que se puede probar vía mundos:

$$\begin{aligned} \|M \cup X\| &= \|M\| \cap \|X\| && \text{Por Teorema 7.1.2} \\ &= \|M\| \cap Cl(\|K\| \cup S) && \text{Por Definiciones de } Cl \text{ y } X \\ &= \|M\| \cap (\|K\| \cup S) && \text{Por Propiedad de } S \\ &= \|K\| && \text{Pues } \|K\| \subseteq \|M\| \text{ y } S \subseteq \|M\|^c \end{aligned}$$

Además, aplicando las mismas ideas, también vale que:

$$\|\mathcal{T}(\|K\| \cup S)\| \cap \|K\|^c = Cl(\|K\| \cup S) \cap \|K\|^c = (\|K\| \cup S) \cap \|K\|^c = S$$

Hagamos lo mismo para $\Psi_{(K,M)}^{-1}$, tomando $S = \|X\| \cap \|K\|^c$ con $X \in (\mathcal{K} \cap M^-(K)) \cup \{K\}$. Si $X = K$ entonces $S = \emptyset \in \Sigma(K, M)$ vacuamente. Si $X \subsetneq K$ sabemos que $\|K\| \subsetneq \|X\|$, por lo que $S \neq \emptyset$. Además, $S \cup \|K\| = \|X\| \cup \|K\| = \|X\|$ por lo que $S \cup \|K\| \in C(\mathcal{V})$. Por otro lado, de la definición de X tenemos que $\|X \cup M\| = \|K\|$. Luego, $\|X\| \cap \|M\| = \|K\|$ por Teorema 7.1.2. Esto implica que $\|X\| \cap \|K\|^c \cap \|M\| = \emptyset$, es decir, $S \cap \|M\| = \emptyset$. Concluimos entonces que $S = \|X\| \cap \|K\|^c \in \Sigma_{(K,M)}$. Pero además, tenemos que:

$$\mathcal{T}(\|K\| \cup (\|X\| \cap \|K\|^c)) = \mathcal{T}(\|X\|) = X$$

Vimos entonces que las funciones están bien definidas y ambas composiciones dan las funciones identidad de cada conjunto. Por lo que podemos afirmar que $\Psi_{(K,M)}$ es biyectiva. $\square$

Demostración de Lema 7.4.4. 1. Usando que $\mathcal{V}$ es topological, sabemos que:

$$\|K \cap (T \cup \{\alpha\})\| = \|K\| \cup \|T \cup \{\alpha\}\| = \|K\| \cup \|\mathbb{L}\| = \|K\|$$

Aplicando $\mathcal{T}$ tenemos que $K = Cn(K) = Cn(K \cap (T \cup \{\alpha\}))$, que se puede reescribir como $Cn((K \cap T) \cup \{\alpha\})$.

2. Supongamos que $K \cap T' \subsetneq K \cap T$, entonces existe $\alpha \in K \cap T$ tal que $\alpha \notin K \cap T'$. En particular, $\alpha \in K$ y $\alpha \notin T'$. Por el ítem anterior, $K = Cn((K \cap T') \cup \{\alpha\}) \subseteq K \cap T \subseteq T$. Por lo tanto $K \subseteq T$, una contradicción.

3. Si $K \cap T = K \cap T'$ entonces $\alpha \in T$ si y sólo si $\alpha \in T'$ para todo $\alpha \in K$. Luego, si $T \neq T'$ entonces existe $\alpha \notin K$ tal que $\alpha \notin T$ y $\alpha \in T'$. Ahora comparamos usando que $\mathcal{V}$ es topological:

$$\begin{aligned} Cn((K \cap T) \cup \{\alpha\}) &= Cn((K \cup \{\alpha\}) \cap (T \cup \{\alpha\})) \\ &= \mathcal{T}(\|K \cup \{\alpha\}\| \cup \|T \cup \{\alpha\}\|) \\ &= \mathcal{T}(\|K \cup \{\alpha\}\|) \cap \mathcal{T}(\|T \cup \{\alpha\}\|) \\ &= (K + \alpha) \cap \mathbb{L} && = K + \alpha \\ Cn((K \cap T') \cup \{\alpha\}) &= Cn((K \cup \{\alpha\}) \cap (T' \cup \{\alpha\})) \\ &= \mathcal{T}(\|K \cup \{\alpha\}\| \cup \|T' \cup \{\alpha\}\|) && = (K + \alpha) \cap T' \end{aligned}$$

Luego $K \subseteq K + \alpha = (K + \alpha) \cap T' \subseteq T'$, concluyendo que $K \subseteq T'$, una contradicción. $\square$

Demostración de Lemma 7.4.5. Sea $A \in \max(Y)$. Como $Z \subseteq Y$, significa que $B \leq A$ para todo $B \in Z$. Además, $\max(Y) \subseteq Z$. En particular, $A \in Z$. Luego $A \in \max(Z)$. Concluimos entonces que $\max(Y) \subseteq \max(Z)$ y también tenemos que $\emptyset \neq \max(Z)$.

Sea $B \in \max(Z)$. Como $\max(Y) \subseteq Z$, significa que $A \leq B$ para todo $A \in \max(Y)$. Además, $\max(Z) \subseteq Z \subseteq Y$. En particular, $B \in Y$. Luego $B \in \max(Y)$. Concluimos entonces que $\max(Z) \subseteq \max(Y)$.

Por la doble inclusión $\max(Y) = \max(Z)$.

La prueba para min es análoga. $\square$

Demostración de Teorema 7.4.6. Supongamos que $K \perp_c M \neq \emptyset$. Por definición,

$$K \perp_c M = \max(\{X \mid X \subseteq K, M \not\subseteq Cn(X)\})$$

Veamos que es posible aplicar el Lema 7.4.5:

1. $K \perp_c M \subseteq \{K \cap T \mid T \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, M \not\subseteq T\}$:

Supongamos que $X \in K \perp_c M$. Por **(C_⊥3)** se deduce que $X \in \mathcal{K}$: si $X \neq Cn(X)$, tomo $X' = Cn(X)$ y tiene que valer que $M \subseteq Cn(X') = Cn(X)$, lo que nos lleva a una contradicción. Sabemos entonces que $M \not\subseteq X$, entonces $\|X\| \not\subseteq \|M\|$, por lo que existe $v \in \|X\|$ tal que $v \notin \|M\|$. Como $\mathcal{V}$ es complete, v está asociado a un conjunto maximal consistente que notaremos T . Por lo tanto, $\|T\| = \{v\}$. Luego, $X \subseteq T$ y $M \not\subseteq T$ por la conexión de Galois. Se deduce entonces que $X \subseteq K \cap T$. Queremos ver la igualdad. Si $X = K$, entonces $K = K \cap T$. En cambio si $X \neq K$, se deduce de la definición del conjunto de remainders que $M \subseteq K$. Si $X \neq K \cap T$, nuevamente por **(C_⊥3)** se deduce que $Cn(K \cap T) = K$. Pero esto implicaría que $M \subseteq Cn(K \cap T) \subseteq T$, de lo que se deduce que $M \subseteq T$, llegando a una contradicción. Luego, $X = K \cap T$. En cualquier caso, tenemos que $X = K \cap T$ y $M \not\subseteq T$.

2. $\{K \cap T \mid T \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, M \not\subseteq T\} \subseteq \{X \mid X \subseteq K, M \not\subseteq Cn(X)\}$:

Supongamos que $T \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ tal que $M \not\subseteq T$ y tomemos $X = K \cap T$. Entonces $X \subseteq K$ y $Cn(X) \subseteq T$. En particular, $M \not\subseteq Cn(X)$, por lo que $X \in \{X \mid X \subseteq K, M \not\subseteq Cn(X)\}$.

Si $K \perp_c M = \emptyset$, entonces ningún subconjunto X de K cumple que $M \not\subseteq Cn(X)$. En particular el caso $X = \emptyset$. Luego $M \subseteq Cn(\emptyset)$, es decir M es un conjunto de tautologías. Por lo tanto, $M \subseteq T$ para todo $T \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$. Concluimos entonces que $\{K \cap T \mid T \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, M \not\subseteq T\} = \emptyset$.

A partir del Lema 7.4.5, concluimos entonces que:

$$K \perp_c M = \max(\{K \cap T \mid T \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, M \not\subseteq T\})$$

Por último, $K \perp_c M \subseteq \mathcal{K}$ se deduce de que $K \cap T \in \mathcal{K}$ pues tanto K como T son teorías. $\square$

Demostración de Corolario 7.4.7. Por el Teorema 7.4.6 sabemos que:

$$K \perp_c M = \max(\{K \cap T \mid T \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, M \not\subseteq T\})$$

Por hipótesis tenemos que $M \subseteq K$, por lo que $K \notin K \perp_c M$. Luego, si $K \cap T \subseteq K \cap T'$ y cumplen que $K, M \not\subseteq T$ y $K, M \not\subseteq T'$, por el Lema 7.4.4 resulta que entonces $T = T'$. Por lo tanto, los elementos del conjunto $\{K \cap T \mid T \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, M \not\subseteq T\}$ en este caso son incomparables. $\square$

Demostración de Teorema 7.4.8. Supongamos que $K \downarrow_p N \neq \emptyset$. Por definición,

$$K \downarrow_p N = \max(\{X \mid X \subseteq K, X \cup N \not\models \perp\})$$

Luego, por el Lema 7.4.5, basta ver que:

1. $K \downarrow_p N \subseteq \{K \cap T \mid T \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, N \subseteq T\}$:

Consideremos $X \in K \downarrow_p N$ y sea $T \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ tal que $X \cup N \subseteq T$. Notemos que siempre existe tal T , pues $\|X \cup N\| \neq \emptyset$ por **(P_⊥2)**. Entonces existe $v \in \|X \cup N\| = \|X\| \cap \|N\|$, que al ser $\mathcal{V}$ complete está asociado a un elemento de $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$.

Luego, $X \subseteq K \cap T$ por **(P_⊥1)**. Supongamos que $X \subsetneq K \cap T$, entonces por **(P_⊥3)** vale que $(K \cap T) + N = \mathbb{L}$. Pero $(K \cap T) + N \subseteq T$, llegando a una contradicción. Por lo tanto, $X = K \cap T$, y podemos concluir que $X \in \{K \cap T \mid T \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, N \subseteq T\}$.

2. $\{K \cap T \mid T \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, N \subseteq T\} \subseteq \{X \mid X \subseteq K, X \cup N \not\models \perp\}$:

Sea $T \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ tal que $N \subseteq T$. Tal T siempre existe pues supusimos que $K \downarrow_p N \neq \emptyset$, y eso implica que $N \neq \mathbb{L}$. Si tomamos $X = K \cap T$, entonces $X \subseteq K$ y $X \cup N \subseteq T$. En particular, $X + N \neq \mathbb{L}$, o equivalentemente, $X \cup N \not\models \perp$. Es decir, $X \in \{X \mid X \subseteq K, X \cup N \not\models \perp\}$.

Si $K \downarrow_p N = \emptyset$, entonces ningún subconjunto de K que satisfaga $(\mathbf{P}_{\downarrow} \mathbf{2})$, incluso $\emptyset$. Por lo tanto $N \models \perp$. Esto significa que $N \not\subseteq T$ para todo $T \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$. Concluimos entonces que $\{K \cap T \mid T \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, N \subseteq T\} = \emptyset$.

A partir del Lema 7.4.5 y la situación anterior, podemos afirmar que:

$$K \downarrow_p N = \max\{K \cap T \mid T \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, N \subseteq T\}$$

Si sabemos además que $\mathcal{V}$ es topological, podemos utilizar el Lema 7.4.4, excepto en el caso en que $K \cap T = K$. Pero esta excepción no ocurre si $K + N = \mathbb{L}$, pues significa que $\|K\| \cap \|N\| = \emptyset$, es decir, $K \cap T \neq K$ para todo $N \subseteq T \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$. En tal caso, si $K \cap T \subseteq K \cap T'$ y se cumple que $K \not\subseteq T$ y $K \not\subseteq T'$, por el Lema 7.4.4 resulta que entonces $T = T'$. Por lo tanto, los elementos del conjunto $\{K \cap T \mid T \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, N \subseteq T\}$ en este caso son incomparables y están en biyección con los de $\|N\|$ por ser $\mathcal{V}$ complete. $\square$

Demostración de Proposición 7.4.10.

1. Por construcción, si $B \notin C(\mathcal{V})$ entonces σ satisface el comportamiento de una función world-selection, como también el de las funciones V-compliant, normal y semantically successful. En este último caso, notar que si $A \subseteq B$, entonces $A^c \cap B^c = B^c \notin C(\mathcal{V})$. Además, como $\mathcal{V}$ es complete, sabemos que $\{v\} \in C(\mathcal{V})$, por lo que $A \cup \{v\} \in C(\mathcal{V})$ pues $\mathcal{V}$ es topological.

Supongamos entonces que $B \in C(\mathcal{V})$. En tal caso:

$$\sigma(A, B) = \mathbb{W}(\mathcal{T}(A), \gamma(\mathcal{T}(A), \mathcal{T}(A) \perp_c \mathcal{T}(B)))$$

Si $A \not\subseteq B$ entonces $\mathcal{T}(A) \perp_c \mathcal{T}(B) = \{\mathcal{T}(A)\}$, luego $\gamma(\mathcal{T}(A), \mathcal{T}(A) \perp_c \mathcal{T}(B)) = \{\mathcal{T}(A)\}$ y $\sigma(A, B) = \emptyset$. Además, si $A \subseteq B$ entonces $\emptyset \neq \mathcal{T}(A) \perp_c \mathcal{T}(B) \neq \{\mathcal{T}(A)\}$. Por el Corolario 7.4.7, sabemos que $\gamma(\mathcal{T}(A), \mathcal{T}(A) \perp_c \mathcal{T}(B))$ se trata de una selección de conjuntos de la forma $\mathcal{T}(A) \cap T_v$ con $v \in B^c$ pues $B \in C(\mathcal{V})$. Luego:

$$\mathbb{W}(\mathcal{T}(A), \gamma(\mathcal{T}(A), \mathcal{T}(A) \perp_c \mathcal{T}(B))) \subseteq B^c$$

Esto nos confirma que σ es una función world-selection normal y semantically succesful. Por otro lado, si $K = \mathcal{T}(A)$, $M = \mathcal{T}(B)$ y $X = \gamma(K, K \perp_c \mathcal{T}(B))$ del Teorema 7.4.2 tenemos que:

$$\mathbb{W}(K, X) = Cl(\{v \in \mathcal{V} \mid K \cap T_v \in X\}) \cap \|K\|^c = \Psi_{(K, M)}^{-1}(\mathcal{T}(\{v \in \mathcal{V} \mid K \cap T_v \in X\}))$$

Por lo que $\mathbb{W}(K, X)$ es un posible valor para una función world-selection, que al ser $\mathcal{V}$ topological significa que σ es V-compliant.

2. La demostración es análoga al ítem anterior, utilizando el Teorema 7.4.8.
3. Veamos primero que γ está bien definida. Sean $K \in \mathcal{K}$ y $X \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{K})$ tal que existe $M, M' \subseteq \mathbb{L}$ tal que $X = K \perp_c M = K \perp_c M'$. Notemos que $M \not\subseteq K$ si y sólo si $M' \not\subseteq K$. Por lo que en cualquier caso, si $M \not\subseteq K$ entonces $\sigma(\|K\|, \|M\|) = \sigma(\|K\|, \|M'\|) = \emptyset$ pues σ es normal. Si $M \subseteq K$, el Corolario 7.4.7 afirma que $K \perp_c M$ está en biyección con $\|M\|^c$, donde un elemento de $K \cap T_v \in K \perp_c M$ está asociado a $v \in \|M\|^c$ y $\|T_v\| = \{v\}$. Lo mismo sucede con $K \perp_c M'$ y $\|M'\|^c$, por lo que podemos deducir que $\|M\|^c = \|M'\|^c$. Por lo tanto, $\sigma(\|K\|, \|M\|) = \sigma(\|K\|, \|M'\|)$. El mismo análisis se puede aplicar para el caso en que existe $N, N' \subseteq \mathbb{L}$ tal que $X = K \downarrow_p N = K \downarrow_p N'$, utilizando en este caso la biyección del Teorema 7.4.8.

Nos queda ver ahora el caso en que existan $M, N \subseteq \mathbb{L}$ tal que $X = K \perp_c M = K \downarrow_p N$. Como notamos anteriormente, $M \not\subseteq K$ si y sólo si $N + K \neq \mathbb{L}$. Por lo que si $M \not\subseteq K$ entonces $\sigma(\|K\|, \|M\|) = \sigma(\|K\|, \|N\|^c) = \emptyset$ pues σ es normal. Si $M \subseteq K$, las biyecciones del Corolario 7.4.7 y del Teorema 7.4.8 nos afirman que $\|M\| = \|N\|^c$, por lo que $\sigma(\|K\|, \|M\|) = \sigma(\|K\|, \|N\|^c)$. Concluimos entonces que σ está bien definida.

Para ver que σ es una función de selección, supongamos primero que $X = \emptyset$. Notemos que, si $M = Cn(\emptyset)$, por la biyecciones del Corolario 7.4.7 se deduce que $K \perp_c M = \emptyset$. Por definición de función world-selection, tenemos que $\sigma(\|K\|, \|M\|) \subseteq \|K\|^c \cap \|M\|^c = \emptyset$. Luego, $\gamma(K, \emptyset) = \{K\}$ por definición de $\mathbb{R}$.

Si ahora $X \neq \emptyset$ y no hay manera de presentarlo como un conjunto de choice remainders u package openings, por construcción sabemos que $\gamma(K, X) = X \neq \emptyset$. Supongamos que hay alguna manera de representarlo, es decir, existe $B \in C(\mathcal{V}) \cup O(\mathcal{V})$ tal que $\gamma(K, X) = \mathbb{R}(K, \sigma(\|K\|, B))$. En tal caso, puede pasar que $\|K\| \not\subseteq B$. Esto significa que originalmente $X = \{K\}$. Como σ es normal, tenemos que $\sigma(\|K\|, B) = \emptyset$, por lo que $\gamma(K, X) = \mathbb{R}(K, \emptyset) = \{K\}$. Si, en cambio, $\|K\| \subseteq B$, significa que $X \neq \{K\}$ y que $X = \{K \cap T_v \mid v \in B^c\}$ por las biyecciones de choice remainders o de package openings. En cualquier caso, sabemos que $\sigma(\|K\|, B) \neq \emptyset$, pues σ es semantically successful, y $\sigma(\|K\|, B)$ es un subconjunto de B^c . Luego $\emptyset \neq \gamma(K, X) \subseteq X$ por definición de $\mathbb{R}$.

Calculemos entonces las igualdades finales, usando los resultados anteriores, junto con que $\mathcal{V}$ es topological, complete y σ V-compliant:

$$\begin{aligned} \|\bigcap \gamma(K, K \perp_c M)\| &= \|\bigcap \mathbb{R}(K, \sigma(\|K\|, \|M\|))\| = \|K \cap \mathcal{T}(\sigma(\|K\|, \|M\|))\| \\ &= \|K\| \cup Cl(\sigma(\|K\|, \|M\|)) = \|K\| \cup \sigma(\|K\|, \|M\|) \\ \|\bigcap \gamma(K, K \downarrow_p M)\| &= \|\bigcap \mathbb{R}(K, \sigma(\|K\|, \|M\|^c))\| = \|K \cap \mathcal{T}(\sigma(\|K\|, \|M\|^c))\| \\ &= \|K\| \cup Cl(\sigma(\|K\|, \|M\|^c)) = \|K\| \cup \sigma(\|K\|, \|M\|^c) \end{aligned}$$

□

Demostración de Corolario 7.4.15. Para las identidades, trabajaremos en mundos, utilizando $\|\cdot\|$ y $\mathcal{T}$ para movernos entre $\mathcal{K}$ y $C(\mathcal{V})$. Para la de Harper, tenemos que:

$$\begin{aligned} \|(K * \neg M) \cap K\| &= Cl((\|K\| *_w \|M\|^c) \cup \|K\|) \\ &= Cl(\|K\| \cup \sigma(\|K\|, \|M\|)) \\ &= Cl(\|K\| -_w \|M\|) \\ &= Cl(\|K - M\|) \\ &= \|K - M\| \end{aligned}$$

Para la de Levi, usamos que:

$$\begin{aligned} \|(K - \neg M) + M\| &= (\|K\| -_w \|\neg M\|) \cap \|M\| \\ &= (\|K\| \cap \|M\|) \cup (\sigma(\|K\|, \|M\|^c) \cap \|M\|) \\ &= (\|K\| \cap \|M\|) \cup \sigma(\|K\|, \|M\|^c) \\ &= \|K\| *_w \|M\| \\ &= \|K * M\| \end{aligned}$$

□

Demostración de Lema 7.4.16. Esta claro que si $Cn(M) \not\subseteq K$ o $Cn(\emptyset) = Cn(M)$ vale que $M^-(K) \neq \emptyset$ por definición. Supongamos entonces que $Cn(\emptyset) \subsetneq Cn(M) \subseteq K$. En términos de mundos, esto significa que $\|K\| \subseteq \|M\| \neq \mathcal{V}$. Luego, $\|M\|^c \neq \emptyset$. Tomemos $v \in \|M\|^c$. Como $M \in \mathcal{K}_f$, entonces $\|M\| \in CO(\mathcal{V})$, por lo que $\|M\|^c \in CO(\mathcal{V})$. Por lo tanto, tenemos que $Cl(v) \subseteq Cl(\|M\|^c) = \|M\|^c$, pues $\|M\|^c \in C(\mathcal{V})$.

Consideremos $X = \mathcal{T}(Cl(v)) \cap K \in \mathcal{K}$. Notemos que $\|X\| = \|\mathcal{T}(Cl(v)) \cap K\| = Cl(\{v\}) \cup \|K\|$. Como $\|K\| \subseteq \|M\|$ y $Cl(v) \cap \|M\| = \emptyset$ entonces $Cl(v) \cap \|K\| = \emptyset$. Luego

$\|K\| \subsetneq Cl(\{v\}) \cup \|K\| = \|X\|$. Por lo tanto, por la biyección entre $\mathcal{K}$ y $C(\mathcal{V})$ y la conexión de Galois, concluimos que $X = Cn(X) \subsetneq K$. Además, $\|M \cup X\| = \|M\| \cap \|X\| = \|M\| \cap (Cl(\{v\}) \cup \|K\|) = \|K\|$. Entonces $X \in M^-(K)$. $\square$

Demostración de Proposición 7.4.17. Por la idempotencia de Cn y el postulado **(AGM*5)** resulta que:

$$K * \mu = K * Cn(\mu)$$

Por otro lado, el postulado **(AGM*1)** afirma que la imagen del operador está en $\mathcal{K}$. Por lo tanto, el operador $\odot$ buscado es $*$ restringido a $\mathcal{K}$ en el codominio y combinado con la biyección entre $\mathcal{K}_f$ y $\mathcal{L}$ como álgebra de Boole.

Supongamos ahora que $K * \mu = K \odot Cn(\mu)$ para todo $K \in \mathcal{K}$ y $\mu \in \mathbb{L}$. Como el codominio de $\odot$ es $\mathcal{K}$, entonces $*$ satisface **(PM*1)**. Mientras que, si $\mu \equiv \nu$, o equivalentemente $Cn(\mu) = Cn(\nu)$, se tiene que $K * \mu = K * \nu$. $\square$

Demostración de Proposición 7.4.18. Dado $\bullet : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$, definimos $\bullet_w : \mathcal{P}(\mathcal{V}) \times \mathcal{P}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V})$ a partir de $\bullet$ de la siguiente forma:

$$A \bullet_w B = \|\mathcal{T}(A) \bullet \mathcal{T}(B)\|$$

El operador está bien definido por la biyección entre $\mathcal{K}$ y $\mathcal{P}(\mathcal{V})$: cualquier conjunto de $\mathcal{V}$ está unívocamente representado por un elemento de $\mathcal{K}$ vía $\mathcal{T}$. Luego, por la construcción de $\bullet_w$ y la biyección entre $\mathcal{K}$ y $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ tenemos que $\bullet$ está basado en $\bullet_w$. $\square$

Capítulo 8

Conclusiones y Trabajo Futuro

El progreso se nos debe a los
insatisfechos.

Insaciable, Cuarteto de Nos
(2012)

En el capítulo final, analizaremos lo desarrollado en este trabajo, si se lograron cumplir los objetivos planteados y qué cuestiones quedaron pendientes. También remarcaremos cómo se fueron desarrollando los cuestionamientos presentados al final de la Sección 2.1.

8.1 Conclusiones

En esta tesis se planteó y desarrolló un enfoque homogéneo para una diversidad de modelos y operadores de cambio conocidos en la literatura. Este enfoque, planteado como marco conceptual dentro de la teoría AGM, define operadores de cambio de creencias sobre un conjunto de índices $\mathcal{I}$, cuyos elementos llamamos mundos. Estos mundos no están vinculados a una lógica subyacente, por lo que desarrollamos una teoría de cambio de creencias ajena a interpretaciones semánticas.

Bajo este marco conceptual general, propusimos una nueva familia de operadores, los operadores world versatile. Esta familia logra capturar simultáneamente, en el contexto de mundos, las familias de operadores AGM, de operadores update y erase, de operadores shielded contraction y de varios operadores revision no priorizados. De esta forma, logramos que estas familias ahora puedan vincularse en un único árbol de familias de operadores, cumpliendo así uno de nuestros objetivos.

Presentamos varios conceptos claves para desarrollar la familia de operadores world versatile. El primero es el de funciones world-selection, caracterizadas como $\sigma(A, B) \subseteq A^c \cap B^c$ para todo $A, B \subseteq \mathcal{I}$. A nivel constructivo de operadores, estas funciones quedaron fuertemente vinculadas a los postulados revision inclusion y recovery/shared success. Además, se pudo capturar en términos de propiedades los demás postulados clásicos, permitiendo una nueva perspectiva a los Cuestionamientos 6 y 7. Paralelamente, presentamos modelos para los conceptos de credibilidad y cuestionabilidad, interpretados como actitudes epistémicas representadas en forma de relaciones entre conjuntos. Estos conceptos también fueron capturados por las funciones world-selection, agregando a la nueva perspectiva el Cuestionamiento 4. Así fue como vimos que un operador versatile se define a partir de dos funciones world-selection, una función σ asociada a la credibilidad y otra función ρ asociada a la cuestionabilidad. Utilizando a su vez que una función world-selection caracteriza un operador revision y contraction, vimos que es posible construir operadores versatile a partir de o bien un par de operadores revision o un par de operadores contraction. La combinación de estos conceptos nos permitió dar luz al comportamiento de las Identidades de Levi

y Harper, viendo que los operadores *revision* y *contraction* asociados a los operadores *versatile* se deducen de las construcciones de Levi y Harper. Es decir, vimos que estas construcciones pueden interpretarse como proyecciones de los operadores *versatile* en sus operadores *revision* y *contraction* asociados. Se respondió entonces al Cuestionamiento 8, dando un operador que está más allá de la dualidad Levi-Harper.

Finalmente, mostramos cómo asignarle una lógica tarskiana y un valor semántico a los mundos del conjunto de índices $\mathcal{I}$: alcanza con asociarlos al conjunto de valuaciones que caracterizan a este tipo de lógicas. Concretamente, probamos que una condición suficiente para reconstruir los marcos conceptuales de AGM, Katsuno y Mendelzon y de cambio múltiple para teorías sería trabajar con lógicas con un conector disyuntivo clásico y que tenga teorías maximales consistentes. De esta forma se pudo capturar parcialmente la dimensión temporal a la que se refiere el Cuestionamiento 3, como a la vez resolver el Cuestionamiento 2, considerando al conjunto de creencias como un parámetro más, capaz de incluso ser inconsistente.

8.2 Trabajo Futuro

En esta tesis desarrollamos una presentación general que sintetiza la diversidad de modelos y marcos conceptuales de la teoría de cambio de creencias, cubriendo desde los operadores clásicos AGM y los operadores *erase* y *update*, pasando por los operadores de cambio no priorizados y por los operadores múltiples sobre teorías, no sólo para lógicas CPL sino incluso para lógicas no clásicas. Pero en la teoría de cambio de creencias existen más modelos, enfocados por ejemplo en usar bases en vez de teorías, con múltiples entradas de conjuntos de creencias o bien con operadores que combinan entradas epistémicas múltiples e iteradas. Y además de todo esto, se busca que todas estas variantes puedan ser implementadas de forma algorítmica. A partir de las bases dadas en este trabajo, se abren varias posibles líneas de investigación. Algunas de ellas se enlistan aquí:

Operadores Versatile con una función de transformación: entre los operadores de cambio no priorizados que no cubrimos se encuentra *selective revision*, que aplica una función que reinterpreta la observación recibida antes ser utilizada en un operador *revision*. En un trabajo futuro se presentaría a la familia de operadores *selective revision* en el marco conceptual de mundos para luego ser comparado con la familia de operadores *versatile*. Es posible ver que los únicos operadores simultáneamente *moderated revision* y *selective revision* son los operadores *revision*.

Operadores Versatile Dependientes de la Sintaxis: Trabajar con el marco conceptual de mundos nos llevó inevitablemente a adoptar los postulados *closure* y *extensionality*, no pudiendo abordar los Cuestionamientos 1 y 5. Esto se debe principalmente a que, para poder utilizar la función *world-selection* debemos trabajar con el conjunto de mundos posibles tanto del conjunto de creencias como del conjunto de observaciones. El objetivo sería entonces definir una función *world-selection* cuyos parámetros sean los conjuntos de creencias y de observaciones, sin tener que pasar por la función $\| \cdot \|$. Esta nueva función, ahora sensible a la sintaxis de los conjuntos, preservaría la característica de las funciones *world-selection*, eligiendo mundos (vistos como teorías maximales consistentes) que no sean ni del conjunto de creencias y ni del de observaciones.

Operadores Versatile que distinga entornos estáticos y dinámicos: Distinguir si una nueva observación es utilizada para corregir o actualizar el conjunto de creencias debería tener un comportamiento similar al de credibilidad o cuestionabilidad. Esta dualidad también puede presentarse como una relación e interpretarse como una actitud epistémica. El problema radica entonces en cómo representar el comportamiento local que toman los operadores según cada caso.

Operadores Versatile Iterativos: Todos los operadores que pudimos capturar están pensados para aplicarse para un conjunto de creencias y una observación (o muchas observaciones). Pero toda esa información extralógica que se utilizó para construir el nuevo conjunto de creencias no puede recuperarse. Esto también sucede con los operadores versatile. Los operadores iterativos se centran en cómo preservar esta información. Los operadores más conocidos utilizan la versión de preórdenes totales de los operadores AGM, presentando cómo se modifican estos preórdenes al incorporar la nueva información. Otros incluyen un parámetro de credibilidad que puede modificarse para observaciones consideradas no creíbles. Los operadores versatile tienen una estructura compleja para poder realizar los estudios que se hacen para revision, por lo que primero debería buscarse un nuevo enfoque que sea capaz de lidiar con esta estructura.

Implementación algorítmica de Operadores Versatile: Algo que quedó demostrado en este trabajo es la centralidad de las funciones world-selection para los operadores versatile: en ellas se resume todo el comportamiento extralógico de un agente, incluyendo credibilidad y cuestionabilidad. Para una implementación algorítmica, es necesaria una codificación en términos de mundos posibles tanto del conjunto de creencias como de las observaciones. Pero también es necesario entender qué información extralógica codifican las funciones world-selection.

Extensión de Operadores Versatile a más lógicas no clásicas: En términos generales, podemos decir que se logró identificar sobre qué tipo de lógicas tarskianas es posible materializar el marco conceptual de mundos. La extensión a lógicas no tarskianas puede verse de diferentes formas. Por un lado, es sabida la conexión entre lógicas no-monotónicas y operadores revision, donde gracias a que aún se preserva la idempotencia de Cn es posible seguir hablando de teorías. En cambio, si lo que se busca debilitar es la idempotencia, ya no es posible definir a las funciones $\parallel \cdot \parallel$ y $\mathcal{T}$ tal y como se hizo en este trabajo, por lo que una posibilidad deba ser trabajar con bases de creencias.

Por otro lado, el desarrollo de esta tesis da lugar a profundizar aún más sobre algunos cuestionamientos. Por ejemplo, se revalorizó el rol del postulado recovery, interpretado como el postulado shared success desde la perspectiva de los operadores versatile; se dio una nueva interpretación de las identidades de Levi y Harper; se trabajó de forma implícita el concepto de estado epistémico, considerando al conjunto de creencias como un parámetro y en la misma categoría operativa que la observación, analizando incluso el caso inconsistente y dando otra mirada al problema de la negación de teorías; identificamos como actitudes epistémicas a la credibilidad y cuestionabilidad, presentadas como relaciones, distinguiéndose de las actitudes clásicas; y por último, se trazó un vínculo entre operadores de cambio de creencias y topologías, abriendo el abanico de herramientas matemáticas.

Se realizaron diferentes publicaciones como parte de la elaboración de este trabajo. En [14] se definen los operadores local promotion, en [29] se propusieron operadores shielded contraction en el contexto de ensconement, y en [15] se presentó a la familia de operadores moderated revision. El análisis de operadores shielded contraction en el contexto de ensconement permitió profundizar en el objeto de estudio del Capítulo 4. Por otro lado, los operadores local promotion y los operadores moderated revision son dos variantes particulares de operadores versatile, presentadas bajo el framework de Katsuno y Mendelzon. En ambos, es posible ver la estructura y la diversidad de propiedades típica de los operadores versatile que aparece en el Capítulo 6. Por último, está actualmente en revisión [16], donde se presenta el marco general del Capítulo 3 y los resultados más relevantes del Capítulo 7.

Referencias Bibliográficas

- [1] Carlos E. Alchourrón, Peter Gärdenfors y David Makinson. «On the logic of theory change: Partial meet contraction and revision functions». En: *The Journal of Symbolic Logic* 50 (1985), págs. 510-530.
- [2] Giacomo Bonanno. «Filtered Belief Revision and Generalized Choice Structures». En: *SSRN Electronic Journal* (2020).
- [3] Carlos Caleiro et al. «Suszko's Thesis and dyadic semantics». En: 2003.
- [4] Raúl Carnota y Ricardo Rodríguez. «AGM Theory and Artificial Intelligence». En: *Belief Revision meets Philosophy of Science*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2011, págs. 1-42.
- [5] Adnan Darwiche y Judea Pearl. «On the Logic of Iterated Belief Revision». En: *Artificial Intelligence* 89.1-2 (1997), págs. 1-29.
- [6] Eduardo Fermé y Sven O. Hansson. «Shielded Contraction». En: *Applied Logic Series* 22 (2001), págs. 85-107.
- [7] Eduardo Fermé et al. «Credible Models of Belief Update». En: *Proceedings of the 20th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning*. 2023, págs. 252-261.
- [8] Giorgos Flouris, Dimitris Plexousakis y Grigoris Antoniou. «On Generalizing the AGM Postulates». En: *Proceedings of the 2006 Conference on STAIRS 2006: Proceedings of the Third Starting AI Researchers' Symposium*. NLD: IOS Press, 2006, págs. 132-143.
- [9] André Fuhrmann. «Relevant logics, modal logics and theory change». Tesis doct. Australian National University, 1988.
- [10] André Fuhrmann. *An Essay on Contraction*. Center for the Study of Language e Inf, 1996.
- [11] André Fuhrmann y Sven O. Hansson. «A Survey of Multiple Contractions». En: *Journal of Logic, Language, and Information* 3.1 (1994), págs. 39-75.
- [12] Marco Garapa. «Two Level Credibility-Limited Revisions». En: *The Review of Symbolic Logic* 15.2 (2022), págs. 388-408.
- [13] Peter Gardenfors y Hans Rott. «Belief Revision». En: *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*. Oxford University Press, 1995.
- [14] Daniel Grimaldi, M. Vanina Martínez y Ricardo O. Rodríguez. «Updating the Belief Promotion Operator». En: *Proceedings of the Thirtieth International Joint Conference on Artificial Intelligence, IJCAI-21*. 2021, págs. 1901-1907.
- [15] Daniel Grimaldi, M. Vanina Martínez y Ricardo O. Rodríguez. «Moderated Revision». En: *International Journal of Approximate Reasoning* 166 (2024), págs. 109-126.

- [17] Adam Grove. «Two Modellings for Theory Change». En: *Journal of Philosophical Logic* 17.2 (1988), págs. 157-170.
- [18] Joseph Y. Halpern. «Reasoning About Knowledge: An Overview». En: *Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge*. 1986.
- [19] Sven O. Hansson. «Belief base dynamics». Tesis doct. Uppsala University, 1991.
- [20] Sven O. Hansson. «Reversing the Levi Identity». En: *Journal of Philosophical Logic* 22.6 (1993), págs. 637-669.
- [21] Sven O. Hansson et al. «Credibility Limited Revision». En: *The Journal of Symbolic Logic* 66 (2001), págs. 1581-1596.
- [22] William L. Harper. «Rational Conceptual Change». En: *PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association* 1976 (1976), págs. 462-494.
- [23] Hirofumi Katsuno y Alberto O. Mendelzon. «On The difference between update a knowledge base and revising it». En: *Proceedings of the Second International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning*. 1991, págs. 387-394.
- [24] Hirofumi Katsuno y Alberto O. Mendelzon. *Propositional knowledge base revision and minimal change*. Inf. téc. Technical Report n°3, Department of Computer Science, University of Toronto, 1991.
- [25] Stefan Kaufmann. «The Limit Assumption». En: *Semantics and Pragmatics* 10.18 (2017).
- [26] Kazimierz Kuratowski y Mark Bowron. «Sur l'Opération A de l'Analysis Situs (in French), Fund. Math. 3 (1922), 182–199 (On the Operation A in Analysis Situs: English translation by Mark Bowron)». En: *Fundamenta Mathematicae* 3 (2010), págs. 182-199.
- [27] Isaac Levi. «Subjunctives, Dispositions and Chances». En: *Synthese* 34.4 (1977), págs. 423-455.
- [28] Sten Lindström. «A semantic approach to nonmonotonic reasoning: Inference operations and choice». En: *Theoria* 88.3 (2022), págs. 494-528.
- [29] Alejandro J. Mercado, Daniel Grimaldi y Ricardo O. Rodriguez. «Weak-Ensconcement for Shielded Base Contraction». En: *Proceedings of the 20th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning, KR-2023*. 2023, págs. 521-530.
- [30] James Munkres. *Topology*. Pearson Modern Classics for Advanced Mathematics Series. Pearson, 2017.
- [31] Allen Newell. «The knowledge level». En: *Artificial Intelligence* 18.1 (1982), págs. 87-127.
- [32] Pavlos Peppas. «The limit assumption and multiple revision». En: *J. Log. Comput.* 3.14 (2004), págs. 355-371.
- [33] Pavlos Peppas et al. «Revision vs. Update: Taking a Closer Look». En: *Proceedings of the 12th European Conference on Artificial Intelligence*. Budapest, Hungary: John Wiley y Sons, Chichester, 1996, págs. 95-99.
- [34] Fillipe Manoel Xavier Resina. «Studies on non-prioritized multiple belief revision». Tesis doct. Universidade de São Paulo, 2021.

- [35] Jandson S. Ribeiro, Abhaya Nayak y Renata Wassermann. «Towards Belief Contraction without Compactness». En: *Principles of Knowledge Representation and Reasoning: Proceedings of the Sixteenth International Conference, KR-2018*. AAAI Press, 2018, págs. 287-296.
- [36] Nicolas Schwind, Sébastien Konieczny y Pierre Marquis. «On Belief Promotion». En: *Proceedings of the Sixteenth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning*. 2018, págs. 297-306.
- [37] Marshall H. Stone. «The Theory of Representation for Boolean Algebras». En: *Transactions of the American Mathematical Society* 40.1 (1936), págs. 37-111.
- [38] Roman Suszko. «The Fregean Axiom and Polish mathematical logic in the 1920s». En: *Studia Logica* 36 (1977), págs. 377-380.
- [39] Koji Tanaka y Graham Priest. «On an Error in Grove's Proof». En: *Logique Et Analyse* 158 (1997), págs. 215-217.
- [40] Dongmo Zhang. «Belief Revision by Sets of Sentences». En: *Journal of Computer Science and Technology* 11.2 (1996), págs. 108-125.
- [41] Dongmo Zhang y Norman Y. Foo. «Infinitary Belief Revision». En: *Journal of Philosophical Logic* 30.6 (2001), págs. 525-570.
- [42] Li Zhang. «Choice revision on belief bases». En: *CoRR* abs/1805.01325 (2018).